N.Ə.Neymətov

XƏTTİ CƏBR VƏ RİYAZİ ANALİZ

Gəncə Dövlət Universitetinin 09.07.2019-cu il tarixli 5/210 saylı əmrinə əsasən dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

GƏNCƏ - 2019

Elmi redaktor
Fəxri Professor Ə.U.Quliyev
Gəncə Dövlət Universiteti,
Riyazi analiz kafedrası

Rəyçilər
Dosent Y.K.Yusubalıyev
Azərbaycan Texnologiya Univerisiteti,
Ümumi və tətbiqi riyaziyyat kafedrası

Dosent N.İ.Tağıyeva
Gəncə Dövlət Universiteti,
Həndəsə və Cəbr kafedrası

N.Ə.Neymətov. Xətti cəbr və riyazi analiz. 123 səh. Gəncə, 2019

Dərs vəsaiti Universitetlərin İqtisadiyyat və idarəetmə fakültələrində iqtisadiyyat, menecment, dövlət və bələdiyyənin idarə edilməsi, biznesin təşkili və mühasibat uçotu ixtisaslarında təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulmuşdur. Vəsaitdən həmçinin digər fakültələrdə keçirilən Ali riyaziyyat, Riyaziyyat fənnlərinin tədrisində də istifadə etmək olar.

GİRİŞ

Hazırda bir sıra ali və orta ixtisas təhsil müəssisələrin kitabxanaları əsasən rus dilində və ya kiril əlifbası ilə yazılmış dərslik və dərs vəsaitlərilə təchiz olunmuşdur. Bu ədəbiyyatların əksəriyyəti uzun illər ərzində yeniləşdirilmədiyindən və fiziki cəhətdən yararsız hala düşdüyündən onlardan istifadə etmək mümkün deyildir. Bu səbəbdən də yeni vəsaitlərə böyük ehtiyac vardır.

Təqdim olunan dərs vəsaiti pedaqoji təmayüllü universitetlərin qeyri-riyaziyyat ixtisaslarında tədrisi nəzərdə tutulan «Ali riyaziyyat» və «Riyaziyyat» fənnlərini əhatə edir. Kitab ali cəbr və riyazi analiz olmaqla iki hissədən ibarətdir. Bu hissələrdə çoxluqlar, münasibətlər, matrislər, determinantlar, xətti tənliklərin həlli üsulları, funksiyalar, limitlər, kəsilməzlik, diferensial və inteqral hesabı kimi bölmələrində tələbələrin zəruri ehtiyaclarının ödənilməsini təmin etmək məqsədi ilə yazılmışdır.

Dərs vəsaiti dörd fəsildən ibarətdir.

I fəsildə çoxluqlar, onlar üzərində əməllər, münasibətlər, matrislər, determinantlar və onların hesablanması üsulları, xətti bircins və bircins olmayan tənliklərin həlli, iki və üç məhcullu xətti tənliklərin həll qaydaları göstərilmişdir.

II fəsilə funksiyanın tərifi və verilmə üsulları, əsas elementar funksiyalar və onların araşdırılması, funksiyanın limiti, sonsuz kiçik və sonsuz böyük kəmiyyətlər, limitlər haqqında əsas teoremlər və onların tətbiqi, funksiyanın kəsilməzliyi və s. məsələlər daxil edilmişdir.

III fəsil diferensial hesabı adlandırılmışdır. Bu fəsildə törəmə anlayışı və onun həndəsi mənası, elementar funksiyaların törəmələri və diferensiallama qaydaları, funksiyanın diferensialı, yüksək tərtibli törəmələr və diferensiallar, diferensiallanan funksiyaların xassələri, Teylor düsturuna aid materiallar verilmişdir.

IV fəsil inteqral hesabı adlandırılmışdır. Bu fəsildə ibtidai funksiya, qeyri-müəyyən inteqral, müəyyən inteqral və onların xassələri, hesablanması üsulları, Nyüton-Leybnis düsturu, inteqralın tətbiqlərinə həsr edilmişdir.

Hər bir fəslin sonunda oxucuların sərbəst işləmələri üçün çalışmalar verilmişdir.

I FƏSİL. ALİ CƏBRİN ELEMENTLƏRİ.

1.1.Çoxluqlar və onlar üzərində əməllər

Çoxluq dedikdə müəyyən əşyalar toplusu başa düşülür. Bu əşyalar, yaxud ünsürlər çox vaxt müəyyən ümumi əlamətlərə görə seçilir. Məsələn, kitabda olan vərəqlər çoxluğu, hər hansı tənliyin köklər çoxluğu və i. a. Çoxluğun mühüm cəhəti onun elementlərdən təşkil olunmasıdır. Əgər çoxluğu təşkil edən ünsürlər sonlu sayda olarsa, belə çoxluq sonlu, əks halda isə sonsuz çoxluq adlanır. İki çoxluq yalnız və yalnız o zaman bərabər hesab olunur ki, onlar eyni ünsürlərdən təşkil olunsunlar.

Çoxluqlar böyük latın hərfləri ilə işarə edilir. Məsələn, *A,B,C,...* və i. a. Çoxluqların elementləri isə kiçik latın hərfləri ilə işarə olunur. Çoxluqlar öz elementləri ilə birqiymətli təyin olunur. Sonlu çoxluqlar bilavasitə elementlərin sadalanması yolu ilə verilə bilər. Bu elementlər fiqurlu mötərizə içərisində yazılır. Məsələn, $A=\{1,2,3,4\}$ yazılışı dörd elementdən təşkil olunmuş çoxluğu göstərir. Bəzən sonsuz çoxluqları da elementlərin bir hissəsini sadalamaqla vermək mümkün olur. Bu o zaman mümkün olur ki, elementlərin düzülüş sırası və ya digər üsulla çoxluğun bütün elementləri müəyyən oluna bilsin. Məsələn, natural ədədlər çoxluğunu $N=\{1,2,3,...\}$ şəklində, tam ədədlər çoxluğunu isə $\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ və ya $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$ şəklində göstərmək olar.

Çoxluqların verilmə üsullarından biri də onların şərt vasitəsi ilə verilməsidir. Məsələn,

$$A=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2=1\}$$

çoxluğu müstəvi üzərində koordinatları $x^2+y^2=1$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunu, yəni, radiusu vahidə, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrəni göstərir. Ümumi halda şərtlə verilən çoxluq aşağıdakı yazılışa malik olur:

$$B = \{x \in M \mid P(x)\}$$

fiqurlu mötərizə içərisində şaquli xəttdən sağda $P(x)$ predikatı yazılmışdır və B çoxluğu bütün elə $x \in M$ elementlərindən təşkil olunmuşdur ki, $P(x)$ predikatı doğru olsun. Məsələn,

$$\{x \in R \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$$

çoxluğu ancaq bir elementdən ibarətdir (x=1) çünki, kvadrat tənliyin ancaq bir kökü vardır.

x elementinin A çoxluğunun elementi olması belə yazılır: $x \in A$. Yuxarıda deyilənlərə əsasən, iki A və B çoxluqlarının bərabərlik şərtini belə yaza bilərik:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Tərif 1. Əgər A çoxluğunun hər bir elementi B çoxluğunun da elementi olarsa, onda A çoxluğu B çoxluğunun *alt çoxluğu* adlanır və belə yazılır: $A \subset B$.

Məsələn, $\{1, 2, 3\} \subset N$, burada N bütün natural ədədlər çoxluğunu göstərir.

Tərifə əsasən,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B). \qquad (1)$$

Aydındır ki,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Tərif 2. Heç bir elementi olmayan çoxluq *boş çoxluq* adlanır və $\varnothing$ kimi işarə olunur.

Məsələn, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin həqiqi köklər çoxluğu boş çoxluqdur: $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$. Tərifə əsasən, boş çoxluğu belə göstərə bilərik: $\varnothing = \{x \mid x \notin \{x\}\}$.

Teorem 1. Boş çoxluq istənilən çoxluğun alt çoxluğudur və boş çoxluq yeganədir.

İsbatı. İxtiyari A çoxluğu götürək və $x \notin \{x\} \Rightarrow x \in A$ implikasiyasına baxaq. Bu implikasiyanın şərti yalandır. Deməli, o doğrudur. Beləliklə, $(\forall x)(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ mülahizəsi doğrudur. Onda (1)-ə əsasən $\varnothing \subset A$. Əgər $\varnothing$ və $\varnothing'$ iki boş çoxluq olarsa, yuxarıda isbat olunduğuna görə $\varnothing \subset \varnothing' \wedge \varnothing' \subset \varnothing$. Deməli, $\varnothing = \varnothing'$. Teorem isbat olundu.

Çoxluqlar üzərində birləşmə $(\cup)$, kəsişmə $(\cap)$ və fərq $(\setminus)$ əməlləri təyin olunur.

Tərif 3. A və B çoxluqlarının birləşməsi, yalnız və yalnız bu çoxluqlardan heç olmasa birinə daxil olan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa deyilir:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}.$$

Məsələn, A={-2,3,0} və $B = \{x / x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda,

$$A \cup B = \{-2, 0, 1, 3\}.$$

Tərif 4. A və B çoxluqlarının kəsişməsi, yalnız və yalnız bu çoxluqlardan hər ikisinə daxil olan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa deyilir:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}.$$

Məsələn, $A = \{-2, 1, 0\}$ və $B = \{x / x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda,

$$A \cup B = \{1\}.$$

Tərif 5. A və B çoxluqlarının fərqi, yalnız və yalnız bu çoxluqlardan birincisinə daxil olan və ikinciyə isə daxil olmayan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa deyilir:

$$A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Məsələn, A={-2,1,0} və $B = \{x / x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Onda, $A \setminus B = \{-2, 0\}$. Aydındır ki, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Doğrudan da, $B \setminus A = \{1\}$.

Çoxluqlar üzərində əməllərin xassələri aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 2. İxtiyari A,B,C çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A \cup A = A \cap A = A$$

birləşmə və kəsişmənin idempotentliyi;

$$A \cup B = B \cup A \wedge A \cap B = B \cap A$$
birləşmə və kəsişmənin kommutativliyi;
$$\left.\begin{aligned}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\\(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\end{aligned}\right\}$$
birləşmə və kəsişmənin assosiativliyi;
$$\left.\begin{aligned}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\\A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}\right\}$$
birləşmənin kəsişməyə və kəsişmənin birləşməyə nəzərən distributivliyi;
$$A \cup \varnothing = A \setminus \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$
İsbatı. Xassələrin isbatı eyni sxem üzrə aparılır və buna görə də bu xassələrdən birinin isbatı ilə kifayətlənmək olar. Birləşmənin kəsişməyə nəzərən distributivliyini isbat edək.
$$\forall x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
Deməli, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Digər bəndlər də analoji üsulla isbat olunur.

Birləşmə və kəsişmə əməllərinin assosiativliyi istənilən sayda çoxluğun birləməsi və kəsişməsini müəyyən etməyə imkan verir. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ olduğundan üç çoxluğun birləşməsini sadəcə $A \cup B \cup C$ kimi yazmaq olar. Eyni qayda ilə $A \cap B \cap C$ təyin olunur.

Riyazi nəzəriyyələrdə çox vaxt universal çoxluq adlanan U çoxluğu götürülür və onun alt çoxluqlarına baxılır. Məsələn, Evklid həndəsəsində universal çoxluq olaraq müstəvi qəbul olunur və onun alt çoxluqları – həndəsi fiqurlar öyrənilir. Tutaq ki, U hər hansı universal çoxluqdur və $A \subset U$ onun ixtiyari alt çoxluğudur. $U \setminus A$ fərqi A çoxluğunun *tamamlayıcısı* adlanır və A' kimi işarə olunur. Tamamlayıcının aşağıdakı xassələri vardır:

1) $(\forall A \subset U)(A \cup A' = U \wedge A \cap A' = \varnothing)$;

2) $(\forall A \subset U)(A'' = A)$;

3) $(\forall A, B \subset U)(A \subset B \to B' \subset A')$;

4) De Morqan qanunları:

$(\forall A, B \subset U)((A \cup B)' = A' \cap B') \wedge (\forall A, B \subset U)((A \cap B)' = A' \cup B')$.

Sonuncu düsturlardan birincini isbat edək.

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in U \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A \cup B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in U \wedge (\neg x \in A \wedge \neg x \in B) \Leftrightarrow x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A' \cap B').$$

Bununla birinci De Morqan qanunlarından isbat olunur. Digər xassələri də eyni qayda ilə isbat oluna bilər.

1.2.Binar münasibətlər

1.Çoxluqların düz hasili. Tutaq ki, boş olmayan iki A və B çoxluqları verilmişdir. $a \in A$ və $b \in B$ elementləri götürək. Əgər iki elementli $\{a,b\}$ çoxluğunu düzəltsək, aydındır ki, $\{a,b\} = \{b,a\}$ olacaqdır. Yəni bu çoxluqlardan götürülmüş elementləri hansı ardıcıllıqla yazmaqdan asılı olmadan $\{a,b\}$ çoxluğu dəyişmir. İndi elementlər cütünü elə düzəldək ki, birinci element həmişə birinci çoxluqdan, yəni A çoxluğundan, ikinci element isə B çoxluğundan götürülmüş olsun. Belə cüt nizamlı cüt adlanır və (a,b) kimi işarə olunur. Deyilənlərdən aydındır ki, $(a,b) \neq (b,a)$. İki (a,b) və (a',b') $(a, a' \in A \wedge b, b' \in B)$ cütləri o zaman bərabər hesab olunur ki, $a = a' \wedge b = b'$ olsun: $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$. a elementinə nizamlı cütün birinci, b-yə isə ikinci elementi deyilir.

Tərif 1. Birinci elementi A çoxluğundan, ikinci elementi isə B çoxluğundan götürülmüş bütün mümkün nizamlı cütlər çoxluğuna A və B çoxluqlarının düz hasili deyilir və belə işarə olunur: $A \times B$.

Tərifə əsasən yaza bilərik: $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$.

Məsələn, $A = \{1,2,3\}$ və $B = \{a,b\}$ çoxluqlarının düz hasilini yazaq.

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Eyni zamanda,

$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

Göründüyü kimi $A \times B \neq B \times A$. Deməli, düz hasil kommutativlik xassəsinə malik deyil. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, düz hasil üçün assosiativlik xassəsi də doğru deyil:

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.$$

Doğrudan da, sol tərəf $(a,(b,c))$ kimi, birinci elementi A çoxluğuna daxil olan cütlərdən, sağ tərəf isə $((a,b),c)$ kimi, birinci elementi $A \times B$ hasilinə daxil olan cütlərdən ibarətdir. Deməli, bu hasillər həqiqətən müxtəlifdirlər.

Teorem 1. İxtiyri *A, B, C* çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər ödənir:

1) $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$;
2) $(A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C$;
3) $(A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C$;
4) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

Teoremin isbatı sərbəst iş olaraq tələbələrə təklif olunur.

Nizamlı cüt anlayışının ümumiləşməsi n ($n \geq 1$) elementli *kortej* anlayışına gətirilir. Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqları verilmişdir. *i*-ci həddi A_i çoxluğundan olan $(a_1, a_2, ..., a_n)$ şəklində sonlu ardıcıllıq *n-elementli kortej* adlanır.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n') \Leftrightarrow a_1 = a_1' \wedge a_2 = a_2' \wedge \cdots \wedge a_n = a_n'$$

münasibəti iki kortejin bərabərlik şərtini müəyyən edir. a_i elementləri kortejin elementləri adlanır.

Tərif 2. *i*-ci həddi A_i çoxluğundan olan bütün mümkün $(a_1, a_2, ..., a_n)$ şəklində *n*-elementli kortejlər çoxluğuna $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqlarının düz hasili deyilir və belə işarə olunur: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Əgər $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ olarsa, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$ yazılışı da işlədilir (o, Dekart qüvvəti adlanır).

2.Binar münasibətlər. Binar münasibət anlayışı cəbrdə mühüm rol oynayır. Bir sıra cəbri strukturlar və onlarla bağlı olan anlayışlar binar münasibət anlayışı ilə verilir. Fərz edək ki, iki boş olmayan *A* və *B* çoxluqları verilmişdir.

Tərif 3. $A \times B$ düz hasilinin hər bir $\varphi \subset A \times B$ alt çoxluğuna *A* və *B* çoxluqlarında verilmiş binar münasibət deyilir; $(x,y) \in A \times B$ olarsa, deyilir ki, *x* və *y* elementləri φ münasibətindədir və belə yazırlar: $x\varphi y$.

Xüsusi halda əgər $A = B$ olarsa, onda deyilir ki, φ münasibəti *A* çoxluğunda verilmişdir.

Məsələn, *R* həqiqi ədədlər çoxluğunda $\leq$ münasibəti binar münasibətdir. Bu münasibət $R \times R$ düz hasilində bütün $x \leq y$ şərtini ödəyən (x,y) cütlərindən ibarətdir.

Tutaq ki, boş olmayan *A* və *B* çoxluqlarında φ binar münasibəti verilmişdir.

Tərif 4. *A* çoxluğunun

$$Dom\varphi = \{x \in A \,/\, (\exists y \in B)(x\varphi y)\}$$

şəklində təyin olunan alt çoxluğuna φ münasibətinin *təyin oblastı* deyilir; *B* çoxluğunun isə

$$Im\varphi = \{y \in B \,/\, (\exists y \in A)(x\varphi y)\}$$

şəklində təyin olunan alt çoxluğuna φ münasibətinin *qiymətlər oblastı* deyilir.

Tərif 5. $B \times A$ düz hasilində

$$\breve{\varphi} = \{(y, x) \in B \times A \,/\, (x, y) \in A \times B\}$$

kimi təyin olunan binar münasibət φ münasibətinin *inversiyası* (tərsi) adlanır.

Məsələn, $A=\{1,2,3\}$ və $B=\{a,b,c\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\varphi=\{(1,a),(1,c),(2,b),(2,c),(3,a)\}$$

münasibəti üçün

$$\breve{\varphi}=\{(a,1),(c,1),(b,2),(c,2),(a,3)\}$$

münasibəti inversiya olacaqdır.

Tərif 6. A və B çoxluqlarında verilmiş φ münasibəti ilə B və C çoxluqlarıda verilmiş γ münasibətlərinin *kompozisiyası* A və C çoxluqlarında

$$\gamma \circ \varphi = \{(x,z) / (\exists y \in B)(x\varphi y \wedge y\gamma z)\}$$

kimi təyin olunan yeni münasibətə deyilir.

İxtiyari cütlər çoxluğuna binar münasibət kimi baxmaq olar. Bu zaman münasibətə daxil olan cütlərin birinci elementlərindən təşkil oulunmuş çoxluq münasibətin təyin oblastı, ikinci elementlərindən təşkil olunmuş çoxluq isə qiymətlər oblastı olacaqdır. Məsələn,

$$\varphi = \{(1,3),(-1,2),(2,2),(2,-3),(0,0),(0,2)\}$$

cütlər çoxluğu binar münasibətdir.

$A=\{1,2,3\}$ və $B=\{a,b,c\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\varphi = \{(1,a),(1,c),(2,b),(2,c),(3,a)\}$$

münasibəti ilə, B və $\{0,-2\}$ çoxluqlarında verilmiş

$$\lambda = \{(a,2),(a,0),(b,0),(b,-2),(c,0),(c,-2)\}$$

münasibətinin kompozisiyası aşağıdakı münasibət olacaqdır:

$$\gamma \circ \varphi = \{(1,-2),(1,0),(1,0),(1,-2),(2,0),(2,-2),(2,0),(2,-2),(3,0),(3,-2)\} =$$

$$= \{(1,-2),(1,0),(2,0),(2,-2),(3,0),(3,-2)\}\ .$$

Yuxarıda təkrar olunan cütlər atılmışdır. Asanlıqla görmək olar ki, $\varphi \circ \gamma$ kompozisiyası təyin olunmamışdır. Deməli, kompozisiya kommutativlik xassəsinə malik deyil: $\gamma \circ \varphi \neq \varphi \circ \gamma$.

Ümumiyyətlə, tutaq ki, boş olmayan A çoxluğunda φ

binar münasibəti verilmişdir. Bu münasibət o zaman:
a) refleksiv münasibət adlanır ki, $(\forall x)(x\varphi x)$;
b) antirefleksiv münasibət adlanır ki, $(\forall x)(\neg x\varphi x)$;
c) simmetrik münasibət adlanır ki, $(\forall x, y)(x\varphi y \Rightarrow y\varphi x)$;
ç) antisimmetrik münasibət adlanır ki,
$$(\forall x, y)(x\varphi y \wedge y\varphi x \Rightarrow x = y);$$
d) tranzitiv münasibət adlanır ki,
$$(\forall x, y, z)(x\varphi y \wedge y\varphi x \Rightarrow x\varphi z);$$
e) rabitəli münasibət adlanır ki, $(\forall x, y)(x \neq y \Rightarrow x\varphi y \vee y\varphi x)$
şərtləri ödənilsin.

Teorem 2. Binar münasibətlərin kompozisiyası assosiativdir, yəni ixtiyari üç φ, γ, η binar münasibətləri üçün
$$\eta \circ (\gamma \circ \varphi) = (\eta \circ \gamma) \circ \varphi .$$

İsbatı. Tərifə əsasən, göstərmək lazımdır ki, əgər $x[\eta \circ (\gamma \circ \varphi)]y$ münasibəti doğrudursa, yəni $(x, y) \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi)$ olarsa, onda $(x, y) \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi$ və tərsinə. Birinci implikasiyanı, yəni
$$(x, y) \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi) \Rightarrow (x, y) \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi$$
olduğunu göstərmək kifayətdir.
$$(x, y) \in \eta \circ (\gamma \circ \varphi) \Rightarrow (\exists z)(x(\gamma \circ \varphi)z \wedge z\eta y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists z)(\exists t)(x\varphi t \wedge t\gamma z) \wedge z\eta y) \Rightarrow (\exists z)(\exists t)(x\varphi t \wedge (t\gamma z \wedge z\eta y)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists t)(x\varphi t \wedge (\exists z)(t\gamma z \wedge z\eta y)) \Rightarrow (\exists t)(x\varphi t \wedge t(\eta \circ \gamma)y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x[(\eta \circ \gamma) \circ \varphi]y \Rightarrow (x, y) \in (\eta \circ \gamma) \circ \varphi .$$
Teorem isbat olundu.

Teorem 3. İxtiyari iki φ və γ binar münasibətləri üçün
$$(\varphi \circ \gamma) = \breve{\gamma} \circ \breve{\varphi}.$$

Binar münasibət anlayışının ümumiləşməsi n-ar münasibət anlayışıdır. n-ar münasibət dedikdə ixtiyarı n elementli kortejlər çoxluğu başa düşülür. Əgər bu kortejlərin hamısının elementləri eyni bir A çoxluğundan götürülərsə, onda deyilir ki, n-ar münasibət A çoxluğunda verilmişdir.

Tərif 7. Dəyişənləri olan nəqli cümlədə dəyişənlərin yerinə onların mümkün qiymətlərini yazdıqda mülahizə alınarsa, onda belə nəqli cümlə *predikat* adlanır.

Məsələn, $x^2 + y^2 = 1$ cümləsində x və y dəyişənlərinin ixtiyati həqiqi qiymətlərində iki həqiqi ədədin bərabər olmasını ifadə edən nəqli cümlə, yəni mülahizə alınır. Deməli, baxılan cümlə predikatdır. Yəni, yuxarıdakı predikat qısa olaraq belə işarə olunur: $A(x, y) = \{x^2 + y^2 = 1\}$, yaxud, başqa bir, $B(x)=\{x<3\}$ və i. a. Riyaziyyatda isbat olunan bir çox hökmlər predikatlar vasitəsi ilə simvolik şəkildə yazıla bilər.

Münasibətlərin verilmə üsullarından biri n yerli, yəni n dəyişənli predikatlardan istifadəyə əsaslanır. Tutaq ki, $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatının dəyişənlərinin mümkün qiymətlər çoxluğu, uyğun olaraq, $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqlarıdır.

$$\varphi = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / R(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

ilə $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ düz hasilində $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatının doğruluq kortejləri çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, bu, $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqlarında n-ar münasibət müəyyən edir. Bu münasibət $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ *predikatının qrafiki* adlanır.

1.3.Nizam münasibəti

Tərif 1. Boş olmayan A çoxluğunda verilmiş φ binar münasibəti antisimmetrik və tranzitiv olarsa, onda belə münasibət *nizam münasibəti* adlanır. Bu halda deyilir ki, (A, φ) cütü nizamlanmış, yaxud nizamlı çoxluqdur.

Tərif 2. A çoxluğunda verilmiş φ nizam münasibəti refleksiv münasibət olarsa, onda o, *qeyri-ciddi nizam münasibəti* adlanır; antirefleksiv nizam münasibəti isə ciddi nizam adlanır.

Qeyd edək ki, əgər φ binar münasibəti tranzitiv və antirefleksiv olarsa onda o, antisimmetrikdir. Doğrudan da, tutaq ki, φ binar münasibəti tranzitiv və antirefleksivdir. Onda, tranzitivliyə görə $x\varphi y \wedge y\varphi x \Rightarrow x\varphi x$. Lakin, antirafleksivliyə əsasən $x\varphi x$ münasibəti doğru deyil. Buna görə də $x\varphi x \Rightarrow x = y$ implikasiyası şərti yalan olduğu üçün nəticə doğrudur. Beləliklə,

$$x\varphi y \wedge y\varphi x \Rightarrow x\varphi x \rightarrow x = y$$

və deməli, φ antisimmetrikdir. Deyilənlərə və tərif 1-ə əsasən aşağıdakı teoremin doğruluğunu hökm edə bilərik:

Teorem 1. Antirefleksiv və tranzitiv münasibət ciddi nizam münasibətidir.

Məsələn, natural ədədlər çoxluğunda tam bölünmə ($\vdots$) münasibəti nizam münasibətidir. Bu nizam refleksiv olduğu üçün (çünki $a \vdots a$) o, qeyri ciddi nizamdır.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda $x < y$ münasibəti ciddi nizam münasibətidir.

Tərif 3. Tutaq ki, (A,φ) nizamlı çoxluqdur. Əgər φ rabitəli münasibət olarsa, onda belə nizam *xətti nizam*, (A,φ) isə *xətti nizamlı çoxluq* adlanır.

Tutaq ki, φ xətti nizamdır. Onda əgər $x\varphi y \wedge y\varphi x$ doğru olarsa, tranzitivliyə əsasən $x\varphi x$ doğru olar. Deməli, əgər φ ciddi nizam olarsa, onda $x\varphi y \wedge y\varphi x$ mülahizəsi yalandır. Beləliklə, ciddi xətti nizam verilmiş çoxluqda *trixotomiya qanunu* deyilən münasibət ödənir:

$$(\forall x, y \in A)(x = y \vee x\varphi y \vee y\varphi x)$$

və üç münasibətdən heç bir cütü eyni zamanda ödənmir. Əgər (A,φ) xətti nizamlı çoxluq deyilsə, onda o, hissə-hissə nizamlı çoxluq adlanır.

Məsələn, $x\varphi y \leftrightarrow x < y$ kimi təyin olunan münasibət

R həqiqi ədədlər çoxluğunda ciddi xətti nizamdır. İxtiyari iki x və y həqiqi ədədləri üçün aşağıdakı üç münasibətdən ancaq biri ödənir: $x = y$, $x > y$, $x < y$.

Tərif 4. Tutaq ki, (A,φ) nizamlı çoxluqdur. $a \in A$ elementi o zaman *ən kiçik element* adlanır ki,

$$(\forall x \in A)(a \neq x \Rightarrow a\varphi x).$$

Hər bir xətti nizamlı çoxluqda ən kiçik element birdən çox ola bilməz. N natural ədədlər çoxluğunun hər bir alt çoxluğunda ən kiçik element vardır. Lakin $(0,1)$ aralığında "$<$" ciddi nizamına görə ən kiçik element yoxdur.

Tərif 5. Əgər xətti nizamlı (A,φ) çoxluğunun hər bir boş olmayan alt çoxluğunda ən kiçik element varsa, onda belə çoxluq *tamam nizamlı çoxluq* adlanır.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən, N natural ədədlər çoxluğu tamam nizamlı çoxluqdur, lakin həqiqi ədədlər çoxluğu tamam nizamlı deyil.

1.4.Matris anlayışı

Tutaq ki, m və n natural ədədlərdir, $m \cdot n$ sayda ədəddən düzbucaqlı şəklində düzəldilmiş m sayda sətri və n sayda sütunu olan cədvələ $(m \times n)$ – ölçülü matris deyilir. Matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

şəklində yazırlar. Bəzən qısa olmaq üçün matrisi böyük hərflə (A, B, C, X, Y, …) və ya a_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ şəklində işarə edirlər.

Matrisi təşkil edən a_{ij} ədədlərinə onun elementləri deyilir. Matrisin elementləri ikiqat indeksə malikdir. Bu indekslərdən aşağısında birincisi (i) həmin elementin yerləşdiyi sətrin nömrəsini, ikincisi (j) isə onun yerləşdiyi sütunun nömrəsini göstərir. a_{ij} elementi i nömrəli sətrlə j nömrəli sütunun kəsişməsində yerləşir.

$(m \times n)$ – ölçülü (1) matrisinin sətir və sütunlarının sayı bərabər olduqda ($m = n$) ona kvadrat matris deyilir. Bu halda n ədədinə kvadrat matrisin tərtibi deyilir. Məsələn, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$-iki-tərtibli matris, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$-üçtərtibli matris.

Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə *bərabər matrislər* deyilir.

Bir elementdən ibarət olan matrisə *birtərtibli matris* deyilir. Ancaq bir sətri olan matrisə *sətir-matris*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

ancaq bir sütunu olan matrisə isə *sütun-matris* deyilir

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

n tərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

kvadrat matrisinin yuxarı sol küncündə yerləşən a_{11} elementi ilə aşağı sağ küncündəki a_{nn} elementini birləşdirən düz xətt boyu üzrə yerləşən $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementləri çoxluğu həmin matrisin *baş diaqonalı* adlanır. Yalnız baş diaqonal elementləri sıfırdan fərqli olan kvadrat matrisə *diaqonal matris* deyilir. Baş diaqonal elementləri vahidə bərabər olan diaqonal matris *vahid matris* adlanır:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bütün elementləri sıfra bərabər olan kvadrat matrisə *sıfır matris* deyilir və O ilə işarə olunur. Məsələn,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5.Matrislər üzərində əməllər və onların xassələri

1. Matrislərin cəmi. Eyni $(m \times n)$-ölçülü $A=(a_{ij})$ və $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n})$ matrislərinin cəmi həmin ölçülü və hədləri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \ (i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n}) \qquad (1)$$

kimi təyin olunan $C=(c_{ij})$ matrisinə deyilir və $C=A+B$ ilə işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, matrislərin toplanması yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrinə malikdir, yəni eyniölçülü A, B və C matrisləri üçün

$$A+B=B+A\,,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

münasibətləri doğrudur. Eyniölçülü A matrisi və O sıfır matrisi üçün həmişə $A+O=A$ münasibəti doğrudur.

2. Matrislərin fərqi. Eyniölçülü A və B matrislərinin fərqi həmin ölçülü elə C matrisinə deyilir ki, onu B ilə topladıqda A-ya bərabər olsun: $A=C+B$. A və B matrislərinin fərqini $A-B=C$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$ ilə işarə edirlər. Aydındır ki, həmişə $A - A = 0$.

3. Matrisin ədədə vurulması. Verilmiş $A=(a_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) matrisinin həqiqi λ ədədinə hasili hədləri $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) kimi təyin olunan $B=(\lambda a_{ij})$ matrisinə deyilir və $B=\lambda A$ ilə işarə olunur. Aydındır ki, ixtiyari A, B matrisləri və λ, μ ədədləri üçün

$$(\lambda\mu)A=\lambda\ (\mu A),\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

xassələri doğrudur.

4. Matrisin transponirə olunması. Verilmiş A matrisinin bütün uyğun sətir və sütunlarının yerinin dəyişdirilməsinə (nömrəsi saxlanmaqla) həmin matrisin çevrilməsi və ya transponirə edilməsi deyilir və A^* ilə işarə olunur. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aydındır ki, $(A^*)^*=A$. $A=A^*$ olduqda A matrisinə *simmetrik matris* deyilir. (2) matrisinin simmetrik olması şərtini $a_{ij}=a_{ji}$ ($i,j=\overline{1,n}$) kimi yazmaq olar. $a_{ij}=-a_{ji}$ olduqda A matrisinə *çəpsimmetrik matris* deyilir.

5. İki matrisin hasili. $(m\times n)$ ölçülü $A=(a_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) matrisinin $(n\times k)$ ölçülü $B=(b_{ij})$ ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,k}$) matrisinə hasili hədləri

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}\quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$$

kimi təyin olunan $(m\times p)$ ölçülü $C=(c_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k}$) matrisinə iki matrisin hasili deyilir və $C=A\,B$ ilə işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, ixtiyari ölçülü iki matrisi vurmaq olmaz.

A matrisini o zaman B matrisinə vurmaq olar ki, A-nın sütunlarının sayı B-nin sətirlərinin sayına bərabər olsun.

Xüsusi halda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, eyniölçülü A və B kvadrat matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi doğru deyil: $AB \neq BA$. Lakin istənilən A kvadrat matrisi ilə eynitərtibli olan E vahid və O sıfır matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi həmişə doğrudur

$$EA = AE = A,$$
$$OA = AO = O.$$

Matrislərin hasilinin bir sıra başqa xassələri də vardır. Məsələn, ixtiyari A, B, C matrisləri və həqiqi λ ədədi üçün

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB),$$
$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$C(A+B) = CA + CB,$$
$$A(BC) = (AB)C,$$

bərabərlikləri doğrudur.

1.6.Determinant anlayışı. Determinantın əsas xassələri

Əvvəlcə ikitərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matrisinə baxaq. Bu matrisin elementlərindən düzəldilmiş $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ fərqinə (1) matrisinin *determinantı* (və ya sadəcə olaraq *ikitərtibli determinant*) deyilir və

$$\det A = \Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (2)$$

kimi işarə olunur. Üçtərtibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

matrisinin elementlərindən düzəldilmiş

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (4)$$

ifadəsinə *üçtərtibli determinant* deyilir. (4) ifadəsinə determinantın açılışı da deyilir.

Matris kimi determinantlar da sətir və sütunlardan ibarətdir. n tərtibli determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütunu sildikdən sonra yerdə qalan elementlər $n-1$ tərtibli bir determinant əmələ gətirir. Bu determinanta həmin elementin *minoru* deyilir. a_{ij} elementinin minorunu M_{ij} ilə işarə edirlər. M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ vuruğu ilə hasilinə a_{ij} elementinin *cəbri tamamlayıcısı* deyilir və

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

kimi işarə olunur.

1^0. Determinantın bütün uyğun sətir və sütunlarının yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişmir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2^0. Determinantın iki sətrinin (və ya sütununun) bir-biri ilə yerini dəyişdikdə determinantın işarəsi dəyişər:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

3^0. İki sətri (sütunu) eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{12}a_{31} - a_{11}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}a_{11} = 0.$$

4^0. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri sıfır olduqda determinant sıfra bərabər olar.

5^0. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vuruğu olarsa, onda həmin vuruğu determinantın xaricinə çıxarmaq olar.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Determinantın iki sətri (sütunu) mütənasib olarsa, onda determinant sıfra bərabər olar.

$$\begin{vmatrix} 25 & 10 & 45 \\ 10 & 4 & 18 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

7^0. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar, bu determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar, o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(Sütunlar üçün də analojidir)

8^0. Determinantın hər hansı sətrinin (sütununun) bütün elementlərini bir ədədə vurub onun başqa bir sətrinin (sütununun) uyğun elementləri üzərinə əlavə etsək, determinant dəyişmir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (k) = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9^0. Determinantın bir sətir (sütunu) digər sətirlərin (sütunların) xətti kombinasiyasından ibarətdirsə, bu determinant sıfra bərabərdir.

Determinantın i sətrinə görə ayrılışı

$$b_1, b_2, ..., b_m \quad (i = \overline{1,n}),$$

j sütununa görə ayrılışı isə

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$$

olar.

1.7.Tərs matris və onun tapılması

Tutaq ki, A hər hansı tərtibli kvadrat matris və E həmin tərtibli vahid matrisdir. Bu halda

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \qquad (1)$$

bərabərliyini ödəyən A^{-1} matrisinə A matrisinin tərsi deyilir. (1) bərabərliyi göstərir ki, A^{-1} matrisi A matrisinin tərsidirsə, onda A matrisi də A^{-1} matrisinin tərsidir:

$$(A^{-1})^{-1} = A\,, \qquad (2)$$

yəni A və A^{-1} matrisləri qarşılıqlı tərs matrislərdir. A matrisinin yalnız və yalnız bir tərs matrisi ola bilər. Verilmiş A matrisinin A^{-1} tərs matrisinin olması üçün onun Δ determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtdir. Deməli, determinantı sıfırdan fərqli ($\Delta \neq 0$) olan ixtiyari

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

kvadrat matrisinin yeganə tərs matrisi var:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

burada A_{ij} – A matrisin a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır. Qeyd edək ki, (4) düsturunda A matrisinin hər bir sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcıları həmin nömrəli sütuna yazılmışdır, yəni, sətr elementlərinin cəbri tamamlayıcıları ilə sütun elementlərinin cəbri tamamlayıcıları transponirə edilmişdir.

1.8.Xətti tənliklər sistemi.Xətti tənliklər sisteminin matris şəklində yazılması

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

şəklində olan sistem n məchullu *m xətti tənliklər sistemi* adlanır, burada a_{ij} , b_i $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$-ədədlərdir. Tənliklərin sağ tərəflərindəki $b_1, b_2, ..., b_m$ ədədlərinin hamısı sıfra bərabər olarsa, onda həmin sistemə bircins xətti tənliklər sistemi deyilir. $b_1, b_2, ..., b_m$ ədədlərinin heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircins olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir. Sistemə daxil olan tənliklərin hər birini ödəyən

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$$

qiymətlər çoxluğuna həmin sistemin həlli deyilir.

Verilmiş sistemin həlli ola da bilər, olmaya da bilər; sistemin həlli varsa, ona uyuşan və ya birgə sistem, əks halda isə uyuşmayan və ya birgə olmayan sistem deyilir. Tənliklər sistemi uyuşan olduqda onun bir və ya birdən çox həlli ola bilər.

(1) xətti tənliklər sistemini matris tənliyi şəklində yazmaq olar.

Məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A, sağ tərəfdəki məlum ədədlərdən düzəlmiş sütun-matrisi B, axtarılan məchullardan düzəlmiş sütun-matrisi isə X ilə işarə edək:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

A matrisin sütunlarının sayı X matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olduqdan, AX hasilini tapa bilərik

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

(1) tənliklər sisteminin sağ tərəfi B sütun-matrisin elementləridir və buna görə də matrislərin bərabərliyi şərtinə əsasən

$$AX = B \qquad (4)$$

yazmaq olar. (4) tənliyinə matris-tənlik deyilir.

1.9.Xətti tənliklər sisteminin Kramer üsulu ilə həlli

Tutaq ki, xətti tənliklər sistemi (yəni n məchullu n

tənlik) verilmişdir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemin determinantı sıfırdan fərqlidir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Tutaq ki, $x_1, x_2, ..., x_n$ (1) sisteminin hər hansı bir həllidir. Onda (1) bərabərliklərini uyğun olaraq sistemin Δ determinantının hər hansı j sütunun $(j = \overline{1,n})$ elementlərinin $A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{nj}$ cəbri tamamlayıcılarına vurub və sonra alınan bərabərlikləri toplasaq alarıq:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj}) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}.$$

Burada i sütun elementlərinin j sütunun elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi $i \neq j$ olanda sıfra və i=j olanda determinanta bərabər olmasını nəzərə alsaq son bərabərlikdən alarıq

$$x_j \Delta = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}. \qquad (3)$$

Sistemin determinantından j sütununu $b_1, b_2, ..., b_n$ sabit hədlər sütunu ilə əvəz etməklə (Δ-nın bütün başqa sütunlarını saxlamaq şərti ilə) alınan determinantı Δ_j ilə işarə edək.

Qeyd edək ki, (3)-ün sağ tərəfdə elə həmin Δ_j determinantına bərabər olur, bu bərabərlik aşağıdakı şəkildədir:

$$x_j \Delta = \Delta_j \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (4)$$

Sistemin Δ determinantı sıfırdan fərqli olduğundan (4) bərabərlikləri aşağıdakı nisbətlərə ekvivalentdir

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{5}$$

Beləliklə, sistemin (2) determinantı sıfırdan fərqli olduğundan (1) sisteminin $x_1, x_2, ..., x_n$ həlləri birqiymətli olaraq (5) düsturları vasitəsilə təyin edilir. Bu düsturlar *Kramer*[1] *düsturları* adlanırlar.

1.10.Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli

Tutaq ki, *n* məchullu *n* xətti tənliklər sistemi verilmişdir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

və məchulların əmsallarından düzəlmiş əsas matrisin

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

determinantı sıfırdan fərqlidir.

(1) sistemini ona ekvivalent olan matris tənliyi ilə əvəz edək

$$AX = B, \tag{3}$$

[1] Qabriel Kramer (31.07.1704-04.01.1752) – İsveçrə riyaziyyatçısı.

burada A – sistemin əsas matrisi, X və B isə sütun-matrislərdir

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A matrisinin Δ determinantı sıfırdan fərqli olduğu üçün onun A^{-1} tərs matrisi var. Tutaq ki, (1) sistemin həlli var, yəni (3) matris tənliyini eyniliyə çevirən X sütunu vardır. Bu halda (3) tənliyinin hər iki tərəfini soldan A^{-1} matrisinə vursaq, alarıq

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B. \qquad (4)$$

Buradan üç matrisin hasilinin xassəsini və $A^{-1}A = E$ (burada E vahid matrisidir) olduğunu nəzərə alsaq onda

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X.$$

Nəticədə, (4) düsurundan alarıq ki,

$$X = A^{-1}B. \qquad (5)$$

Beləliklə, isbat etdik ki, (3) matris tənliyinin həlli varsa, onda o (5) münasibəti ilə birqiymətli təyin edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (5) münasibəti ilə təyin edilən X sütunu doğrudan da (3) matris tənliyinin həllidir, yəni bu tənliyi eyniliyə çevirir. Doğrudan da, əgər X matrisi (5) münasibəti ilə təyin edilərsə, onda

$$AX = A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = EB = B.$$

Deməli, əgər A matrisinin determinantı sıfırdan fərqli olarsa, onda (5) münasibəti ilə təyin edilən (3) matris tənliyinin yeganə həlli vardır.

1.11.Elementar çevirmələr. Elementar matrislər

Xətti tənliklər sistemi mövzusu olduqca geniş mövzudur. Onun elementləri hələ orta məktəbdən tədris olunmağa başlayır. Ən sadə xətti tənliklər sistemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

şəklində olan sistemdir. Burada $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ məlum ədədlər, x və y isə dəyişənlərdir. Aydındır ki, hansı tənliyin birinci və hansının ikinci yazmağın əhəmiyyəti yoxdur. Ona görə də $a_1 \neq 0$ qəbul edə bilərik. Orta məktəbdə belə sistemlərin həlli üçün təklif olunan üsullardan biri, cəbri toplama üsulu adlanan üsuldur. Bu üsul aşağıdakı kimidir. Birinci tənliyin hər iki tərəfini $-a_2a_1^{-1}$ ədədinə vuraq:

$$-a_2x-b_1a_2a_1^{-1}y=-c_1a_2a_1^{-1}$$

alınan tənliyi ikinci tənliklə toplayıb, hər tərəfi yenidən a_1-ə vursaq və əgər $b_2a_1-b_1a_2\neq 0$ olarsa, alarıq:

$$(b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2$$

və ya

$$y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}.$$

Alınan qiyməti birinci tənlikdə yerinə yazmaqla x-i də tapmaq olar. Bu üsul yuxarıdakı sistemi tamamilə araşdırmağa imkan verir.

Bir sıra praktik məsələlərlə əlaqədar daha mürəkkəb xətti tənliklər sistemi meydana çıxır. Belə sistemlərdə dəyişənlərin və tənliklərin sayı müxtəlif və böyük ədədlər ola bilər.

Ümumi şəkildə n dəyişəni olan m sayda tənlikdən ibarət olan xətti tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

burada $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərdir. a_{ij} ədədləri ikiqat indeklənmiş həqiqi ədədlərdir. Birinci indeks tənliyin nömrəsini, ikinci indeks isə dəyişənin nömrəsini göstərir. Birinci indeks $i=1,2,...,m$ qiymətlərini, ikinci indeks isə $j=1,2,...,n$ qiymətlərini ala bilər. Məsələn, a_{23} simvolu ikinci tənlikdə 3-cü dəyişənin yəni x_3-ün əmsalını göstərir. Bərabərliklərin sağ tərəflərindəki $b_1,b_2,...,b_m$ ədədləri həqiqi ədədlər olub, sərbəst hədlər adlanır. Əgər hər hansı dəyişənin bütün tənliklərdə əmsalı sıfır olarsa, onda belə dəyişənin xətti tənliklər sisteminə daxil olmadığını da qəbul etmək olar. Buna görə də (1) sisteminə baxarkən biz hesab edə bilərik ki, hər bir dəyişənin heç olmasa bir əmsalı sıfırdan fərqlidir. Məsələn, dörd məchulu olan üç xətti tənlikdən ibarət aşağıdakı sistemi

$$\begin{cases} -x_1 + 0\cdot x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 0\cdot x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

biz, x_2 dəyişənini atıb, dəyişənləri yenidən nömrələməklə

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 = 0 \\ 3y_1 - 3y_2 + 4y_3 = 3 \end{cases} \tag{2}$$

şəklində yaza bilərik.

(1) ümumi xətti tənliklər sisteminə qayıdaq.

Tərif 1. $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in R^n$ vektoru (1) sisteminin hər bir tənliyini doğru bərabərliyə çevirirsə, onda belə vektora (1) sisteminin həlli deyilir.

Sistemin bütün həlləri onun həllər çoxluğunu əmələ gətirir. Məsələn, (-2,1,0) üçlüyü

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

sisteminin həllidir, çünki

$$\begin{cases} -2+3\cdot 1+0=1 \\ +2+1+0=3 \\ -4-1-0=-5 \end{cases}$$

bərabərlikləri doğrudur.

Tərif 2. Əgər (1) xətti tənliklər sistemində bütün sərbəst hədlər sıfra bərabər olarsa, onda belə sistem *bircins xətti tənliklər sistemi* adlanır. Bircins olmayan sistem *qeyri-bircins sistem* adlanır. Qeyri-bircins (1) sistemində sərbəst hədlərin sıfırla əvəz olunması nəticəsində alınan sistem (1)-ə uyğun bircins xətti tənliklər sistemi deyilir.

Tərif 3. Həllər çoxluğu boş olmayan sistem *uyuşan sistem* (və ya *birgə sistem*), həlli olmayan sistem isə *uyuşmayan sistem* adlanır.

Xətti tənliklər sistemini öyrənərkən iki əsas məsələ qarşıya çıxır. Nə zaman hökm etmək olar ki, (1) sistemi uyuşandır və əgər (1) uyuşan sistem olarsa, onun həlləri necə tapıla bilər?

(1) sistemi ilə birlikdə başqa xətti tənliklər sistemi götürək və tutaq ki, onunla m sayda tənliyi və n sayda məchulu vardır:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases} \qquad (3)$$

Tərif 4. Əgər (1) və (3) sistemlərinin həllər çoxluqları eyni olarsa, belə sistemlərə eynigüclü sistemlər deyilir və (1)~(3) yazılır. Əgər (1) sisteminin hər bir həlli (3) sisteminin də həlli olarsa, onda (3) sistemi (1) sisteminin nəticəsi adlanır.

Qeyd edək ki, bütün xətti tənliklər sistemləri çoxluğunda (yəni m məchullu və n dəyişənli sistemlər çoxluğnda) eynigüclülük münasibəti ekvivalentlik münasibətidir. Yəni əgər (a),(b),(c) ixtiyari sistemlərdirsə və (a),(b),(c) sistemləri üçün (a)~(a); əgər (a)~(b) olarsa, onda (b)~(a); əgər (a)~(b) və (b)~(c) isə, onda (a)~(c).

Əgər (3) tənliyində i-ci yerdə (1) tənliyinin k-cı $(k\neq i)$, (3) tənliyində k-cı yerdə isə (1) tənliyinin i-ci tənliyi dayanmaqla, qalan tənliklər isə dəyişməz qalarsa, onda deyəcəyik ki, (3) tənliyi (1)-dən *I növ elementar çevirmə* ilə, yəni i və k nömrəli tənliklərin yerdəyişməsi ilə alınmışdır.

Fərz edək ki, (3) sisteminin bütün tənlikləri, i-cidən başqa, (1) sistemində olduğu kimidir və i-ci tənlik

$$(a_{i1}+ca'_{k1})x_1+(a_{i2}+ca'_{k2})x_2+\ldots+(a_{in}+ca'_{kn})x_n=b_i+cb'_k$$

şəklində isə, onda deyəcəyik ki, (3) sistemi (1) sistemindən *II növ elementar çevirmə* ilə alınmışdır. Aydındır ki, II növ elementar çevirmə zamanı (1) sisteminin k-cı tənliyi dəyişmədən hər hansı c ədədinə vurularaq i-ci tənliyə hədbəhəd əlavə olunur.

Qeyd edək ki, ixtiyari iki uyuşmayan sistem eynigüclüdür.

1.12. Xətti tənliklər sisteminin həlli üçün Qauss üsulu

Tərif 1. Əgər

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

sisteminin yeganə həlli varsa, ona *müəyyən* sistem deyilir. Əks halda sistem *qeyri-müəyyən* sistem adlanır.

Məsələn,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

sistemi müəyyən sistemdir, çünki onun yeganə həlli vardır: $x_1 = 4, x_2 = 1$. Lakin yuxarıda baxdığımız (2) sistemi qeyri-müəyyən sistemdir, çünki onun digər həlləri də vardır. Məsələn, x_1=-1, x_2=0, x_3=1.

(1) xətti tənliklər sisteminin araşdırılması üçün müxtəlif üsullar mövcuddur. Belə üsullardan ən sadəsi dəyişənlərin ardıcıl yox edilməsi üsulu və ya *Qauss*[2] *usulu* adlanır. Bu üsulun kökləri riyaziyyat tarixinin çox qədim dövrlərinə gedir. Belə ki, müəllifi məlum olmayan «Riyazi incəsənət haqda doqquz kitab» adlı əsərdə qədim Çin riyaziyyatçıları xətti tənliklər sistemini məhz bu üsulla həll edirdilər. B.e.ə. 206-b.e. 220-ci illərində yazıldığı güman edilir və bu göstərir ki, bu üsulun tarixi daha qədimdir.

(1) sisteminə qayıdaq və fərz edək ki, x_1-in əmsalı sıfır deyil. Əks halda biz I növ çevirmə vasitəsi ilə elə sistem ala bilərik ki, x_1-in əmsalı sıfır olmasın. Bu mümkündür, çünki yuxarıda qeyd olunduğu kimi, x_1-in əmsallarından heç olmasa biri sıfır deyil.

Aşağıdakı kimi m-1 sayda iki növ elementar çevirmə yerinə yetirək. 1-ci tənliyin hər iki tərəfini $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ə vuraraq, ikinci tənliyə əlavə edək. Sonra isə 1-ci tənliyin hər iki tərəfini $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ə vuraraq, üçüncü tənliyə əlavə edək və i.a. i-ci addımda 1-ci tənliyin hər iki tərəfini $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$-ə vuraraq, m-ci tənliyə əlavə edək (i=1,…,m-1). Nəticədə aşağıdakı sistemi alarıq:

[2] Karl Fridrix Qauss (30.04.1777-23.02.1855) – Alman, riyaziyyatçısı.

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Ola bilər ki, a'_{s2} əmsallarından hamısı $s > 1$ olduqda sıfra bərabər olsun. Onda birinci tənliyi nəzərdən ataraq, bütün belə əmsalları dəyişənlərlə birlikdə atmaq olar. Nəticədə belə bir tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1s}x_s + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{2s}x_s + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad a_{ms}x_s + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Birinci tənliyə toxunmadan yuxarıda yerinə yetirilən əməliyyatları sistemin qalan tənliklərinə tətbiq edək. Onda bir neçə addımdan sonra (ən çoxu m sayda addımdan sonra) sistemin tənliklərinin sol tərəflərində bütün r sayda tənlikdən başqa qalanlarının əmsalları sıfra çevriləcəkdir və biz aşağıdakı sistemi alacağıq:

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \cdots + \overline{a}_{1s}x_s + \cdots + \overline{a}_{1k}x_k + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\ \qquad \overline{a}_{2s}x_s + \cdots + \overline{a}_{2k}x_k + \cdots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2, \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad \qquad \overline{a}_{rk}x_k + \cdots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r, \\ \qquad \qquad \qquad 0 = \overline{b}_{r+1}, \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad \qquad \qquad 0 = \overline{b}_m. \end{cases} \qquad (4)$$

Asanlıqla görmək olar ki, $1 \le r \le m, r \le n$ və $1 < s < k \le n$. (4) sistemi (1) sistemi ilə eynigüclüdür. (4) sisteminə nəzər salsaq görərik ki, tənliklərin nömrəsi artdıqca dəyişənlərin sayı azalır. Hər bir tənliyin ilk əmsalı sıfırdan fərqlidir və sonrakı tənliklərdə uyğun dəyişənin əmsalları sıfra bərabərdir. (4) sistemi pilləli şəkilli sistem adlanır. Əgər $r=n$ olarsa, (4) üçbucaq şəkilli, $r < n$ olduqda isə trapesşəkilli sistem adlanır.

Pilləli şəkilli sistemin matrisi *pilləli matris* adlanır. Qeyd edək ki, sətrin ilk sıfırdan fərqli elementi onun aparıcı elementi adlanır. Pilləli matris aşağıdakı iki şərtlə müəyyən olunur:

1. Matrisin tamamilə sıfır olan sətirləri digər sətirlərdən aşağıda yerləşmişdir.
2. İkincidən başlayaraq, hər bir sətrin aparıcı elementi özündən əvvəlki sətrin aparıcı elementindən sağda yerləşmişdir.

Məsələn, aşağıdakı matris pilləli matrisdir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem 1. Hər bir xətti tənliklər sistemi müəyyən pilləli xətti tənliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Bu teoremin isbatı yuxarıda aparılan çevirmələrdən alınır. Qeyd edək ki, (4) sistemi yeganə deyil və onun forması I növ elementar çevirmələrdən asılı olaraq dəyişə bilər. Lakin biz irəlidə görəcəyik ki, r ədədi bütün pilləli şəkilli (4) sistemləri üçün eynidir.

Teorem 2. (1) xətti tənliklər sistemini (4) pilləli şəkilli sistemə gətirdikdən sonra:

1) $m > r$ olduqda $\overline{b}_{r+1} = \cdots = \overline{b}_m = 0$ (1) sisteminin uyuşan olması üçün zəruri və kafidir;

2) $m = r$ olarsa, (1) sistemi uyuşandır;

3) $r=n$ oldması bu sistemin müəyyən sistem (yəni yeganə həl-

linin olması) üçün zəruri və kafidir.

İsbatı. (4) sistemi (1) sistemi ilə eynigüclüdür. Əgər (4) sisteminin həlli varsa, onda $m > r$ olduqda $\overline{b}_{r+1} = \cdots = \overline{b}_m = 0$ münasibətləri ödənməlidir, əks halda system uyuşan deyil.

Fərz edək ki, $m > r$ olmaqla, $\overline{b}_{r+1} = \cdots = \overline{b}_m = 0$ münasibətləri ödənir. Tutaq ki, $r=n$. Onda sonuncu tənlikdən x_n dəyişəni birqiymətli olaraq tapılır. Bu qiyməti sonuncudan əvvəlki tənlikdə nəzərə alaq. Həmin tənlikdən x_{n-1} dəyişəni birqiymətli tapılır. Aldığımız qiymətləri sondan 3-cü tənlikdə nəzərə alaraq x_{n-2} üçün yeganə qiymət tapırıq və i.a. Bu qayda ilə ardıcıl olaraq bütün dəyişənləri üçün yeganə qiymət tapılır. Deməli, $r=n$ olduqda (1) sistemi müəyyəndir.

Tutaq ki, $r > n$. $x_{r+1},...,x_n$ dəyişənlərinə K meydanından olan ixtiyari qiymətləri verərək (4) sisteminin bütün tənliklərində onları bərabərliyin sağ tərəfinə keçirək. Bu halda biz üçbucaq şəkilli sistem alarıq:

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{1s}x_s + \cdots + \overline{a}_{1k}x_k = \overline{b}_1 - \overline{a}_{1c}x_c - \cdots - \overline{a}_{1d}x_d, \\ \qquad \overline{a}_{2s}x_s + \cdots + \overline{a}_{2k}x_k = \overline{b}_2 - \overline{a}_{2c}x_c - \cdots - \overline{a}_{2d}x_d, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad \overline{a}_{rk}x_k = \overline{b}_r - \overline{a}_{rc}x_c - \cdots - \overline{a}_{rd}x_d, \\ \qquad\qquad 0 = \overline{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad 0 = \overline{b}_m. \end{cases} \tag{5}$$

Bu sistemdə, sağ tərəfdəki dəyişənlər soldakı dəyişənləri $\{x_1,...,x_n\}$ çoxluğunadək tamamlamaqla, K meydanından olan ixtiyari qiymətləri alır. Onların hər bir qiymətində (5) sistemi yuxarıda baxılan şəkildə sistemə çevrilir və buna görə də yeganə həlli vardır. Deməli, sistem uyuşandır, qeyri müəyyəndir və sonsuz sayda həlləri vardır. Teoremin 1) -ci hökmü isbat olundu.

2)-də $m=r$ olarsa, onda teoremin hökmü yuxarıdakı mühakimələrdən eyni qayda ilə alınır. Nəhayət 3)-cü hökm də yuxarıdakına oxşar qayda ilə isbat olunur.

Nəticə 1. (1) xətti tənliklər sisteminin birgə olması üçün (5) sistemində $\overline{b}_{r+1},...,\overline{b}_m$ ədədləri içərisində sıfırdan fərqlisinin olmaması zəruri və kafidir.

Nəticə 2. (1) xətti tənliklər sistemi birgə olarsa, onda $r<n$ olduqda bu sistem qeyri-müəyyəndir.

Yuxarıda alınmış nəticələri bircins xətti tənliklər sisteminə tətbiq edək.

Teorem 3. $r<n$ olarsa, bircins xətti tənliklər sistemi qeyri-müəyyəndir.

İsbatı. (1) sistemini elementar çevirmələrlə (4) sisteminə gətirək. Şərtə görə $r<n$ dəyişənlərdən birinə, məsələn x_n-ə ixtiyari həqiqi qiymətləri verə bilərik. Xüsusi halda $x_n=1$. Beləliklə, alınan həll (0,0,…,0)-dan fərqlidir. Lakin bircins sistem həmişə birgədir (uyuşandır) və (0,0,…,0) onun həllidir. Deməli, sistemin ən azı iki həlli vardır.

Qeyd edək ki, tənliklər üzərində yerinə yetirilən elementar çevirmələr zamanı dəyişənlər heç bir rol oynamır və əməliyyatlar ancaq matrislər üzərində aparılır. Buna görə də çevirmələri sadələşdirmək üçün sistem üzərində aparılan çevirmələri əmsallardan və sərbəst hədlərdən düzələn matrislər üzərində yerinə yetirmək olar. Əvvəlcə sistem ilə bağlı iki matris daxil edək.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrisləri uyğun olaraq (1) sisteminin matrisi və genişlənmiş matrisi adlanır (qeyd edək ki, ikinci matrisdə şaquli xətt ancaq şərti olaraq sonuncu sütunu əmsallardan düzələn sütunlardan ayırmaq üçün işlədilən köməkçi vasitədir; belə ki, birinci matris $m\times n$, ikinci matris isə $m\times(n+1)$ ölçülü matrislərdir. Tənliklər üzərində yerinə yetirilən elementar çevirmələri genişlənmiş matrisin sətirləri üzərində yerinə yetirsək, (5) sisteminə uyğun olan aşağıdakı matrisi alarıq:

$$\overline{B}=\left(\begin{array}{ccccccc|c}
\overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1s} & \cdots & \overline{a}_{1k} & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\
 & & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2k} & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & \overline{a}_{rk} & \cdots & \overline{a}_{rn} & \overline{b}_r \\
 & & & & & & 0 & \overline{b}_{r+1} \\
 & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & \overline{b}_m
\end{array}\right).$$

Bu şəkildə matris pilləli matris adlanır. Bu matrisdə ikincidən başlayaraq hər bir sətirdə ilk sıfırdan fərqli element özündən əvvəlki sətrin ilk sıfırdan fərqli elementindən sağda yerləşir. Belə ki, $\overline{B}$ matrisində boş yerlərdə sıfırların dayandığı hesab olunur.

Sistemin matrisi üzərində elementar çevirmələri elementar matrislərə vurma ilə əvəz etmək olar. Elementar çevirmələrə uyğun olaraq üç növ elementar matris daxil etmək olar.

I növ elementar matris i nömrəli sətirlə j nömrəli sətirlərin yerini dəyişən $\varphi:(i)\leftrightarrow(j)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{(i)\leftrightarrow(j)}=\begin{pmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.$$

Bu matris vahid matrisdə i və j nömrəli sətirlərin yerini dəyişməklə alınır.

Məsələn, $\varphi:(2)\leftrightarrow(4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{(2)\leftrightarrow(4)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

II növ elementar matris i nömrəli sətri c-yə vuraraq, j nömrəli sətirə əlavə etməkdən ibarət olan $\varphi:(j)+c(i)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{(j)+c(i)}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&1&\cdots&c&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&0&\cdots&1&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\\\begin{array}{ccccc}&(j)&&(i)&\end{array}\end{array}.$$

Bu matris vahid matrisdə i-ci sətri c-yə vuraraq j nömrəli sətirə əlavə etməklə alınır. Məsələn, 4-cü sətri 3-ə vuraraq 2-ci sətrə əlavə etməkdən ibarət olan $\varphi:(2)+3(4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{(2)+3(4)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&3&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Nəhayət, III növ elementar matris i nömrəli sətri sıfırdan fərqli c-yə vurmaqdan ibarət olan $\varphi : c(i)$ çevirməsinə uyğun olan aşağıdakı matrisə deyilir:

$$E_{c(i)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & c & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & (j) & & (i) & \end{array} \end{array}.$$

Bu matris vahid matrisdə i-ci sətri c-yə vurmaqla alınır. Məsələn, 4-cü sətri 3-ə vurmaqdan ibarət olan $\varphi : 3 \times (4)$ çevirməsinə uyğun 5 tərtibli matris belədir.

$$E_{3(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, hər hansı $m \times n$ ölçülü matrisin sətirləri üzərində elementar çevirmələr aparmaq üçün onu soldan uyğun m tərtibli matrisə vurmaq lazımdır.

Məsələn, 5×3 ölçülü matrisin 4-cü sətrini 3-ə vurmaqla 2-ci sətrə əlavə edək:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eyni matrisi soldan $E_{(2)+3(4)}$ elementar matrisinə vurmaqla da almaq olar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) sistemini aşağıdakı kimi matrisli formada yazmaq olar:

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

burada

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

uyğun olaraq dəyişənlərdən və sərbəst hədlərdən ibarət sütun vektorlardır və ya uyğun olaraq, $n \times 1$ və $m \times 1$ ölçülü matrislərdir. Xətti tənliklərin matrisli yazılışından onun aşağıdakı vektor formada yazılışını da almaq olar:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = \overline{b},$$

burada $A_1, A_2, ..., A_n$ A matrisinin sütunlarıdır.

Aşağıdakı xətti tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$$

Sitemin genişlənmiş matrisini yazaq:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Genişlənmiş matrisi elementar çevirmələr vasitəsi ilə pilləli şəklə gətirək. Bunu üçün əvvəlcə birinci və üçüncü sətirlərin yerini dəyişək və sonra isə ikinci növ elementar çevirmələr yerinə yetirək.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \times 3 \downarrow \times(-2) \downarrow;$$

Yuxarıda göstərilən birinci ox işarəsi birinci sətrin 3-ə vurularaq, ikinci sətrə, ikinci ox isə birinci sətrin (-2)-yə vurularaq, 3-cü sətrə əlavə olunduğunu göstərir. Həmin əməliyyatlardan sonra aşağıdakı matris alınır:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -8 & 9 & -10 & -19 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \times 3 \uparrow \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \times(-3) \downarrow \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -15 \end{array}\right).$$

Alınmış matrisə aşağıdakı sistem uyğundur:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ \qquad x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 14, \\ \qquad\qquad 5x_3 - 10x_4 = -15. \end{cases}$$

Sonuncu tənlikdən tapırıq: $x_3 = -3 + 2x_4$. Alınan ifadəni ikinci tənlikdə nəzərə alaraq, tapırıq:

$$x_2 = 14 + 3(-3 + 2x_4) - 5x_4 = 5 + x_4.$$

Nəhayət birinci tənlikdən yaza bilərik:

$$x_1 = -4 + 3(5 + x_4) - 4(-3 + 2x_4) + 3x_4 = 23 - 2x_4.$$

Burada x_4 sərbəst dəyişən olub, ixtiyari həqiqi qiymətləri ala bilər. Beləliklə, biz verilən sistemin bütün həllərini tapmış olduq. Yuxarıda tətbiq olunan üsul, yəni sistemi pilləli şəklə gətirərək, dəyişənlərin ardıcıl yox edilməsi üsulu və ya *Qauss üsulu* adlanır.

I FƏSİLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. İkitərtibli determinantları hesablayın:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ ə) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$

2. Tənlikləri həll edin:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$

3. Bərabərsizlikləri həll edin:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$

c) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$ d) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$

Aşağıdakı iki məhcullu iki xətti tənliklər sistemini həll edin.

4. $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ 2x+7y=81 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 4x-6y=5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3y-4x=1 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1+x_2=4 \\ 2x_1+4x_2=1 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ x+11y=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+0,9y=1 \\ 1,1x+y=-2 \end{cases}$

Aşağıdakı üçtərtibli determinantları hesablayın:

11. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

12. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$

13. a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{tg}\alpha & \mathrm{tg}\beta & \mathrm{tg}\gamma \\ \mathrm{tg}^2\alpha & \mathrm{tg}^2\beta & \mathrm{tg}^2\gamma \end{vmatrix}$

Aşağıdakı tənlikləri həll edin

14. $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 15. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

16. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Aşağıdakı bərabərsizlikləri həll edin

17. $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} < -6$ 18. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

19. $\begin{vmatrix} x & 0 & -3 \\ 0 & x & -4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 100 \le 0$

Aşağıdakı üç məhcullu üç xətti tənliklər sistemini həll edin:

20. $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=5 \\ 6x+3y+3z=10 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x-y+2z=5 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases}$

II FƏSİL. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYA. ONUN LİMİTİ VƏ KƏSİLMƏZLİYİ.

2.1.Həqiqi ədədlər. Həqiqi ədədin mütləq qiyməti

Əgər x ədədini iki tam m və n $(n \neq 0)$ ədədlərinin $x = \dfrac{m}{n}$ nisbəti kimi təsvir etmək mümkün olarsa, ona rasional ədəd deyilir. İstənilən rasional x ədədi sonlu və ya sonsuz dövrü onluq kəsr şəklində göstərilə bilər.

Əgər x ədədini dövrü olmayan sonsuz $x = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ onluq kəsr şəklində göstərmək mümkündürsə, ona irrasional ədəd deyilir (məsələn, $\sqrt{2}, \pi$ və s.). Hər bir irrasional ədədə istənilən verilmiş dəqiqlik dərəcəsi ilə rasional ədədlərlə yaxınlaşmaq olar. Bunun üçün bu ədədin kəsrlərə onluq ayrılışında vergüldən sonra sonlu sayda rəqəm götürmək lazımdır. Buna görə də müxtəlif ölçmələr zamanı praktikada rasional ədədlərə əsaslanırlar. Lakin riyazi proseslərdə irrasional ədədlərsiz keçinmək olmur (məsələn, $S = \pi R^2$ düsturuna irrasional π ədədi daxildir).

Bütün rasional və irrasional ədədlər çoxluğunu həqiqi ədədlər çoxluğu adlandırırlar. Hər bir həqiqi ədədə ədəd oxunun müəyyən nöqtəsi uyğundur.

Həqiqi x ədədinin mütləq qiyməti (və ya modulu) mənfi olmayan və

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{əgər, } x \geq 0, \\ -x, & \text{əgər, } x < 0 \end{cases}$$

münasibəti ilə təyin olunan $|x|$ ədədinə deyilir.

Mütləq qiymətin tərifindən bilavasitə aşağıdakı xassələr alınır:

1^0. $|-x| = |x|$,

2^0. $-|x| \leq x \leq |x|$.

3^0. $|x| \le a$ və $-a \le x \le a$ bərabərsizlikləri eynigüclüdürlər.

4^0. İki həqiqi ədədin cəminin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətləri cəmindən kiçik və ya bərabərdir:

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

5^0. İki həqiqi ədədin fərqinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətləri fərqindən böyük və ya bərabərdir:

$$|x-y| \ge |x| - |y|.$$

6^0. İki həqiqi ədədin hasilinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətləri hasilinə bərabərdir:

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

7^0. İki həqiqi ədədin nisbətinin mütləq qiyməti (əgər bölən sıfırdan fərqlidirsə) həmin ədədlərin mütləq qiymətləri nisbətinə bərabərdir:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$a \le x \le b$ və $a < x < b$ bərabərsizliklərini ödəyən həqiqi x ədədləri çoxluğuna parça (seqment, interval) deyilir və $[a,b]$ və (a,b) kimi işarə edilir. $a \le x < b$ və $a < x \le b$ bərabərsizliklərini ödəyən həqiqi x ədədləri çoxluğuna yarımseqment deyilir və $[a,b),(a,b]$ kimi işarə olunur. $x < a$ $(x \le a)$ və ya $x > b$ $(x \ge b)$ şərtlərini ödəyən həqiqi x ədədləri çoxluğunu uyğun olaraq $(-\infty; a)((-\infty; a])$ və ya $(b; +\infty)$ $((b; +\infty])$ kimi işarə edirlər. Bütün həqiqi x ədədləri çoxluğu $(-\infty; +\infty)$ və ya $|x| < \infty$ və ya R kimi işarə edilir. Göstərilən çoxluqların hamısı aralıqlar adlanır. x_0 nöqtəsini öz daxilinə alan hər bir interval bu nöqtənin ətrafı adlanır. x_0 nöqtəsinin ε ətrafı $(\varepsilon > 0)$ $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ intervalına, başqa sözlə $|x - x_0| < \varepsilon$ şərtini ödəyən x ədədlər çoxluğuna deyilir.

2.2.Funksiya anlayışı. Funksiyanın verilmə üsulları

Texniki proseslərin və təbii hadisələrin öyrənilməsində tədqiqatçılar müxtəlif kəmiyyətlərlə rastlaşırlar. Bu proseslər zamanı kəmiyyətlərdən biri və ya bir neçəsi ədədi qiymətini olduğu kimi saxlayır (bunlar sabitlər adlanır), digərləri isə müxtəlif ədədi qiymətlər alır (bunlar isə dəyişənlər adlanır). Sabit təzyiqdə suyun qaynama temperaturu, düz xətt üzrə müntəzəm hərəkət edən cismin sürəti sabit kəmiyyətlərə misal ola bilər.

Praktiki məsələlərdə hər hansı dəyişən kəmiyyətin dəyişməsi adətən bir və ya bir neçə dəyişən kəmiyyətlərin dəyişməsi ilə bağlı olur. Məsələn, cismin sabit sürətlə getdiyi yol hərəkətə sərf olunan vaxtla düz mütənasibdir: $s = v \cdot t$. Burada s dəyişəninin t dəyişənindən asılılığı ifadə olunmuşdur.

Tərif. x dəyişən kəmiyyətinin ala biləcəyi qiymətlərin hər birinə müəyyən qayda və ya qanunla y dəyişən kəmiyyətinin müəyyən bir qiyməti uyğun qoyulursa, onda deyirlər ki, y, x-dən asılı birqiymətli funksiyadır və $y = f(x)$ kimi işarə edilir.

x dəyişəni asılı olmayan dəyişən və ya arqument adlanır. x arqumentinin bütün qiymətləri külliyatı funksiyanın təyin oblastı, y dəyişəninin aldığı bütün qiymətlər çoxluğu funksiyasının qiymətlər oblastı adlanır.

1. Analitik üsul. Bu üsul funksiyanın düsturların köməyi ilə verilməsidir. Məsələn, $y = 2x$, $y = \sin x$, $y = x^2$. Əgər funksiya y-ə nəzərən həll olunmamış tənlik vasitəsilə verilmişdirsə, onda bu qeyri-aşkar funksiya adlanır. Məsələn, $2x + 4y - 6 = 0$ tənliyinə funksiyanın qeyri-aşkar şəkildə verilməsidir.

2. Cədvəl üsulu. Bu üsulda funksiya cədvəl vasitəsilə verilir. Funksiyanın bu cür verilməsinə triqonometrik funksiyaların, loqarifmlərin və s. cədvəlləri misal ola bilər. Funksiyanın qiymətlərinin hesablanma aparmadan tapılmasında cədvələ müraciət daha sadədir. Cədvəl üsulunun çatışmazlığı ondan ibarətdir ki, burada funksiya arqumentin heç də bütün qiymətləri üçün verilmir.

3. Qrafik üsul. xOy müstəvisinin koordinatları $y = f(x)$ münasibəti ilə bağlı olan (x, y) nöqtələri çoxluğu funksiyasının qrafiki adlanır. $y = f(x)$ bərabərliyinin özü bu qrafikin tənliyi adlanır.

Əgər müstəvidə funksiyanın qrafiki verilmişdirsə, onda deyirlər ki, funksiya qrafik üsulla verilmişdir.

Funksiyanın verilməsinin qrafik üsulunun analitik və cədvəl üsulları ilə müqayisədə üstünlüyü onun əyaniliyindədir.

4. Funksiyanın proqram vasitəsilə verilməsi. Bu üsulla arqumentin verilmiş qiymətinə funksiyanın uyğun qiymətini tapmaq üçün müasir hesablama maşınlarından istifadə olunur. Arqumentin verilmiş qiymətlərinə uyğun funksiya qiymətlərini tapmaq qanunu (yəni, riyazi düstur) proqram şəklində yazılır və hesablama maşınına daxil edilir. Maşın göstərilən proqram əsasında funksiyanın qiymətlərini hesablayır.

2.3.Əsas elementar funksiyalar

1. Tam rasional funksiya.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

şəklində çoxhədli tam rasional funksiya adlanır. Burada, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sabit ədədlərdir və çoxhədlinin əmsalları adlanır; n natural ədəddir və çoxhədlinin dərəcəsi adlanır. Bu funksiya x-in bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur.

2. Kəsr-rasional funksiya. Həmçinin rasional kəsr adlanan bu funksiya iki çoxhədlinin nisbəti kimi təyin olunur:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n}.$$

Bu funksiya x-in məxrəci sıfra çevirən qiymətlərindən başqa bütün qiymətlərdə təyin olunmuşdur. Məsələn, x və y arasında tərs mütənasibliyi ifadə edən $y = \frac{k}{x}$ funksiyası kəsr-rasional funksiyadır. Onun qrafiki bərabərtərəfli hiperboladır.

3. Qüvvət funksiyası. α həqiqi ədəd olduqda $y = x^{\alpha}$ şəklində funksiya qüvvət funksiyası adlanır. Bu funksiya α natural ədəd olduqda x-in bütün qiymətlərində; α tam mənfi ədəd olduqda x-in sıfra bərabər olmayan bütün qiymətlərində; α ixtiyari həqiqi ədəd olduqda bütün $x > 0$ qiymətlərində təyin olunmuşdur.

Əgər q natural ədəddirsə, $\alpha = \frac{1}{q}$ olduqda qüvvət funksiyası $y = \sqrt[q]{x}$ şəklini alar. $y = \sqrt[q]{x}$ funksiyası q cüt olduqda bütün mənfi olmayan x-lər üçün, q tək olduqda bütün x-lər üçün təyin olunmuşdur.

4. Üstlü funksiya. $0 < a \neq 1$ olduqda $y = a^{x}$ şəklində funksiya üstlü funksiya adlanır. Bu funksiya x-in bütün qiymətləri üçün təyin olunmuşdur.

5. Loqarifmik funksiya. $0 < a \neq 1$ olduqda $y = \log_a x$ funksiyası loqarifmik funksiya adlanır. Bu funksiya $x > 0$ qiymətləri üçün təyin olunmuşdur.

6. Tərs funksiya anlayışı. Qüvvət funksiyası və radikal arasında, həmçinin üstlü və loqarifmik funksiyalar arasında tərs funksiya anlayışı vasitəsilə ifadə olunan əlaqə vardır.

Tutaq ki,

$$y = f(x) \qquad (1)$$

asılı olmayan x dəyişəninin funksiyasıdır. Bu o deməkdir ki, x-ə qiymətlər verməklə asılı y dəyişəni üçün qiymətlər təyin etmiş oluruq. Tərsinə hərəkət edək: y-i asılı olmayan, x-i isə asılı olan dəyişən hesab edək. Onda x, y dəyişəninin funksiyası olar ki, buna verilmiş funksiyanın tərsi deyilir.

(1) tənliyinin x-ə nəzərən həll olunması mümkünlüyünü fərz edərək tərs funksiyanın aşkar ifadəsini alarıq:

$$x=\varphi(y) \qquad (2)$$

Aydındır ki, əgər (2) funksiyası (1)-in tərsidirsə, onda (1) funksiyası da (2) funksiyasına nəzərən tərs funksiya olar. Bunlar qarşılıqlı tərs funksiyalar adlanırlar.

7. Triqonometrik funksiyalar. $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyaları bütün x-lər üçün təyin olunmuşdurlar. Onlar 2π periodlu periodik funksiyalardır. Bundan əlavə, $\sin x$ tək, $\cos x$ cüt funksiyadır, yəni $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$.

$y=\operatorname{tg} x$ funksiyası $\cos x=0$ nöqtələrindən başqa, yəni $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələrindən başqa bütün nöqtələrdə təyin olunmuşdur. $y=\operatorname{ctg} x$ funksiyası isə $\sin x=0$ və ya $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələrindən başqa bütün nöqtələrdə təyin olunmuşdur. Periodları π olan $y=\operatorname{tg} x$ və $y=\operatorname{ctg} x$ funksiyaları da təkdirlər.

8. Tərs triqonometrik funksiyalar. $y=\arcsin x$ funksiyası. Burada y dəyişəni $|y|\le\dfrac{\pi}{2}$ seqmentindəndir və onun sinusu x-ə bərabərdir: $x=\sin y$. Bu funksiyanın təyin oblastı $|x|\le 1$ seqmentidir.

$y=\arccos x$ funksiyası o deməkdir ki, $x=\cos y$ və $|x|\le1$ və $0\le y\le\pi$.

$y=\operatorname{arctg} x$ funksiyası tangensi x-ə bərabər olan dəyişəndir. $x=\operatorname{tg} y$ və $|y|<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\operatorname{arcctg} x$ funksiyası isə kotangensi x-ə bərabər olan dəyişəndir. $x=\operatorname{ctg} y$ və $0<y<\pi$.

9. Mürəkkəb funksiya. Tutaq ki, z dəyişəni y dəyişənindən və bu da öz növbəsində x dəyişənindən asılıdır, yəni, $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$. Onda $y = f[\varphi(x)]$ şəklində mürəkkəb funksiya alarıq. Buna funksiyanın funksiyası və ya funksiyalarının superpozisiyası da deyilir.

İkidən artıq funksiyaların da superpozisiyasından danışmaq olar.

Qüvvət, üstlü, loqarifmik, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalar, həmçinin sabit funksiya (konstant) əsas elementar funksiyalar adlanır.

2.4.Ədədi ardıcıllığın limiti

Bütün natural ədədlərin $1,2,...,n,...$ çoxluğunda təyin olunmuş $x_n = f(n)$ funksiyası sonsuz ədədi ardıcıllıq (və ya ardıcıllıq) adlanır. $x_1, x_2, ..., x_n, ..$ ardıcıllığının qiymətləri onun hədləri adlanır.

$x_n = f(n)$ ardıcıllığını bəzən $\{x_n\}$ kimi işarə edirlər. Bu o deməkdir ki, ümumi həddi a_n olan ardıcıllıq verilmişdir. Məsələn, $\{n+1\}$; $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$.

Əgər istənilən n nömrəsi üçün

$$x_n \geq x_{n+1} \quad (x_n \leq x_{n+1})$$

bərabərsizliyi doğru olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına artmayan (azalmayan) ardıcıllıq deyilir.

Əgər $x_n > x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı azalan (artan) olur.

Əgər istənilən n nömərəsi üçün $x_n \leq M$ $(x_n \geq M)$ şərtini ödəyən M ədədi olarsa, onda $\{x_n\}$ yuxarıdan (aşağıdan) məhdud ardıcıllıq adlanır.

Tərif. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə ε-dan asılı elə $N = N(\varepsilon)$ nömrəsi göstərmək olursa ki, $n > N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ olur. Onda a ədədinə $\{x_n\}$ ədədi ardıcıllğının limiti deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ və ya } n \to \infty \text{ olduqda, } a_n \to a.$$

Ardıcıllıqların limitlərinin xassələrini isbatsız ifadə edək.

1^0. Yığılan ardıcıllıq ancaq bir limitə malik ola bilər.

2^0. İstənilən azalmayan (artmayan) və yuxarıdan (aşağıdan) məhdud ədədi ardıcıllığın limiti var.

1.5. e ədədi. Natural loqarifm

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \tag{1}$$

ədədi ardıcıllığına baxaq.

Bu ardıcıllığın limitinin varlığını isbat etmək üçün əvvəlcə göstərək ki, bu ardıcıllıq artandır. Ardıcıllığın ümumi $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ həddini Nyuton binomu düsturuna görə ayrılışını yazaq:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^n}$$

və ya

$$x_n = 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2}$$

(2) bərabərliyindən görünür ki, n nömrəsi artdıqca birincidən başqa hər bir toplanan böyüyür və bu cür topla-

nanın sayı artır. Buna görə də istənilən n üçün $x_n < x_{n+1}$ olur ki, bu da tərifə görə ardıcıllığın artan olması deməkdir.

İndi göstərək ki, (1) ardıcıllığı yuxarıdan məhduddur. (2) ayrılışındakı bütün hədlərdə dairəvi mötərizələrdəki ifadələri vahidlə əvəz edək. Onda

$$x_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Məxrəcdə $3,4,\ldots,n$ vuruqlarının yerinə 2 ədədini yazsaq, sağ tərəfi daha da böyütmüş oluruq:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Digər tərəfdən həndəsi silsilənin hədləri cəmi düsturuna görə

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

olar. Buna görə də istənilən n üçün $x_n < 3$ olar.

(1) ardıcıllığı artan və yuxarıdan məhdud ardıcıllıq kimi limitə malikdir. Yəni

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (3)$$

Buna bəzən görkəmli limit də deyirlər. e ədədi irrasionaldır və təqribən $e \approx 2,718282...$ kimi götürülür.

Əsası e ədədi olan loqarifm natural loqarifm adlanır. N ədədinin natural loqarifminin işarələnməsi üçün $\ln N$ simvolundan istifadə edirlər.

Natural loqarifmlərin təqribi qiymətlərinin onluq loqarifmlər cədvəlinə görə tapılması üçün natural və onluq loqarifmlər arasında əlaqəni tapmaq lazımdır.

Əgər $\ln N = a$ olarsa, onda $N = e^a$ və axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini 10 əsasına görə loqarifmləsək $\lg N = a\lg e$

$(\lg e = 0,4343)$ və ya $\lg N = \ln N \lg e$ və buradan

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}$$

$$\left(\frac{1}{\lg e} = 2,3026\right)$$

olar.

2.6.Funksiyanın limiti

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $x = a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunub (a nöqtəsinin özü istisna oluna bilər).

Tərif 1. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə $\delta > 0$ ədədi göstərmək olur ki, $|x - a| < \delta$ şətini ödəyən bütün $x \neq a$ qiymətləri üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə $f(x)$ funksiyasının $x \to a$ şərtində (və ya $x = a$ nöqtəsində) limiti deyilir. Bu belə işarə edilir:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ və ya $x \to a$ olanda $f(x) \to A$.

Buradan çıxır ki, əgər A ədədi $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində limitidirsə, onda a-ya kifayət qədər yaxın və ondan fərqli bütün x-lər üçün $f(x)$ funksiyasının onlara uyğun qiymətləri A ədədinə kifayət qədər yaxın olar.

Əgər (3) düsturunda $\frac{1}{n} = z$ olduğunu fərz etsək, onda o

$$e = \lim_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} \tag{4}$$

şəklini olar.

Tərif 2. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə elə müsbət N ədədi göstərmək olur ki, $|x| > N$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda

A ədədinə $f(x)$ funksiyasının x sonsuzluğa yaxınlaşdıqda (və ya sonsuzluqda) limiti deyilir. Bunu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ kimi yazırlar.

Həmçinin, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ və $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ limitlərinə də baxılır. $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ şərtində $f(x)$ funksiyasının limiti $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ limitinə analoji olaraq təyin olunur. Bu halda $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tərifinin ifadəsində $|x|>N$ şərtini $x>N$ və $x<-N$ ilə əvəz etmək lazımdır.

2.7.Sonsuz kiçik və sonsuz böyük kəmiyyətlər

Funksiyaların limitlərinin xassələrini öyrəndikdə arqumentin hər hansı nöqtəyə yaxınlaşmasında limiti sıfra yaxınlaşan funksiyalar xüsusi rol oynayırlar. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti sıfra bərabər olarsa, ona sonsuz kiçik ardıcıllıq deyilir: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Məsələn, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$.

Tərif. Əgər $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ olarsa, $\alpha(x)$ funksiyasına $x\to a$ şərtində sonsuz kiçik funksiya deyilir. Başqa sözlə, funksiya limitinin tərifinə əsasən, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta>0$ ədədi var ki, $0<|x-a|<\delta$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|\alpha(x)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Məsələn, $x\to1$ olduqda $y=x^2-1$ funksiyası sonsuz kiçikdir.

Sonsuz kiçik funksiyaların əsas xassələrini öyrənək. Bu xassələr sonsuz kiçik ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.

1^0. Əgər $\alpha_1(x)$ və $\alpha_2(x)$ funksiyaları sonsuz kiçikdirsə, onda $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ funksiyası da sonsuz kiçik olar.

2^0. $x\to a$ olduqda məhdud olan funksiya ilə sonsuz kiçik funksiyanın hasili sonsuz kiçik funksiyadır.

3^0. Sabitin sonsuz kiçik funksiyaya hasili sonsuz kiçik funksiyadır.

4^0. İki sonsuz kiçik funksiyanın hasili sonsuz kiçik funksiyadır.

Tutaq ki, istənilən müsbət M ədədi üçün elə natural N ədədi göstərmək olur ki, $n > N$ şərtini ödəyən istənilən n üçün $|x_n| > M$ olur. Onda $\{x_n\}$ ədədi ardıcıllığına sonsuz böyük ardıcıllıq deyilir. Bunu $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ kimi yazırlar.

$\{n\}, \{(-1)^n n\}$ ardıcıllıqları sonsuz böyük ardıcıllıqlardır.

Sonsuz böyük ardıcıllıq anlayışını ixtiyari funksiyalar üçün də vermək olar.

Tutaq ki, istənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi göstərmək olur ki, $0 < |x - a| < \delta$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x)| > M$ olur. Onda $f(x)$ funksiyasına $x \to a$ olduqda sonsuz böyük funksiya deyilir. Bu $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ kimi işarə edilir.

Əgər bu halda $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin ətrafında müsbətdirsə (mənfidirsə), onda bunu

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty)$$

kimi yazırlar.

Aşağıda $x \to a$ olduqda sonsuz böyük funksiyalara baxılır. Ardıcıllıqlar üçün də doğru olan aşağıdakı xassələrdən göründüyü kimi sonsuz böyük və sonsuz kiçik funksiyalar bir-biri ilə sıx bağlıdırlar.

1^0. Əgər $f(x)$ funksiyası sonsuz böyükdürsə, onda $\frac{1}{f(x)}$ sonsuz kiçikdir.

2^0. Əgər $\alpha(x)$ funksiyası sonsuz kiçikdirsə və sıfra çevrilmirsə, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ - sonsuz böyükdür.

2.8.Funksiya limitinin xassələri

Qeyd edək ki, limitin xassələri arqumenti x olan funksiyalara baxılır. Bu halda x, ya a-ya yaxınlaşır ($x \to a$), ya da sonsuzluğa ($x \to \infty$) yaxınlaşır. Burada limitlər haqqında müəyyən olunan təkliflərin hamısı hər iki hal üçün, həmçinin ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.

1^0. A ədədinin $f(x)$ funksiyasının $x \to a$ olduqda limiti olması üçün zəruri və kafi şərt bu funksiyanın

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

şəklində göstərilməsidir. Burada $\alpha(x)$ sonsuz kiçik funksiyadır.

İsbatı. 1) Tutaq ki, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$ Bu o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, $0 < |x-a| < \delta$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir, yəni, $\alpha(x) = f(x) - A$ funksiyası sonsuz kiçikdir və buradan $f(x) = A + \alpha(x)$.

2) Tutaq ki, $\alpha(x)$ sonsuz kiçik olduqda $f(x) = A + \alpha(x)$ olur. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $0 < |x-a| < \delta$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$ olur, yəni, $x \to a$ olduqda $f(x)$-in limiti A olur.

2^0. Sabit kəmiyyətin limiti sabitin özünə bərabərdir.

Bu təklif bilavasitə limitin tərifindən alınır.

3^0. Əgər a nöqtəsinin müəyyən ətrafındakı bütün x nöqtələri üçün (a nöqtəsinin özü müstəsna oluna bilər)

$f(x)\geq 0$ $(f(x)\leq 0)$ şərti ödənilirsə və a nöqtəsində bu funksiyanın limiti varsa, onda

$$\lim_{x\to a} f(x)\geq 0 \quad (\lim_{x\to a} f(x)\leq 0).$$

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)\geq 0$ və $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Əgər $A<0$ olsaydı, onda $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$ üçün $0<|x-a|<\delta$ olduqda $|f(x)-A|<\varepsilon$ bərabərsizliyi heç bir $\delta>0$ üçün mümkün olmazdı. Belə ki, bu halda $f(x)$-in mənfi olması alınardı.

Qeyd edək ki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limitinin varlığı şərtində $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ olmasından ümumiyyətlə $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x)<0)$ olması çıxmır. Bu halda $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq 0)$ da ola bilər. Belə ki, bütün $x\neq 0$ üçün $|x|>0$ olmasına baxmayaraq $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$

4⁰. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $x\to a$ olduqda limitə malikdirsə, onda onların cəminin, hasilinin və nisbətinin limiti var və

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x), \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x), \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \ (g(x)\neq 0). \qquad (3)$$

İsbatı. (1)-in doğruluğunu isbat etməklə kifayətlənək. Yerdə qalan bütün hallar analoji olaraq isbat olunur.

Tutaq ki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B.$ Onda 1^0-a əsasən

$$f(x)=A+\alpha(x), \ \ g(x)=B+\beta(x)$$

olduğunu yaza bilərik. Burada $\alpha(x)$ və $\beta(x)$ sonsuz kiçik funksiyalardır. Buradan

$$f(x)+g(x)=(A+B)+(\alpha(x)+\beta(x)).$$

sonsuz kiçik funksiyaların 1-ci xassəsinə görə $\alpha(x)+\beta(x)$ cəmi sonsuz kiçik funksiya olar. Buradan

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=A+B\ .$$

Qeyd edək ki, (1) düsturu istənilən sonlu sayda toplananların cəbri cəmi, (2) düsturu isə istənilən sonlu sayda vuruğu olan hasil üçün də doğrudur.

Nəticə 1. Əgər $f(x)$ funksiyası $x\to a$ olduqda limitə malikdirsə, onda

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n$$

olar. Burada n natural ədəddir.

Nəticə 2. Sabit vuruğu limit işarəsinin xaricinə çıxarmaq olar:

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x);\ \ c=const.$$

5⁰. Əgər a nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsi istisna oluna bilər) $f(x)$, $g(x)$ və $h(x)$ funksiyaları üçün

$$g(x)\le f(x)\le h(x) \qquad (4)$$

bərabərsizliyi ödənilirsə və $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A$ olarsa, onda $\lim_{x\to a}f(x)=A$.

İsbatı. Limitin tərifindən çıxır ki, a nöqtəsinin müəyyən ətrafında $(x\ne a)$ eyni zamanda

$$\left|g(x)-A\right|<\varepsilon,\ \ \left|h(x)-A\right|<\varepsilon$$

bərabərsizlikləri ödənilir. Burada ε istənilən müsbət ədəddir. Mütləq qiymətin xassəsindən istifadə edərək bu bərabərsizlikləri

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon, \qquad (5)$$

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon \qquad (6)$$

şəklində yazaq. (4) və (5) bərabərsizliklərindən

$$A-\varepsilon < g(x) < f(x)$$

və ya

$$A-\varepsilon < f(x) \qquad (7)$$

olduğunu alarıq. Analoji olaraq (4) və (6) bərabərsizliklərindən

$$y = f(x) \qquad (8)$$

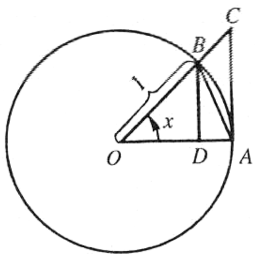
olduğunu alarıq.

(7) və (8)-dən $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$ və ya $|f(x)-A| < < \varepsilon$ olduğu alınır, yəni, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

2.9.Birinci görkəmli limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (1)$$

bərabərliyi doğrudur. (1) bərabərliyi birinci görkəmli limit adlanır. Onun köməyi ilə triqonometrik funksiyalar və x-in dərəcələri daxil olan müxtəlif funksiyaların limitlərini hesablamaq olar.



Şəkil 1.

(1) bərabərliyini isbat edək. Vahid radiuslu dairə götürək və fərz edək ki, radianla ifadə olunan x bucağı $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalındandır (şəkil 1).

OAB və *OAC* üçbucaqlarının sahələrini uyğun olaraq S_1 və S_2 ilə, *OAB* sektorunun sahəsini isə S ilə işarə edək. Şəkil 1-dən görünür ki,

$$S_1 < S < S_2. \qquad (2)$$

Qeyd edək ki, $|BD| = \sin x, |AC| = \operatorname{tg} x$-dir, onda $S_1 = \frac{1}{2}\sin x$,

$S_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ olar. Buna görə də (2)-i nəzərə almaqa

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

olduğunu alarıq ki, buradan da $\sin x$-ə bölmək və $\frac{1}{2}$-ə ixtisar etməklə

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ və ya } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (3)$$

alınar. (3) bərabərsizlikləri $0 < x < \frac{\pi}{2}$ üçün alınmışdır. Lakin $\cos x$ və $\frac{\sin x}{x}$ cüt funksiyalardır. $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Bununla da (3) bərabərsizlikləri $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ intervalında da doğrudur.

Belə ki, (3)-də limitə keçsək və $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ olduğunu nəzərə olsaq (1) bərabərliyinin doğruluğunu alarıq.

2.10.Funksiyanın kəsilməzliyi. Parçada kəsilməz funksiyanın xassələri

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı intervalda təyin olunmuş, x_0 və x arqumentin bu intervaldan olan iki ixtiyari qiymətləridir. $x - x_0 = \Delta x$ işarə edək və buradan $x = x_0 + \Delta x$. Deyirlər ki, arqumentin x_0 qiymətindən x qiymətinə keçmək üçün ilkin qiymətə Δx artımı verilmişdir.

$y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində x arqumentinin Δx artımına uyğun olan Δy artımı

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

fərqinə deyirlər.

Tərif 1. Əgər x_0 nöqtəsində x arqumentinin sonsuz kiçik Δx artımına funksiyanın sonsuz kiçik Δy artımı uyğundursa, yəni,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

bərabərliyi doğru olursa, onda $y=f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Başqa sözlə, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bərabərliyi doğru olursa, yəni x_0 nöqtəsində funksiyanın limiti funksiyanın bu nöqtədəki qiymətinə bərabərdirsə, onda $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

Teorem 1. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları x_0 nöqtəsində kəsilməzdirlərsə, onda onların $f(x)\pm g(x)$ cəbri cəmi, $f(x)\cdot g(x)$ hasili və $g(x)\neq 0$ şərtində $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbəti də bu nöqtədə kəsilməz olar.

Qeyd edək ki, **c**əbri cəm və hasil üçün teorem 1 istənilən sonlu sayda funksiyalar halında da doğrudur.

Teorem 2. Əgər $y=\varphi(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdirsə, $z=f(y)$ funksiyası isə $y_0=\varphi(x_0)$ nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $z=f[\varphi(x)]$ mürəkkəb funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz olar.

İsbatı. $y=\varphi(x)$ funksiyasının kəsilməzliyinə əsasən $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, yəni, $x\to x_0$ olduqda $y\to y_0$ olur.

Buna görə də $f(y)$ funksiyasının y_0 nöqtəsində kəsilməzliyinə görə

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(y) = f(y_0) = f[\varphi(x_0)]$$

olar ki, bu da teoremin hökmünün doğru olduğunu göstərir.

Beləliklə, iki kəsilməz $f(y)$ və $\varphi(x)$ funksiyalarından düzəldilmiş $z = f[\varphi(x)]$ mürəkkəb funksiyası da kəsilməz olur.

Teorem 3. Əgər birqiymətli tərs funksiyası olan $f(x)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda tərsi onun funksiyası da kəsilməzdir.

Teorem 4. Əsas elementar funksiyaların hamısı təyin olunduqları çoxluqda kəsilməzdirlər.

İsbatı. Sabit $y = c$ funksiyası istənilən $x = x_0$ qiymətində kəsilməzdir, belə ki, $\Delta y = c - c = 0$ və buna görə də $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$y = x$ funksiyası istənilən x üçün kəsilməz olduğundan, onda teorem 1-ə əsasən $y = x^n$ (n-natural ədəddir) qüvvət funksiyası da istənilən x üçün kəsilməz olar.

Triqonometrik $\sin x$ və $\cos x$ funksiyaları hər yerdə kəsilməzdir; $\mathrm{tg}\, x$ və $\mathrm{ctg}\, x$ funksiyaları iki kəsilməz $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarının nisbəti kimi təyin olunduğu bütün nöqtələrdə kəsilməz olarlar.

Digər əsas elmentar funksiyaların da təyin olunduğu bütün nöqtələrdə kəsilməz olduğunu isbat etmək olar.

Nəticə. Hər bir elementar funksiya özünün təyin olunduğu çoxluğa daxil olan istənilən nöqtədə kəsilməzdir.

Teorem 5. x_0 nöqtəsində sıfra bərabər olmayan kəsilməz $f(x)$ funksiyası bu nöqtənin müəyyən ətrafında $f(x_0)$-ın işarəsini saxlayır.

Əgər $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz deyilsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsiləndir və x_0-a $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsi deyilir.

Tərif 2. x arqumentinin x_0 qiymətinə həmişə x_0 - dan kiçik (böyük) qalaraq yaxınlaşma şərtində hesablanan limitə $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sol (sağ) limiti deyilir. Sol və sağ limitlər birtərəfli limitlər adlanır və uyğun olaraq

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ və ya } f(x_0-0), \lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ və ya } f(x_0+0)$$

kimi işarə olunur.

Əgər $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$ bərabərliyi ödənərsə, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində soldan (sağdan) kəsilməz funksiya deyilir.

İndi isə parçada kəsilməz funksiyanın xassələrini göstərək. Əgər $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında, yəni (a,b) intervalının bütün nöqtələrində kəsilməzdirsə və bundan əlavə a nöqtəsində sağdan, b nöqtəsində soldan kəsilməzdirsə, belə funksiyaya $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiya deyilir.

1^0. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və onun uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda a və b nöqtələri arasında elə c nöqtəsi tapılacaq ki, $f(c)=0$ olar.

2^0. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və $f(a)=A$ və $f(b)=B$. Tutaq ki, C ədədi A və B arasında olan istənilən ədəddir. Onda $[a,b]$ parçasında elə ξ nöqtəsi tapılacaq ki, $f(\xi)=C$ olar.

3^0. Əgər $f(x)$, $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda bu funksiya həmin parçada məhduddur, yəni elə müsbət M ədədi var ki, $a \le x \le b$ olduqda $|f(x)| \le M$ olur.

4^0. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda bu parçada elə x_1 və x_2 nöqtələri tapılar ki, funksiyanın $f(x_1)$ və $f(x_2)$ qiymətləri onun bu parçadakı qiymətləri içərisində uyğun olaraq ən böyük və ən kiçik qiymətləri olar.

II FƏSİLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+3}$ verilmişdir. $f(1)$-i tapın.

2. $f(x)=\cos 2x$ olduqda $f(0); f\left(\dfrac{\pi}{2}\right); f\left(\dfrac{\pi}{4}\right); f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ qiymətlərini tapın.

3. $f(x)=3x^2-x+2$ verilmişdir. $f(2), f(3)$ qiymətlərini tapın.

Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastlarını tapın

4. $y=\sqrt{x+1}$

5. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$

6. $y=\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{5-x}$

7. $y=x\arcsin x$

8. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$

9. $y=\dfrac{x}{x+1}$

10. $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

11. $y=\sqrt[4]{2-4}$

12. $y=\sqrt{2-x-x^2}$

13. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$

15. $y=\sqrt{x^2(x-2)}$

Aşağıdakı funksiyaların qarfiklərini qurun

16. $y=\dfrac{5}{x}$

17. $y=x^3+1$

18. $y=\sin 2x$

19. $y=5\cos x$

20. Aşağıdakı funksiyaların tək və cüt olduğunu göstərin:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$

b) $f(x)=2x^2-1$

c) $f(x)=-5x^3$

d) $f(x)=1-x^3$

e) $f(x) = x^5 - \frac{1}{x}$

ə) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

21. Funksiyaların periodik olub olmadığını müəyyənləşdirin və ən kiçik periodunu tapın

a) $y = 2\sin 3x + 3\sin 2x$

b) $y = \sin t + \cos 2t$

c) $y = \sin 3x$

d) $y = 6\cos\frac{3\pi x}{4}$

e) $y = \mathrm{tg}(3x+5)$

ə) $y = \sin 4x + 5\cos 6x$

Aşağıdakı limitləri hesablayın

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3 - n + 1}{2n^3 + n^2}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3 + n - 1}{n^4 + 2n}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{3x^4 - 5x^2 + 1}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

30. $\lim\limits_{x\to 4}\left[2(x+3) - \frac{x}{x-2}\right]$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$

32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x)$

34. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{2}\cdot 3x\right]$

35. $\lim\limits_{x\to 3}5\cdot\frac{x^2}{3}$

36. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2}{1+x}$

37. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2)^2$

38. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x}$

39. $\lim\limits_{x\to 3}\left[2^{\sqrt{3x}}\right]$

40. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}}$

41. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos 2x - 2\cos x}{2\cos x - 2}$

42. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini təyin edin.

43. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \geq 1, \\ x, & x < 1. \end{cases}$

44. $f(x) = x + 1$

45. $f(x) = x^2$

46. $f(x) = \dfrac{x}{x - 4}$

47. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

48. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$

50. $f(x) = \operatorname{tg} x$

III FƏSİL. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN DİFERENSİAL HESABI.

3.1.Törəmə anlayışı və onun həndəsi mənası. Törəmənin tərifi

1. Hərəkət edən nöqtənin sürəti haqqında məsələ. Tutaq ki, maddi nöqtənin düzxətli hərəkət qanunu $s = s(t)$ kimi təsvir olunur. Bu tənlik nöqtənin getdiyi s yolunu t zamanının funksiyası kimi ifadə edir. Zamanın t anından $t+\Delta t$ anına kimi olan Δt zaman aralığında nöqtənin getdiyi yolu Δs ilə işarə edək, yəni $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbəti t zamanından $t+\Delta t$ zamanı arasında olan vaxtda nöqtənin orta sürəti adlanır. t-dən $t+\Delta t$ zaman aralığı, yəni Δt nə qədər kiçik olsa t anında orta sürət nöqtənin hərəkətini daha yaxşı xarakterizə edər. Buna görə də, verilmiş t anında sürət anlayışını vermək təbii olardı. Bunun üçün onu $\Delta t \to 0$ şərtində t-dən $t+\Delta t$-yə qədər zaman aralığındakı orta sürətin limiti kimi təyin edək.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

υ kəmiyyəti nöqtənin verilmiş t anında ani sürəti adlanır.

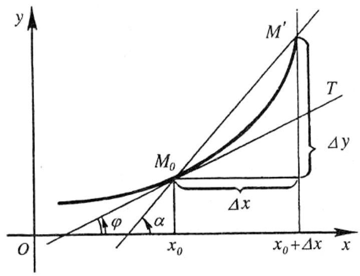
2. Elektrik cərəyanının gücü haqqında məsələ. Tutaq ki, t zamanında naqilin en kəsiyindən axan elektrik miqdarı $Q = Q(t)$ kimidir; elektrik miqdarı zamanın funksiyasıdır. Belə ki, zamanın hər bir t qiymətinə elektrik miqdarının müəyyən qiyməti uyğundur. Zamanın keçməsi ilə elektrik miqdarının dəyişmə sürətini müəyyən etmək üçün cərəyanın gücü anlayışından istifadə edirlər. t anından $t+\Delta t$ anına qədər Δt zaman aralığında göstərilən kəsikdən keçən elektrik miqdarını ΔQ ilə işarə edək. $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ nisbəti t-dən $t+\Delta t$-yə qədər olan zamanda cərəyanın orta gücü adlanır və J_{or} kimi işarə olunur. Sabit cərəyan halında J_{or} sabit olar. Əgər dövrədə dəyişən cərəyandırsa, onda müxtəlif zaman aralığı üçün J_{or} müxtəlif olar. Buna görə də, dəyişən cərəyanlı dövrə üçün verilmiş t anında cərəyanın J gücü anlayışı verilir. Bunun üçün onu, $\Delta t \to 0$ şərtində t-dən $t+\Delta t$-yə qədər zaman aralığındakı cərəyanın orta gücünün limiti kimi təyin edək:

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Düzxətli hərəkətin sürəti haqqında məsələyə analoji olaraq kimyəvi reaksiyanın sürəti haqqında məsələyə baxılır.

3. Kimyəvi reaksiyanın sürəti haqqında məsələ. Tutaq ki, $m = m(t)$ funksiyası verilmişdir. Burada m, t zamanı anına qədər kimyəvi reaksiyaya daxil olan hər hansı maddənin miqdarıdır. Zamanın Δt artımına m kəmiyyətinin Δm artımı uyğun gələcəkdir. $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ nisbəti Δt zaman aralığında kimyəvi reaksiyanın orta sürətidir. Δt sıfra yaxınlaşdıqda bu nisbətin limiti, yəni $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ limiti t zamanının verilmiş anında kimyəvi reaksiyanın sürəti olar.

4. Verilmiş əyriyə toxunan haqqında məsələ. Tutaq ki, xOy müstəvisində əyri $y = f(x)$ tənliyi ilə verilmişdir. Bu əyriyə verilmiş $M_0(x_0, f(x_0))$ nöqtəsində toxunan keçirmək lazımdır. Belə ki, M_0 toxunma nöqtəsi verilmişdir. Onda məsələnin həlli üçün axtarılan toxunanın bucaq əmsalını, yəni Ox oxundan



Şəkil 2.

müsbət istiqamətdə toxunanın meyl bucağının tangensini tapmaq tələb olunur (şəkil 2).

$M_0(x_0, f(x_0))$ və $M'(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nöqtələrindən M_0M' kəsənini keçirək. Şəkil 2-dən görünür ki, M_0M' kəsəninin $\operatorname{tg}\alpha$ bucaq əmsalı

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nisbətinə bərabərdir. Burada

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Verilmiş əyriyə M_0 nöqtəsində M_0T toxunanının bucaq əmsalı aşağıdakı tərif əsasında tapıla bilər: M_0 nöqtəsində əyriyə toxunan elə M_0T düz xəttinə deyilir ki, onun bucaq əmsalı $\Delta x \to 0$ şərtində M_0M' kəsəninin bucaq əmsalının limiti kimi təyin olunsun . Buradan alınır ki,

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

İndi törəmənin tərifini verək.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında təyin olunmuşdur. (a,b)-dən hər hansı x qiymətini götürək. İlkin x qiymətinə Δx artımı verərək (müsbət və ya mənfi) bu aralıqdan yeni $x + \Delta x$ qiymətini götürək. Arqumentin bu yeni qiymətinə funksiyanın da yeni $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiyməti uyğun olar, burada

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

İndi Δx artımına bölək:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bu Δx -dən asılı funksiyadır.

Əgər Δx sıfra yaxınlaşdıqda funksiya artımının arqument artımına olan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbətinin limiti varsa, onda bu limit $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi adlanır və y' və ya $f'(x)$ kimi işarə edilir:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Törəməni işarə etmək üçün həmçinin $\dfrac{dy}{dx}$ simvolundan da istifadə etmək qəbul olunmuşdur.

Əgər sağ $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti (və ya sol $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti) varsa, onda bu limit $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində sağ (və ya sol) törəməsi adlanır.

Funksiyanın törəməsinin tapılması əməli onun diferensiallanması adlanır və x nöqtəsində törəməsi olan funksiya bu nöqtədə diferensiallanan funksiya adlanır.

Məsələn, $y = x$ funksiyasının törəməsini tapaq. Burada

$$y + \Delta y = x + \Delta x,\ \Delta y = \Delta x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

yəni $y' = 1$.

Teorem. Əgər $y = f(x)$ funksiyası hər hansı x nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda həmin funksiya bu nöqtədə kəsilməzdir.

İsbatı. (1) düsturuna əsasən

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x)$$

olduğunu yaza bilərik, burada $\alpha(\Delta x)$ sonsuz kiçikdir. Buradan $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ və $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, yəni $y = f(x)$ funksiyası verilmiş x nöqtəsində kəsilməzdir.

3.2.Elementar funksiyaların törəmələri. Diferensiallama qaydaları

Tutaq ki, u və υ , x arqumentinin funksiyaları-dır və uyğun olaraq u' və υ' törəmələrinə malikdirlər.

Cəmin törəməsi. Tutaq ki, $y = u + \upsilon$. Onda alarıq ki,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (\upsilon + \Delta \upsilon),$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta \upsilon, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x},$$

yəni

$$y' = u' + \upsilon',$$

və ya

$$(u + \upsilon)' = u' + \upsilon'.$$

Qeyd edək ki, iki toplananın cəminin diferensiallanması qaydası istənilən sonlu sayda toplananın cəbri cəmi halında da doğrudur.

Hasilin törəməsi. Tutaq ki, $y = u\upsilon$. Onda alarıq ki,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(\upsilon + \Delta \upsilon) = u\upsilon + \upsilon\Delta u + u\Delta \upsilon + \Delta u \cdot \Delta \upsilon,$$

$$\Delta y = \upsilon\Delta u + u\Delta \upsilon + \Delta u \cdot \Delta \upsilon, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\upsilon + \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta \upsilon$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \upsilon \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta \upsilon =$$

$$= \upsilon u' + u\upsilon' + u' \cdot 0.$$

Burada υ funksiyasının kəsilməzliyindən (kəsilməzlik funksiyanın diferensiallanan olmasından alınır) istifadə edilərək

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta \upsilon = 0$$

olduğu yazılmışdır. Beləliklə,

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon' \quad \text{və ya} \quad (u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'. \qquad (1)$$

Sabit vuruğun törəmə işarəsindən kənara çıxarılması.

Belə ki, $(c)'=0$, onda (1) düsturundan bilavasitə alarıq ki,

$$(cu)'=cu'.$$

Nisbətin törəməsi. Tutaq ki, $y=\frac{u}{\upsilon}$, burada $\upsilon\neq 0$. Onda alarıq ki,

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{\upsilon+\Delta\upsilon},\ \ \Delta y=\frac{u+\Delta u}{\upsilon+\Delta\upsilon}-\frac{u}{\upsilon}=$$

$$=\frac{(u+\Delta u)\upsilon-u(\upsilon+\Delta\upsilon)}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon}=\frac{\upsilon\Delta u-u\Delta\upsilon}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\upsilon-u\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{(\upsilon+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\upsilon)\upsilon}=\frac{\upsilon u'-u\upsilon'}{(\upsilon+0)\upsilon},$$

yəni

$$y'=\frac{\upsilon u'-u\upsilon'}{\upsilon^2}\ \text{ və ya }\ \left(\frac{u}{\upsilon}\right)'=\frac{u'\upsilon-u\upsilon'}{\upsilon^2}.$$

Mürəkkəb funksiyanın törəməsi. Tutaq ki, $y=\varphi(x)$ olduqda $z=f(y)$ olur və həm də $f(y)$-nun y-ə görə, $\varphi(x)$-in isə x-ə görə törəmələri var. Onda z, x-in mürəkkəb funksiyası olar ki, burada z-in x-ə görə törəməsnin tapılması tələb olunur. Alarıq ki, $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$ və buradan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

və ya

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Tərs funksiyanın törəməsi. Tutaq ki, $y=f(x)$ və $x=\varphi(y)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır. Əgər $y=f(x)$ funk-siyası sıfırdan fərqli $f'(x)$ törəməsinə malikdirsə, onda tərs funksiya da $\varphi'(y)$ törəməsinə malik olar və

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \text{ və ya } x'_y=\frac{1}{y'_x}. \qquad (3)$$

Doğrudan da, $y=f(x)$ və $x=\varphi(y)$ qarşılıqlı tərs funksiyalar olduğundan $x=\varphi\left[f(x)\right]$ olar. Buradan, mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması üçün (2) düsturundan istifadə etsək alarıq ki,

$$1=\varphi'(y)\cdot f'(x)$$

və buradan da axtarılan (3) düsturu alınar.

Əsas elementar funksiyaların törəmələrini aşa-ğıdakı cədvəldə göstərək.

1. $(c)'=0$
2. $(u+\upsilon)'=u'+\upsilon'$
3. $(u\upsilon)'=u'\upsilon+u\upsilon'$
4. $(cu)'=cu'$
5. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)'=\dfrac{u'\upsilon-u\upsilon'}{\upsilon^2}$
6. $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$
7. $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$
8. $(a^u)'=a^u u'\ln a$
9. $(e^u)'=e^u u'$
10. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$
11. $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
12. $(\sin u)'=u'\cos u$
13. $(\cos u)'=-u'\sin u$
14. $(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
15. $(\mathrm{ctg}\,u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
16. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
18. $(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

19. $(\text{arcctg}u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Burada $u = u(x)$ və $\upsilon = \upsilon(x)$-diferensiallanan funksiyalardır; $y = f(x)$ və $x = \varphi(y)$-qarşılıqlı tərs funksiyalardır və həm də $y = f(x)$ sıfırdan fərqli törəməyə malikdir.

3.3.Funksiyanın diferensialı. Diferensialın həndəsi mənası

Törəmənin

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

tərifindən alarıq ki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \qquad (1)$$

burada $\Delta x \to 0$ olduqda $\alpha = \alpha(\Delta x)$ sonsuz kiçikdir.

(1) bərabərliyinin hər iki tərəfini Δx-ə vuraq:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Tutaq ki, $y' \neq 0$. Onda $y', \Delta x$-dən asılı olmadığından birinci $y'\Delta x$ toplananı Δx-ə nəzərən xəttidir. $\Delta x \to 0$ şərtində bu toplanan sonsuz kiçikdir, lakin onun kiçiklik tərtibi ikinci toplananın kiçiklik tərtibindən aşağıdır. Belə ki, bütün $y' \neq 0$ qiymətləri üçün

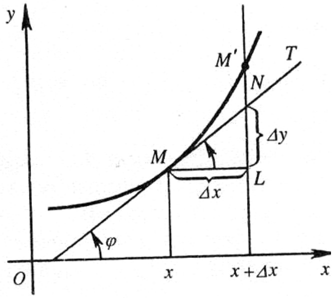
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 0.$$

Buna görə də $y'\Delta x$ toplananı funksiya artımının baş hissəsidir. Bu toplanan $y = f(x)$ funksiyasının diferensialı adlanır və dy və ya $df(x)$ simvolu ilə işarə edilir. Beləliklə, $dy = y'\Delta x$.

Diferensialın həndəsi mənasını izah etmək üçün $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə $M(x, y)$ nöqtəsində MT toxunanını çəkək və onun Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi meyl bucağını φ ilə işarə edək (şəkil 3).

Belə ki, $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ olduğundan $dy = \operatorname{tg}\varphi\Delta x$ olar. Buna görə də MLN üçbucağından alınır ki, dy diferensialı toxunanın arqumentin Δx artımına uyğun ordinat artımıdır.

$$dx = x'\Delta x = \Delta x$$



Şəkil 3.

olduğunu, yəni asılı olmayan dəyişənin diferensialının onun artımına bərabər olmasını nəzərə alsaq alarıq ki,

$$dy = y'dx. \qquad (2)$$

Beləliklə, funksiyanın diferensialı onun törəməsi ilə asılı olmayan dəyişənin diferensialı (və ya artımı) hasilinə bərabərdir.

(2)-dən alarıq ki,

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

yəni funksiyanın törəməsi bu funksiyanın diferensialının arqumentinin diferensialı nisbətinə bərabərdir.

Bu isə əvvəllərdə törəmənin $\dfrac{dy}{dx}$ kimi işarə edilməsi addımının doğru olduğuna dəlalət edir.

Diferensialın və törəmənin tapılması əməllərinin ümumiliyinə görə bunların hər ikisi diferensiallama adlandırılır.

3.4.Mürəkkəb funksiyanın diferensialı. Diferensiallar cədvəli

Mürəkkəb funksiyanın diferensialı üçün ifadəni tapaq. Tutaq ki, $y = \varphi(x)$ olduqda $z = f(y)$-dur və həm də $f(y)$ -nin

y -ə nəzərən, $\varphi(x)$ -in isə x -ə nəzərən törəmələri vardır. Onda mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasına əsasən

$$\frac{dz}{dx} = f'_y(y)\varphi'(x)$$

və buna görə də

$$dz = f'_y(y)\varphi'(x)dx$$

olar. Lakin

$$\varphi'(x)dx = dy$$

olduğundan funksiyanın diferensialını

$$dz = f'_y(y)dy$$

şəklində alarıq.

Beləliklə, mürəkkəb funksiyanın diferensialının formasının aralıq arqumenti sərbəst dəyişən olan halındakı diferensialın forması ilə eyni olunduğu alındı. Başqa sözlə diferensialın yazılış forması funksiyanın arqumentinin sərbəst dəyişən olmasından və ya başqa arqumentin funksiyası olmasından asılı deyil. Diferensialın bu xassəsi diferensialın formasının invariantlığı (dəyişməzliyi) adlanır.

İndi isə bəzi funksiyaların diferensialının tapılması üçün düsturlarını aşağıdakı cədvəldə göstərək.

1. $dc = 0$	2. $d(u+\upsilon) = du + d\upsilon$
3. $d(u\upsilon) = \upsilon du + u d\upsilon$	4. $d(cu) = cdu$
5. $d\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon du - u d\upsilon}{\upsilon^2}$	6. $d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}du$
7. $d(a^u) = a^u \ln a du$	8. $d(e^u) = e^u du$
9. $d\left(\log_a u\right) = \frac{du}{u \ln a}$	10. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$
11. $d(\sin u) = \cos u du$	12. $d(\cos u) = -\sin u du$
13. $d(\mathrm{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$	14. $d(\mathrm{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$

15. $d(\arcsin u)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ 16. $d(\arccos u)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $d(\mathrm{arctg}u)=\dfrac{du}{1+u^2}$ 18. $d(\mathrm{arcctg}u)=-\dfrac{du}{1+u^2}$

Burada $u=u(x)$ və $\upsilon=\upsilon(x)$ - diferensiallanan funksiyalardır.

3.5.Yüksək tərtibli törəmələr və diferensiallar

Verilmiş diferensiallanan $y=f(x)$ funksiyasının $y'=f'(x)$ törəməsi onun birinci tərtib törəməsi adlanır və hər hansı yeni funksiyanı təsvir edir. Birinci tərtib törəmənin törəməsinə ikinci tərtib törəmə və ya ikinci törəmə deyilir və $y''=(y')'$ və ya $f''(x)$ kimi işarə olunur. Əgər ikinci tərtib törəmənin törəməsi varsa, onda bu törəmə üçüncü tərtib və ya üçüncü törəmə adlanır və $y'''=(y'')'$ və ya $f'''(x)$ kimi işarə olunur və s.

Ümumiyyətlə, $n-1$ tərtib törəmənin törəməsi n-ci tərtib və ya n-ci törəmə adlanır və $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ kimi işarə olunur.

Əgər $y=f(x)$ funksiyasının n -ci tərtib də daxil olmaqla törəmələri varsa və bu törəmələr kəsilməzdirsə, onda bu funksiya n dəfə kəsilməz diferensiallanan funksiya adlanır.

Dördüncü, beşinci və daha yüksək tərtib törəmələr həmçinin rum rəqəmlərinin köməyi ilə də işarə olunurlar: $y^{(IV)}, y^{(V)}, y^{(VI)}$ və s.

İstənilən tərtib törəmələr üçün cəmin diferensiallanması $(u+\upsilon)^n=u^{(n)}+\upsilon^{(n)}$ və sabiti törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq, $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$ qaydaları asanlıqla ümumiləşir.

İndi iki funksiyanın $u\upsilon$ hasilinin n-ci tərtib törəməsinin hesablanmasına imkan verən düsturu verək. Hasilin və cəmin diferensiallanması qaydalarını tətbiq etsək alarıq ki,

$$y' = u'\upsilon + u\upsilon',$$

$$y'' = u''\upsilon + u'\upsilon' + u'\upsilon' + u\upsilon'' = u''\upsilon + 2u'\upsilon' + u\upsilon'',$$

$$y''' = u'''\upsilon + u''\upsilon' + 2u''\upsilon' + u'\upsilon'' + u\upsilon''' + 2u'\upsilon'' =$$

$$u'''\upsilon + 3u''\upsilon' + 3u'\upsilon'' + u\upsilon'''.$$

Diferensiallama prosesini davam etdirərək, aşağıdakı düsturu alarıq:

$$(u\upsilon)^n = u^{(n)}\upsilon + nu^{(n-1)}\upsilon' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}\upsilon'' + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}u^{(n-k)}\upsilon^{(k)} + \cdots + u\upsilon^{(n)}.$$

Bu *Leybnis*[3] *düsturu* adlanır.

İndi isə yüksək tərtibli diferensiallari göstərək.

Tutaq ki, x sərbəst dəyişən olmaq şərti ilə $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. Onun $dy = f'(x)dx$ diferensialı x-dən asılı hər hansı funksiyadır. Burada x-dən ancaq birinci $f'(x)$ vuruğu asılı ola bilər. İkinci vuruq isə sərbəst x dəyişəninin artımıdır və bu dəyişənin qiymətindən asılı deyil. Belə ki, dy, x-dən asılı funksiyadır və bu funksiyanın diferensialından danışmaq olar.

Funksiyanın diferensialının diferensialına bu funksiyanın ikinci tərtib diferensialı və ya ikinci diferensialı deyilir və $d(dy) = d^2y$ işarə edilir.

Deməki, ikinci diferensialın ifadəsi $d^2y = (f'(x)dx)'dx$ olar. Belə ki, dx, x-dən asılı olmadığından diferensiallama zamanı törəmə işarəsinin xaricinə çıxarılır. Onda alarıq ki, $d^2y = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$.Burada $(dx)^2$ əvəzinə dx^2 yazırlar.

Funksiyanın ikinci diferensialının diferensialına onun üçüncü tərtib və ya üçüncü diferensialı deyilir və

$$d^3y = d(d^2y) = (f''(x)dx^2)'dx = f'''(x)dx^3.$$

---

[3] Qotfrid Leybnis (1646-1716)-alman filosofu və riyaziyyatçısı

Ümumiyyətlə $(n-1)$-ci diferensialın birinci diferensialına funksiyanın n-ci tərtib diferensialı və ya n-ci diferensialı deyilir:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (1)$$

Buradan n-ci tərtib törəmə üçün digər yazılış forması alınır:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (2)$$

Qeyd edək ki, (1) və (2) bərabərlikləri ($n>1$ olduqda) ümumiyyətlə desək, ancaq x sərbəst dəyişən olan halında doğrudur. Doğrudan da, tutaq ki, $z = f(y),\ y = \varphi(x)$ mürəkkəb funksiyası verilmişdir. Onda

$$dz = f_y'(y)dy \quad (3)$$

olar. (3) düsturundan istifadə etsək alarıq ki,

$$d^2 z = d(f_y'(y)dy).$$

Lakin burada ümumiyyətlə desək, $dy = \varphi'(x)dx$ ifadəsi x-dən asılıdır və buna görə də hasilin diferensialı üçün düstura əsasən

$$d^2 z = d(f_y'(y))dy + f_y'(y)d(dy)$$

və ya

$$d^2 z = f_{y^2}''(y)(dy)^2 + f_y'(y)d^2 y$$

olar. Burada

$$d^2 y = y''(x)dx^2.$$

Analoji olaraq $d^3 y$ və s. diferensialları tapmaq olar.

3.6.Diferensiallanan funksiyaların xassələri

1. Ferma[4] teoremi. Əgər (a,b) intervalında təyin olun-

---

[4] Pyer Ferma (1601-1665)-fransız riyaziyyatçısı

muş $y=f(x)$ funksiyası bu intervalın hər hansı c nöqtəsində ən böyük (və ya ən kiçik) qiymətini alırsa və $f'(c)$ törəməsi varsa, onda $f'(c)=0$ olar.

İsbatı. Fərz edək ki, c nöqtəsində $f(x)$ funksiyası ən böyük qiymətini alır. c qiymətinə kifayət qədər kiçik Δx artımı verək. Onda $f(c+\Delta x)<f(c)$. $\Delta x<0$ olduqda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0$$

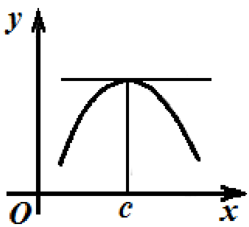
və buna görə də,

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\geq 0 \qquad (1)$$

$\Delta x>0$ olduqda $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ və buna görə də

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\leq 0 \qquad (2)$$

olar. (1) və (2) bərabərsizliklərindən alınır ki, $f'(c)=0$.



Şəkil 4.

Teoremin hökmünün həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi c olan nöqtədə çəkilmiş toxunan absis oxuna paraleldir (Şəkil 4).

2. Roll[5] teoremi. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, (a,b) intervalında diferensiallanandırsa və bu parçanın uc nöqtələrində bərabər $f(a)=f(b)$ qiymətlərini alırsa, onda (a,b) intervalında elə c nöqtəsi var ki, $f'(c)=0$ olar.

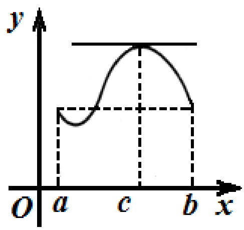
İsbatı. Belə ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kə-

[5] Mişel Roll (1652-1719) – fransız riyaziyyatçısı

silməz olduğundan, məlumdur ki, bu funksiya həmin parçada özünün ən böyük M və ən kiçik m qiymətlərini alır. Ancaq iki hal mümkündür.

1. $M = m$. Onda $f(x)$, $[a,b]$-də sabit olar; həqiqətən də, bu halda $m \le f(x) \le M$ bərabərsizliyi $[a,b]$-dən olan bütün x-lər üçün $f(x) = M$ bərabərliyinə çevrilər. Buna görə də, (a,b) intervalının istənilən nöqtəsində $f'(x) = 0$ olar.

2. $M > m$. Belə ki, $f(a) = f(b)$ olduğundan, $f(x)$ funksiyası onda M və ya m qiymətlərindən heç olmasa birini hər hansı c $(a < c < b)$ nöqtəsində alar. Onda Ferma teoreminə görə $f'(c) = 0$ olar. Teorem isbat olundu.



Şəkil 5.

Roll teoremi həndəsi olaraq o deməkdir ki, əgər $y = f(x)$ əyrisinin kənar ordinatları bərabərdirsə, onda əyri üzərində toxunanı absis oxuna paralel olan nöqtə tapılır (Şəkil 5).

3. Laqranj[6] teoremi. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və (a,b) intervalında diferensiallanandırsa, onda (a,b) intervalında elə c nöqtəsi var ki, bu nöqtədə

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{3}$$

bərabərliyi doğru olar.

İsbatı. Fərz edək ki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda \tag{4}$$

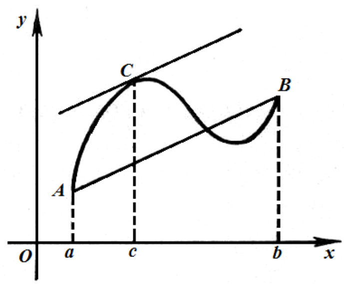
və köməkçi $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya üç kəsilməz və diferensiallanan funksiyanın cəbri cəmi kimi Roll teoreminin ilk iki şərtini ödəyir. Bu halda

[6] Jozef-Lui Laqranj (1736-1813) – fransız riyaziyyatçısı və mexaniki

$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Deməli, $\varphi(x)$ funksiyasına Roll teoremini tətbiq etmək olar. Başqa sözlə $a<c<b$ şərtini ödəyən elə c nöqtəsi var ki, $\varphi'(c)=0$ olar, $\varphi'(x)=f'(x)-\lambda$ olduğundan $f'(c)-\lambda=0$ və ya $\lambda=f'(c)$ alınar. Buradan (4)-ü nəzərə almaqla (3) bərabərliyinin doğruluğu alınar.

Laqranj teoreminin sadə həndəsi mənası vardır (Şəkil 6): $y=f(x)$ funksiyasının qrafikində A və B nöqtələri arasında elə daxili C nöqtəsi var ki, qrafikə C nöqtəsində çəkilən toxunan AB vətərinə paralel olar. Doğrudan da, (3) bərabərliyinin sol tərəfi AB vətərinin bucaq əmsalı, sağ tərəfi isə qrafikə C nöqtəsində çəkilən toxunanın bucaq əmsalıdır.

Qeyd edək ki, Laqranj teoremi Roll teoreminin ümumiləşməsidir. Belə ki, $f(a)=f(b)$ olarsa, onda (3) bərabərliyindən $f'(c)=0$ olduğu alınır.



Şəkil 6.

(3) düsturu Laqranj düsturu və ya sonlu artımlar düsturu adlanır. Həmin düsturdan

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

olduğu alınar. Nəhayət, a və b əvəzinə x_0 və x götürsək və

$$\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=f(x)-f(x_0)$$

işarə etsək, Laqranj düsturunu

$$\Delta y=f'(c)\Delta x$$

şəklində yaza bilərik.

Laqranj teoremindən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. Əgər (a,b) intervalında $f'(x)=0$ olarsa, onda bu intervalda $f(x)$ funksiyası sabit olar.

İsbatı. Baxılan intervalda $x_1<x_2$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1 və x_2 qiymətlərində Laqranj teoremi ödənilir, yəni

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, burada $x_1<c<x_2$. $f'(c)=0$ olduğundan $f(x_2)-f(x_1)=0$, yəni $f(x_1)=f(x_2)$ olar. Bu isə o dekməkdir ki, (a,b) intervalında $f(x)=const$.

4. Lopital[7] qaydası. Birinci fəsildə iki sonsuz kiçilən və ya sonsuz böyüyən nisbətinin limitlərinin tapılmasının bəzi yolları ilə yəni, uyğun olaraq $\frac{0}{0}$ və $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliklərin açılması ilə tanış olduq. Burada həmin qeyri müəyyənliklərin açılışı üçün yeni sadə qaydaya baxılır. Bu Lopital qaydası adlanır. Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları a nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsinin özü müstəsna oluna bilər) təyin olunub və diferensiallanandırlar. Tutaq ki, bu funksiyalar həmin nöqtədə eyni zamanda ya sonsuz kiçik, ya da sonsuz böyükdürlər.

Teorem. İki sonsuz kiçiyin və ya sonsuz böyüyün nisbətinin limiti onların törəmələri nisbətinin limitinə (əgər axırıncı limit varsa) bərabərdir, yəni

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Qeyd edək ki, Lopital qaydası a ədədi ∞ simvolu olan halında da doğrudur.

Digər

$$0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty$$

qeyri-müəyyənlik halları da eynilik çevirmələrinin köməyi ilə əsas $\frac{0}{0}$ və ya $\frac{\infty}{\infty}$ tip qeyri-müəyyənliklərə gətirilir.

Məsələn, $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$. Burada $0\cdot\infty$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Verilmiş ifadəni

[7] Hilom Lopital (1661-1704) – fransız riyaziyyatçısı

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

kimi yazmaqla $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənlik alarıq. Buradan, Lopital qaydasını tətbiq etməklə alırıq ki,

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

3.7.Teylor düsturu

Qalıq həddi Laqranj şəklində olan Teylor düsturu.

Teorem. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının (α,β) intervalında $(n+1)$-ci tərtib də daxil olmaqla bütün tərtib törəmələri var. Onda bu intervalın ixtiyari x və qeyd olunmuş a nöqtələri üçün

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (1)$$

düsturu doğrudur. Burada *c, x* və *a* arasında yerləşir, yəni $c = a + \theta(x-a)$ və θ ədədi 0 və 1 arasında yerləşmişdir, yəni $0 < \theta < 1$.

(1) düsturuna *Teylor*[8] *düsturu* və bu düsturun sağ tərəfindəki axırıncı toplanan Teylor düsturunun Laqranj şəklində qalıq həddi adlanır.

Teylor düsturunun elementar funksiyalara tətbiqi. Təq-

[8] Bruk Teylor (1685-1731) – İngilis riyaziyyatçısı

ribi düsturlar. Teylor düsturunun x=0 halına uyğun olan xüsusi halı

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2}$$

düsturudur. Burada $c = \theta x$. Bu düstur *Makloren*[9] *düsturu* adlanır. Burada

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

qalıq həddidir.

Bu düsturla bəzi elementar funksiyaların ayrılışını verək.

1. Tutaq ki, $f(x) = e^x$. Onda istənilən natural k və istənilən x üçün $f^{(k)}(x) = e^x$ olar. Xüsusi halda x=0 olduqda f(0)=1 və $f^{(k)}$(0)=1 olar. (2) düsturuna əsasən e^x funksiyasının ayrılışını alırıq:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \tag{3}$$

(3) bərabərliyindən təqribi

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

düsturunu alarıq. Belə ki, burada qalıq hədd

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

olduğundan, onda, məsələn $x > 0$ olduqda $r_n(x)$-in xətası

$$0 < r_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \tag{4}$$

[9] Kolin Makloren (1698-1746) – Şotlandiya riyaziyyatçısı

kimi qiymətlənər. Xüsusi halda x=1 olduqda e ədədinin təqribi qiymətini alarıq:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

2. Tutaq ki, $f(x)=\sin x$. Onda $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$.... Buna görə də $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$ və sonra da qiymətlər növbələşir.

Əgər $n=2m$ götürsək, (2) düsturuna əsasən alarıq ki,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \\ + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos c. \qquad (5)$$

(5) ayrılışından

$$\left|r_n(x)\right| \le \frac{\left|x\right|^{2m+1}}{(2n+1)!}$$

bərabərsizliyi ilə qiymətlənən $r_n(x)$ xətalı təqribi

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

düsturunu alarıq (belə ki, istənilən c üçün $\left|\cos c\right| \le 1$).

3. Analoji olaraq $f(x)=\cos x$ olduqda, alarıq ki,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \\ + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos c \qquad (6)$$

və buradan

$$\left|r_n(x)\right| \le \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

xətalı təqribi

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

düsturunu alarıq.

4. Tutaq ki, $f(x)=(1+x)^n$, burada n-natural ədəddir. $f(x)$-i ardıcıl olaraq diferensiallasaq alarıq ki,

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}, \quad f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2},...,$$

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k},...,f^{(n)}(x)=n!$$

(n-dən böyük bütün tərtibli törəmələr sıfra bərabərdir). Buradan

$f(0)=1,\ f'(0)=n,\ f''(0)=n(n-1),...,\ f^{(k)}(0)=n(n-1)...(n-k+1),...$
$...,f^{(n)}(0)=n!$

(2) düsturuna əsasən

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...$$
$$...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k+...+x^n \qquad (7)$$

bərabərliyini alarıq ki, bu da Nyuton binomu adlanır.

Aydındır ki, (3), (5), (6), (7) bərabərlikləri x-in bütün qiymətlərində doğrudur.

III FƏSİLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. $y = 2x^3 + 3x - 5$, $y'(0) = ?$ $y'(1) = ?$ $y'(2) = ?$

2. $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$, $y'(0) = ?$ $y'(1) = ?$

3. $y = t^3 - 2t^2 + 2$, $y'(-1) = ?$ $y'(a) = ?$

4. $y = 3x^2 + x + 5$, $y'(1) = ?$ $y'(a+b) = ?$

5. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x$, $y'(0) = ?$ $y'(c) = ?$

6. $y = 2^{10} + 2^5 + x$, $y'(1) = ?$ $y'(2) = ?$

7. $y = x^5 + x^4 + 5^3$, $y'(-1) = ?$

8. $y = ax^3 + a^2x^2 + a^3x$, $y'(a) = ?$

9. $y = x^n + nx$, $y'(a) = ?$ $y'(a+b) = ?$

10. $y = \sqrt{1+x^2}$

11. $y = \dfrac{x^3}{3}$

12. $y = (x^3 + 3)(4x^2 - 5)$

13. $y = (x-5)^4(x+3)^5$

14. $y = 8 - x^2$

15. $y = 1 - 2x^3$

16. $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$

17. $y = (x-1)\sqrt{x}$

18. $y = \dfrac{x+2}{x}$

19. $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

20. $y = \dfrac{1}{x^2}$

21. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5$

22. $y = \sin x^2$

23. $y = \dfrac{x^3 - 3}{5 - x^2}$

24. $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$

25. $y = \arcsin \dfrac{x-2}{3}$

26. $y = \dfrac{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x - x}{2}$

27. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{a}{x} + \ln \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$

28. $y=\dfrac{3x-4}{2x+3}$

29. $y=(a^2-x^2)^2$

30. $y=x(2x-3)(4x+5)$

31. $y=\sqrt{4+x^2}$

32. $y=\operatorname{arctg}(x^2)$

33. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

34. $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$

35. $y=e^{\cos x},\ \ y''=?$

36. $y=\operatorname{arctg} x,\ \ y''=?$

37. $y=\sin 2x,\ \ y''=?$

38. $y=e^x+x^2,\ \ y^{(IV)}=?$

39. $y=e^{2x},\ \ y'''=?$

40. $y=x\ln x,\ \ y''=?$

41. $y=x^3+3x^2+4,\ \ y^{(V)}=?$

42. $y=(x^2+x+1)e^{-x}$, d^2y=?

43. $y=2x+ctg2x$, d^2y=?

44. $y=e^x\sin x$. Göstərin ki, $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

45. $x=2t^2; y=3t^3\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

Lopital qaydasından istifadə edərək aşağıdakı limitləri tapın:

46. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

48. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$

49. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

IV FƏSİL. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN İNTEQRAL HESABI.

4.1.İbtidai funksiya. Qeyri-müəyyən interqal anlayışı

Maddi nöqtənin verilmiş hərəkət qanununa görə onun ani sürətinin tapılması haqqında məsələyə baxmışdıq. Əgər hərəkətin başlanğıcından etibarən nöqtənin t müddətində getdiyi yol $s = s(t)$ -dirsə, onda t anında υ ani sürət $s(t)$ funksiyasının törəməsinə bərabərdir, yəni

$$\upsilon = s'(t).$$

Fizikada tərs məsələyə rast gəlinir: verilən $\upsilon = \upsilon(t)$ sürətinə görə hərəkət qanunu, yəni törəməsi $\upsilon(t)$-yə bərabər olan $s(t)$ funksiyası tapılır, həmçinin maddi nöqtənin verilən təcilinə görə onun sürətini və hərəkət qanununu təyin edən məsələyə baxılır. Bunlar mexanikanın mühüm məsələləri hesab olunurlar. Həmin məsələlər riyazi problemə – funksiyanın verilən törəməsinə görə özünün, daha doğrusu, ibtidaisinin tapılmasına gətirilir.

Həmin problemi nəzərdən keçirək və hal-hazıra kimi rastlaşmadığımız ibtidai terminini aydınlaşdıraq.

İbtidai funksiya. Tutaq ki, $F(x)$ və $f(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında təyin olunmuşdur. Əgər $F(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında törəməsi varsa və

$$\forall x \in (a,b) \to F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda $F(x)$ funksiyasına (a,b) intervalında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası (və ya sadəcə ibtidaisi) deyilir.

Qeyd edək ki, əgər $f(x)$ və $F(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında təyin olunursa, eyni zamanda $F(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandırsa, $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və bütün $x \in (a,b)$-lər üçün (1) bərabərliyi ödənilərsə, onda $F(x)$ funksiyasına $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının ibtidaisi deyilir.

Əgər $F(x)$ funksiyası (a,b) intervalında $f(x)$ funksiyasının ibtidaisidirsə, onda c sabitinin istənilən qiymətində $F(x)+c$ funksiyası da (a,b) intervalında $f(x)$ funksiyasının ibtidaisidir.

Teorem. Əgər $F_1(x)$ və $F_2(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında $f(x)$ funksiyasının istənilən ibtidailəridirsə, onda

$$\forall x \in (a,b) \to F_2(x) = F_1(x) + c \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənilir, burada c-sabitdir.

$\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ fərz edək. İbtidainin tərifinə və teoremin şərtinə görə

$$\forall x \in (a,b) \to F_2'(x) = f(x) \wedge F_1'(x) = f(x)$$

bərabərlikləri ödənilir. Buradan alınır ki, $\Phi(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandır və

$$\forall x \in (a,b) \to \Phi'(x) = 0$$

bərabərliyi doğrudur.

$$\forall x \in (a,b) \to \Phi(x) = c = const,$$

və ya

$$\forall x \in (a,b) \to F_2(x) = F_1(x) + c,$$

yəni (2) bərabərliyi doğrudur.

$f(x)$ funksiyasının hər hansı Δ aralığındakı bütün ibtidailəri küllüsünə həmin aralıqda f funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int f(x)\,dx$ kimi işarə olunur.

Deməli, $F(x)$ funksiyası $f(x)$-in hər hansı ibtidai funksiyasıdırsa, onda

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c\}.$$

Bu bərabərliyi həmişə

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (3)$$

şəklində yazırlar.

Burada $F(x)$ – Δ aralığında f funksiyasının ibtidailərindən biridir. f inteqralaltı funksiya, $f(x)dx$ inteqralaltı ifadədir.

İnteqralaltı ifadəni $F'(x)dx$ və ya $dF(x)$ şəklində yazmaq olar, yəni

$$f(x)dx=dF(x). \qquad (4)$$

Verilən funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralının tapılması əməli, diferensiallama əməlinin tərsidir və inteqrallama adlanır. Buna görə törəmə üçün istənilən düsturu, yəni $F'(x)=f(x)$ şəklində düsturu, (1) şəklində yazmaq olar.

İstənilən funksiyanın ibtidaisi varmı? Xeyir, yoxdur. Lakin gələcəkdə göstərəcəyik ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməyən hər bir $f(x)$ funksiyasının həmin parçada ibtidai funksiyası, yəni qeyri-müəyyən inteqralı var və buna görə də verilən funksiya müəyyən nöqtələrdə kəsilən olduqda, onun kəsilməz olduğu ayrı-ayrı interval və ya parçalarda inteqralından danışacağıq.

İnteqrala qeyri-müəyyən adı verilməsi onun qiymətinin konkret (müəyyən) bir funksiya olmayıb, sonsuz sayda funksiyalar (çoxluğu) olması ilə əlaqədardır.

4.2.Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

İnteqralın tərifindən aydındır ki, verilən $f(x)$ funksiyasının inteqralını tapmaq (hesablamaq), onun bütün ibtidai funksiyaları çoxluğunu tapmaq deməkdir. Bunun üçün isə onun bir ibtidai funksiyasını, yəni $F'(x) = f(x)$ bərabərliyini ödəyən $F(x)$ funksiyasını bilmək kifayətdir. Bu halda

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

bərabərliyinin doğruluğu baxılan aralığın bütün nöqtələrində

$$F'(x) = f(x)$$

münasibətinin ödənilməsinə ekvivalentdir. Beləliklə,

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

bərabərliyinin doğruluğunu yoxlamaq üçün onun sağ tərəfinin törəməsinin inteqralaltı $f(x)$ funksiyasına bərabər olduğunu yoxlamaq kifayətdir:

$$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)\,.$$

Bu zaman yadda saxlamaq lazımdır ki, iki qeyri-müəyyən inteqralın və ya qeyri-müəyyən inteqrallar daxil olan iki ifadənin bərabərliyi iki çoxluğun (ibtidai funksiyalar çoxluğunun) bərabərliyi deməkdir.

Deyilənlərdən istifadə edərək, inteqralın bir sıra xassələrini isbat edək.

1⁰. Qeyri-müəyyən inteqralın diferensialı inteqralaltı ifadəyə bərabərdir

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Doğrudan da (3) bərabərliyinə görə

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\,(F(x)+c) =$$
$$= d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx, \tag{2}$$

çünki $dc=0$.

(1) düsturuna əsasən əgər diferensial işarəsi inteqral işarəsindən öndə gələrsə, onda diferensial və inteqral işarələri qarşılıqlı yox olurlar.

2⁰. $$\int d\,F(x) = F(x)+c\,. \tag{3}$$

(1) və (2) bərabərliklərindən (3) bərabərliyi alınır.

(3) münasibəti göstərir ki, inteqral işarəsi diferensial işarəsindən əvvəl gəldikdə, həmin işarələr qarşılıqlı yox olurlar (əgər c sabiti atılarsa).

3⁰. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının hər hansı aralıqda ibtidailəri varsa, onda istənilən $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ üçün $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ olmaqla,

$$\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \tag{4}$$

funksiyasının da həmin aralıqda ibtidaisi var, həm də

$$\int [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Tutaq ki, F və G uyğun olaraq f və g funksiyalarının ibtidailəridir, onda $\Phi = \alpha\,F + \beta\,G$ – φ funksiyasının ibtidaisi olur, çünki

$$(\alpha F(x)+\beta G(x))'=\alpha F'(x)+\beta G'(x)=$$
$$=\alpha f(x)+\beta g(x).$$

İnteqralın tərifinə əsasən (5)-in sol hissəsi $\Phi(x)+c$ şəklində funksiyalardan, sağ hissəsi isə

$$\alpha F(x)+\alpha c_1+\beta G(x)+\beta c_2=\Phi(x)+\alpha c_1+\beta c_2$$

şəklində funksiyalardan ibarətdir. Bir halda ki, $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$, onda $\Phi(x)+c$ şəklində hər bir funksiya $\Phi(x)+\alpha c_1+\beta c_2$ funksiyaları küllüyatında yerləşir və tərsinə, yəni verilən c ədədinə görə c_1 və c_2-ni, c_1 və c_2 verilənlərinə görə isə elə c ədədi tapmaq olar ki, $c=\alpha c_1+\beta c_2$ bərabərliyi ödənilər.

Beləliklə, inteqrallama əməli xəttilik xassəsinə malikdir: funksiyaların xətti kombinasiyasının inteqralı baxılan funksiyaların inteqrallarının uyğun xətti kombinasiyasına bərabərdir.

4.3.İnteqrallama üsulları

Aşkardır ki, ibtidailəri törəmə cədvəlinin köməyi ilə tapılan funksiyalar geniş sinfi əhatə etmir. İnteqrallama üsullarına müraciət etməkdə məqsəd inteqralı elementar funksiyalarla ifadə olunan funksiyaların çoxluğunu genişləndirməkdir. Ümumiyyətlə, funksiyanı inteqrallamaq məsələsi çətindir. Ona görə ki, istənilən funksiyanın inteqralını tapmaq üçün ümumi konstruktiv qayda göstərmək mümkün olmur. Belə çətinlik əksər tərs əməllər üçün mövcuddur. İnteqrallama isə diferensiallamanın tərs əməlidir.

Düz əməl olan diferensiallama konstruktiv şəkildə təyin olunur. Törəmənin tərifində, verilmiş funksiyanın müəyyən nöqtədə törəməsini tapmaq üçün hansı əməlləri (funksiyanın artımını tapmaq, artımların nisbətini tapmaq, limitə keçmək) hansı ardıcıllıqla aparmağın lazım olduğu göstərilir.

Lakin bəzi funksiyaların inteqralını hesablamaq üçün müəyyən üsullar göstərmək mümkündür.

a) Ayrılma üsulu. Əgər

$$f(x)=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_n f_n(x) \qquad (1)$$

olarsa, onda $\int f(x)\,dx$ inteqralını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar.

$$\int f(x)\,dx=\int\left[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_n f_n(x)\right]dx$$

$$=\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx+\cdots+\lambda_n\int f_n(x)\,dx. \qquad (2)$$

Həmin üsulun mahiyyəti (1) ayrılışının münasib seçilməsindən ibarətdir. (2) düsturundakı $\int f_i(x)\,dx\ \ i=\overline{1,n}$ inteqralları müəyyən mənada ilk əvvəl verilən inteqralla müqayisədə daha sadə olmalıdır. (2) düsturunda $\int f_i(x)\,dx$ inteqralı cədvəl inteqralı olanda daha sadə olur.

b) Dəyişəni əvəzetmə üsulu. Tutaq ki, $t=\varphi(x)$ funksiyası Δ aralığında təyin olunan və diferensiallanan funksiyadır və $\widetilde{\Delta}=\varphi(\Delta)$ çoxluğu φ funksiyasının Δ aralığında aldığı qiymətlər çoxluğudur.

Əgər $U(t)$ funksiyası $\widetilde{\Delta}$ aralığında təyin olunan və diferensiallanandırsa, həm də

$$U'(t)=u(t) \qquad (3)$$

olarsa, onda mürəkkəb $F(x)=U(\varphi(x))$ funksiyası Δ aralığında təyin olunan və diferensiallanan funksiyadır, həm də

$$F'(x)=\left[U(\varphi(x))\right]'=U'(\varphi(x))\varphi'(x)=u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \qquad (4)$$

(3) və (4) bərabərliklərindən alınır ki, əgər $U(t)$ funksiyası $u(t)$-in ibtidaisidirsə, onda $U(\varphi(x))$ funksiyası $u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ funksiyasının ibtidaisidir. Bu o deməkdir ki, əgər

$$\int u(t)\,dt=U(t)+c, \qquad (5)$$

olarsa, onda

$$\int u(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = U(\varphi(x)) + c \qquad (6)$$

və ya

$$\int u(\varphi(x))\,d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + c. \qquad (7)$$

(7) düsturu (və ya (6) düsturu) dəyişəni əvəzetmə düsturu adlanır. Onlar (5) düsturundan t əvəzinə diferensiallanan $\varphi(x)$ funksiyasını yazmaqla alınır.

Qeyd edək ki, əgər $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

şəklində göstərilə bilirsə və $u(t)$ funksiyasının ibtidaisi məlumdursa, yəni (5) inteqralı məlumdursa, onda (6) düsturu $\int f(x)\,dx$ inteqralını tapmağa imkan verir.

ç) Hissə-hissə inteqrallama üsulu. Tutaq ki, $u(x)$ və $\upsilon(x)$ funksiyalarının Δ aralığında kəsilməz törəmələri var. Onda $u\upsilon$ funksiyasının da eyni zamanda Δ aralığında kəsilməz törəməsi var və hasilin diferensiallanması qaydasına əsasən $u\upsilon' = (u\upsilon)' - \upsilon u'$ bərabərliyi ödənilir. Bu bərabərliyi inteqrallayaq və nəzərə alaq ki,

$$\int (u\upsilon)'\,dx = u\upsilon + c, \qquad (7)$$

alarıq

$$\int u\upsilon'\,dx = u\upsilon + c - \int \upsilon u'\,dx. \qquad (8)$$

İxtiyari c sabitini $\int \upsilon u'\,dx$ inteqralına aid edərək, tapırıq

$$\int u\upsilon'\,dx = u\upsilon - \int \upsilon u'\,dx, \qquad (9)$$

və ya

$$\int u\,d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\,du. \qquad (10)$$

(burada $d\upsilon = \upsilon' dx,\ du = u' dx$)

(9) (və ya (10)) düsturuna hissə-hissə inteqrallama düs-

turu deyilir. Onlar $\int u\,d\upsilon$ inteqralının hesablanmasını $\int \upsilon\,d u$ inteqralının hesablanmasına gətirir.

4.4.İnteqral cədvəli

1. $\int x^{\alpha}\,d x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1.$

Xüsusi halda α=0 olarsa, onda $\int 1\cdot d x = x + c.$

2. $\int \dfrac{d x}{x} = \ln|x| + c, \quad x \neq 0.$

3. $\int a^{x}\,d x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c\ , \quad a > 0,\ a \neq 1.$

Xüsusi halda a=e olarsa, onda

$\int e^{x} d x = e^{x} + c.$

4. $\int \sin x\,d x = -\cos x + c.$

5. $\int \cos x\,d x = \sin x + c.$

6. $\int \dfrac{d x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + c.$

7. $\int \dfrac{d x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + c.$

8. $\int \mathrm{sh}\,x\,d x = \mathrm{ch}\,x + c.$

9. $\int \mathrm{ch}\,x\,d x = \mathrm{sh}\,x + c.$

10. $\int \dfrac{d x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + c.$

11. $\int \dfrac{d x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + c.$

12. $\int \dfrac{d x}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + c\ ,\ a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c\ ,\ a > 0.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c\ ,\ a \neq 0.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + c\ ,\ \alpha \neq 0.$

4.5.İnteqral cəmi. Müəyyən inteqralın tərifi

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur və $x_i\ (i = \overline{0,n})$ həmin parçanın elə nöqtələri küllüyatıdır ki,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Həmin nöqtələr küllüyatını $[a,b]$ parçasının bölgüsü adlandıraq, bölgünü $T = \{x_i, i = \overline{0,n}\}$ ilə işarə edək, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ (burada $i = \overline{1,n}$) parçalarını isə T bölgüsünün paçaları adlandıraq.

Tutaq ki, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – T bölgüsünün i-ci parçasının uzunluğudur. Onda $l(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ ədədini T bölgüsünün xırdalığı (və ya həmin bölgünün diametri) adlandıraq. Əgər $\xi_i \in \Delta_i$ olarsa, onda ξ_i $(i = \overline{1,n})$ nöqtələr küllüyatını seçmə adlandıraq və $\xi = \{\xi_i\,, i = \overline{1,n}\}$ ilə işarə edək.

$$\sigma_T(\xi, f) = \sigma_T(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

cəmini verilmiş T bölgüsü və qeyd olunmuş ξ seçimində f funksiyasının inteqral cəmi adlandıraq.

Tərif. Əgər istənilən ε>0 üçün elə δ=$\delta(\varepsilon)$>0 ədədi varsa ki, diametri $l(T)$<δ şərtini ödəyən istənilən T bölgüsü və istənilən ξ seçimində

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda J ədədinə f funksiyasının $[a,b]$ parçasında müəyyən inteqralı deyilir və $\int_a^b f(x)\,dx$ simvolu ilə işarə olunur, burada $f(x)$-ə inteqralaltı funksiya, $f(x)dx$-ə inteqralaltı ifadə, a və b ədədlərinə isə inteqralın uyğun olaraq aşağı və yuxarı sərhədləri deyilir. Əgər (2) şərtilə təyin olunan J ədədi varsa, onda f funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanan adlanır və deyilir ki, f funksiyasının $[a,b]$ parçasında inteqralı var.

4.6.Darbu cəmləri və onların xassələri

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunan f funksiyası həmin parçada məhduddur və $T=\{x_i,\ i=\overline{0,n}\}-[a,b]$ parçasının bölgüsüdür, $\Delta_i=[x_i,x_{i-1}]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=\overline{1,n})$. İşarələmə apraq

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x)\ \ ,\ \ m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i\ \ ,\ \ s_T=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \qquad (1)$$

S_T və s_T cəmlərini $[a,b]$ parçasının verilmiş T bölgüsündə f funksiyasının uyğun olarq yuxarı və aşağı Darbu[10] cəmləri adlandıraq. Qeyd edək ki, həmin cəmlər ξ seçimidən asılı deyildir. Darbu cəmlərinin xassələrinə baxaq.

***1⁰*.** İstənilən ξ seçimi üçün

$$s_T \le \sigma_T(\xi) \le S_T \qquad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Həqiqətən $\xi_i\in\Delta_i$ üçün $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ bərabərsizliyi

[10] Jan Qaston Darbu (14.08.1842-23.02.1917) – fransız riyaziyyatçısı

ödənilir, onda

$$m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i .$$

Həmin bərabərsizlikləri $i=\overline{1,n}$ hüdudunda toplayaraq, alırıq

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i . \qquad (3)$$

Darbu cəmlərinin və σ inteqral cəminin təriflərinə əsasən (3) və (2) hökmləri eynigüclüdür.

2⁰. Aşağıdakı bərabərliklər doğrudur

$$S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi), \qquad (4)$$

$$s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi) . \qquad (5)$$

3⁰. Əgər T_2 bölgüsü T_1 bölgüsünün davamıdırsa, onda

$$s_{T_1} \le s_{T_2} \le S_{T_2} \le S_{T_1} , \qquad (6)$$

yəni bölgü nöqtələri sırasına yeni nöqtə əlavə etdikdə aşağı Darbu cəmi azalmır, yuxarı Darbu cəmi isə artmır.

4⁰. İstənilən T' və T'' bölgüləri üçün

$$s_{T'} \le S_{T''} , \qquad (7)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

5⁰. [a,b] parçasının istənilən T'' və T' bölgüləri üçün

$$s_{T'} \le \underline{J} \le \overline{J} \le S_{T''} \qquad (8)$$

şərtini ödəyən

$$\underline{J} = \sup_{T} s_T , \quad \overline{J} = \inf_{T} S_T$$

ədədləri var. Həmin ədədlərə [a,b] parçasında f funksiyasının uyğun olaraq aşağı və yuxarı Darbu inteqralları deyilir.

4.7.Müəyyən inteqralın xassələri

Öncə qeyd edək ki, əgər $f(x)$ funksiyası [a,b] parçasında inteqrallana biləndirsə, onda həmin funksiyanın inteqralı ədəddir və bu ədəd inteqralaltı funksiyanın arqumentinin işarə olunduğu hərfdən asılı deyildir, yəni

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(z)\,dz\,.$$

Bəzən $\int_a^b f(x)\,dx$ yazısı əvəzinə $\int_\Delta f(x)\,dx$, burada $\Delta=[a,b]$, yazısından istifadə etmək əlverişli olur.

Funksiyalar üzərində əməllərlə əlaqəli xassələr.

1⁰. Əgər f və g funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallana biləndirsə, onda istənilən α və β $(\alpha\in R,\ \beta\in R)$ ədədləri üçün $\varphi(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ funksiyası da eyni zamanda $[a,b]$ parçasında inteqrallana biləndir və aşağıdakı bərabərlik doğrudur

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

2⁰. Əgər f və g funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda $\varphi(x)=f(x)g(x)$ funksiyası eyni zamanda həmin parçada inteqrallanandır.

İnteqrallama parçası ilə əlaqəli xassələr.

3⁰. Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda o $[a,b]$ parçasında yerləşən istənilən $[a^*,b^*]$ parçasında da inteqrallanandır.

4⁰. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallandırsa və $a<c<b$ olarsa, onda aşağıdakı bərabərlik doğrududur

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_b^b f(x)\,dx\,. \qquad (2)$$

Aşağıdakı xassə $b=a$, həmçinin $a>b$ olan halda $\int_a^b f(x)dx$ inteqral anlayışını genişləndirməyi tələb edir.

Əgər f funksiyası a nöqtəsində təyin olunursa, onda tərifə görə fərz olunur

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \cdot \qquad (3)$$

Əgər f funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandırsa, onda tərifə görə hesab edirik ki,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\ ,\ a < b\,. \qquad (4)$$

(3) və (4) tərifləri təbiidir. Doğrudan da, $a=b$ olduqda bölgünün bütün parçalarının uzunluqlarını sıfra bərabər hesab etmək olar, buna görə də istənilən inteqral cəm sıfra bərabərdir.

$b>a$ olan halda $\int_b^a f(x)dx$ simvoluna uyğun inteqral cəm, $\int_a^b f(x)dx$ simvoluna uyğun inteqral cəmdən ancaq işarə ilə fərqlənir.

5^0. Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanadırsa və c_1, c_2, c_3 həmin parçanın istənilən nöqtələridirsə, onda

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx\,. \qquad (5)$$

4.8.Orta haqqında inteqral teoremi

Teorem. Tutaq ki, f və g funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyirlər.

1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır;

2) $\exists m, M\ : \forall\, x \in [a,b] \to m \le f(x) \le M$; $\qquad$ (1)

3) g funksiyası $[a,b]$ parçasında işarəsini dəyişmir, yəni ya

$$g(x)\ge 0 \quad x\in[a,b] \text{ olduqda,} \qquad (2)$$

ya da

$$g(x)\le 0 \quad x\in[a,b] \text{ olduqda.}$$

Onda

$$\exists\, \mu \in [m,M]: \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (3)$$

Tutaq ki, (2) şərti ödənir. Onda (1) bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\forall\, x \in [a,b] \to m\, g(x) \le f(x)\, g(x) \le M\, g(x). \quad (4)$$

Belə ki, f və g funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır, onda fg funksiyası da eyni zamanda $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır və inteqralın qiymətləndirilməsi qaydasına əsasən

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Qeyd edək ki, əgər $\int_a^b g(x)dx = 0$ olarsa, onda (3)-dən alınır ki, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, buna görə də (3) bərabərliyi istənilən μ üçün ödənilir. Tutaq ki, $\int_a^b g(x)\,dx \ne 0$ onda (2)-ə əsasən $\int_a^b g(x)\,dx > 0$.

Buna görə (5) bərabərsizliyi aşağıdakı bərabərsizliklə eynigüclüdür

$$m \le \mu \le M\,, \qquad (6)$$

burada

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}. \qquad (7)$$

(7)-dən (3) bərabərliyi alınır, burada (6)-ya əsasən $\mu\in[m, M]$. $g(x)\ge 0$ olan hal üçün teorem isbat olundu. Həmin teorem

$g(x)\leq 0$ olan halda da doğrudur, çünki $g(x)$-i $-g(x)$-lə əvəz etsək (3) bərabərliyi saxlanılır.

Nəticə. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməyən, $g(x)$ funksiyası isə $[a,b]$ parçasında inteqrallanan və işarəsini dəyişməyəndirsə, onda

$$\exists c\in[a,b]:\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (8)$$

Xüsusi halda, əgər $g(x)=1$ olarsa, onda

$$\exists c\in[a,b]:\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a). \qquad (9)$$

4.9.Yuxarı sərhəddi dəyişən inteqral. Nyüton-Leybnis düsturu

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır, onda $a\leq x\leq b$ olduqda o istənilən $[a,x]$ parçasında da inteqrallanandır, yəni istənilən $x\in[a,b]$ üçün $\int_a^x f(t)\,dt$ inteqralının mənası var. Aşağıdakı funksyiaya baxaq

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

$[a,b]$ parçasında təyin olunan həmin F funksiyasına yuxarı sərhəddi dəyişən inteqral deyilir. (1) inteqralında f funksiyasının üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla F funksiyasının uyğun xassələrindən danışmaq olar.

a) İnteqralın kəsilməzliyi.

1^0. Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda F funksiyası həmin parçada kəsilməzdir.

b) İnteqralın diferensiallanması.

2^0. Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa və $x_0\in[a,b]$ nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandır, həm də

$$F'(x_0)=f(x_0)\,. \qquad (2)$$

c) Kəsiməyən funksiyanın ibtidaisinin varlığı.

3^0. Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda onun həmin parçada ibtidaisi var, eyni zamanda f funksiyasının ibtidaisi yuxarı sərhəddi dəyişən inteqraldır, buna görə də

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt+c\,, \qquad (4)$$

burada c ixtiyari sabitdir.

Teorem. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $\Phi(x)$ isə həmin parçada $f(x)$-in hər hansı ibtidaisidirsə, onda Nyüton-Leybnis düsturu doğrudur.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)\,. \qquad (5)$$

Elə c ədədi var ki,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+c\;\;,\;\; a\le x\le b \qquad (6)$$

bərabərliyi doğrudur. (6) düsturunda $x=a$ yazaq və nəzərə alaq ki, $\int_a^b f(x)\,dx=0$, onda $c=\Phi(a)$ alarıq. Buna görə (6) bərabərliyini

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\Phi(a) \qquad (7)$$

şəklində yazmaq olar. (7) bərabərliyi istənilən $x\in[a,b]$ üçün ödənilir və xüsusi halda, $x=b$ olduqda, yəni

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt+\Phi(a),$$

oradan (5) d üstura alınır, çünki müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişəninin hansı hərflə işarə olunmasından asılı deyildir.

4.10.Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəzedilməsi və hissə-hissə inteqrallanması

1. Müəyyən inteqralda dəyişəni əvəz etmə. Məlumdur ki, müəyyən inteqral, inteqral cəminin limiti kimi və Nüton-Leybnis düsturu ilə hesablanırdı. İnteqral cəminin limitinin hesablanması üsulu prinsipcə bütün hallara tətbiq oluna bilər, lakin çətin hesablamalara gətirildiyindən, əksər hallarda əlverişli deyildir.

Nyuton-Leybnis düturu nisbətən əlverişli üsuldur, lakin bu üsulla da, əvvəlcə qeyri-müəyyən inteqralın hesablanması tələb olunur ki, bu da çox vaxt əlverişli olmur. Buna görə də bir çox müəyyən inteqralları bəzən xüsusi üsullarla hesablamaq daha münasib olur. Belə xüsusi üsullardan bəzilərinə baxaq.

Tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralını $x=\varphi(x)$ bərabərliyi ilə yeni t dəyişəni daxil etməklə hesablamaq lazımdır. Bu haqda aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. 1) $[a,b]$ seqmentində $f(x)$ funksiyası kəsilməz olsun; 2) $\varphi(t)=a$ və $\varphi(t)=b$ tənliklərinin həlləri uyğun olaraq t_0 və T olsun, (müəyyənlik üçün $t_0<T$ hesab edək); 3) t_0 və T nöqtələrinin əmələ gətirdiyi $[t_0,T]$ seqmentində $x=\varphi(t)$ funksiyası və $\varphi'(t)$ törəməsi kəsilməz funksiya olsun; 4) t arqumenti $[t_0,T]$ seqmentində dəyişdikdə $x=\varphi(t)$ funksiyasının qiymətləri $[a,b]$ seqmentindən kənara çıxmasın, yəni

$a = \varphi(t_0) \le \varphi(t) \le \varphi(T) = b$ münasibəti ödənsin. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

düsturu doğrudur. Bu düstur müəyyən inteqral altında dəyişəni əvəzetmə düsturu adlanır.

İsbatı. Şərtə əsasən $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ seqmentində kəsilməzdir, ona görə də onun $[a,b]$-də $F(x)$ ibtidai funksiyası var, yəni $\forall x \in [a,b]$ üçün $F'(x) = f(x)$ olur. Onda Nüton-Leybnis düsturuna əsasən

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

olar.

Digər tərəfdən, $F(x)$ və $x = \varphi(t)$ funksiyaları uyğun olaraq $[a,b]$ və $[t_0,T]$ seqmentində kəsilməz, həm də diferensiallanan olduqlarından $F[\varphi(t)]$ mürəkkəb funksiyası $[t_0,T]$ seqmentində kəsilməz, həm də diferensiallanan olacaqdır. $F[\varphi(t)]$ mürəkkəb funksiyasının $[t_0,T]$-də *t*-yə görə mürəkkəb funksiyasının diferensiallanması qaydası ilə törəməsini alsaq,

$$\left(F[\varphi(t)]\right)_t' = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) \qquad (3)$$

olar.

(3)-də aydın olur ki, $F[\varphi(t)]$ mürfəkkəb funksiyası $[t_0,T]$ seqmentində kəsilməz $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ funksiyası üçün ibtidai funksiyadır. Onda Nyuton-Leybnis düsturuna əsasən alarıq

$$\int_{t_0}^T f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_{t_0}^T = F[\varphi(T)] - F[\varphi(t_0)] \qquad (4)$$

Bu bərabərlikdə $\varphi(t_0) = a,\ \varphi(T) = b$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = F(b)-F(a) \qquad (5)$$

olar.

(5) və (2) bərabərliklərinin müqayisəsindən isbatı tələb edilən (1) bərabərliyi alınır.

(1) düsturundan aydındır ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralının hesablanması $\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$ inteqralının hesablanmasına gətirilir. Onun üçün də $x=\varphi(t)$ əvəzləməsi aparаrkən, onu elə seçməyə çalışmaq lazımdır ki, yeni alınan inteqralın hesablanması əvvəlkinə nisbətən daha sadə olsun. Yeni inteqralın t_0 və T sərhədləri uyğun olaraq $\varphi(t)=a$ və $\varphi(t)=b$ tənliklərindən təyin edilir. Bu tənliklərin hər birinin bir neçə kökləri ola bilər, bu halda t_0 və T qiymətlərini uyğun olaraq $\varphi(t)=a$ və $\varphi(t)=b$ tənliklərinin teoremin 3) və 4) şərtlərini ödəyən istənilən köklərini qəbul etmək olar. Əgər $[a,b]$ seqmentində $x=\varphi(t)$ monoton funksiya olarsa, 4) şərti şübhəsiz ödənəcəkdir. Buna görə də əksər hallarda praktikada dəyişən, monoton funksiyalarla əvəz edilir, cünki bu funksiyalara (1) düsturunu tətbiq etmək, monoton olmayan funksiyalarla müqayisədə sadə olur.

Əgər $x=\varphi(t)$ funksiyası a və b sərhədlərinə bərabər qiymətlər ala bilməzsə, onda həmin inteqral dəyişəni əvəz etməklə hesablana bilməz.

2. Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama. Qeyri-müəyyən inteqraldakı hissə-hissə inteqrallama düsturuna uyğun olaraq, analoji qayda ilə həmin düstur müəyyən inteqral üçün də verilir.

Teorem 2. Əgər $u=u(x)$ və $\upsilon=\upsilon(x)$ funksiyaları öz törəmələri ilə birlikdə $[a,b]$ seqmentində kəsilməzdirsə, onda

$$\int_a^b u\,d\upsilon = [u\upsilon]\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du \qquad (6)$$

düsturu doğrudur. Bu düstur müəyyən inteqral üçün hissə-hissə inteqrallama düsturu adlanır.

İsbatı. Doğrudan da $[a,b]$ seqmentində $(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$ olduğundan, $u\upsilon$ funksiyası $u'\upsilon + u\upsilon'$ funksiyası üçün ibtidai funksiyadır. Onda Nüton-Leybnis düsturuna əsasən $\int_a^b (\upsilon u' + u\upsilon')dx = [u\upsilon]\Big|_a^b$ olar. $\upsilon u'$ və $u\upsilon'$ funksiyaları kəsilməz olduqlarından $\int_a^b \upsilon u'dx$ və $\int_a^b u\upsilon'dx$ inteqrallarının hər ikisi var, onda yuxarıdakı inteqralı, inteqralların cəmi kimi yazaraq, $\int_a^b (\upsilon u'dx + \int_a^b u\upsilon'dx = [u\upsilon]\Big|_a^b$, buradan da $\upsilon'dx = d\upsilon$ və $u'dx = du$ yazaraq

$$\int_a^b (u\,d\upsilon + [u\upsilon]\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du$$

bərabərliyini alarıq ki, bu da tələb edilən (6) bərabərliyidir.

IV FƏSİLƏ AİD ÇALIŞMALAR

Ayrılma üsulundan istifadə edərək qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

1. $\int (2x+1)dx$
2. $\int (3x^2+2x-1)dx$
3. $\int (x^4-3x^2+x-5)dx$
4. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$
5. $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx$
6. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}+2\right)dx$
7. $\int x^2(x^2+1)dx$
8. $\int (x^3+1)^2dx$
9. $\int \frac{x^3+3x-1}{x}dx$
10. $\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}dx$
11. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}dx$
12. $\int (a^x-2\sin x)dx$
13. $\int (\cos x+2\sqrt[5]{x^3})dx$
14. $\int \left(2^x+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)dx$
15. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}-3^{-x}\right)dx$

Dəyişəni əvəzetmə üsulundan istifadə edərək qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

16. $\int \sin 3x dx$
17. $\int \cos 5x dx$
18. $\int \frac{dx}{\cos^2 mx}$
19. $\int \frac{dx}{\sin^2 nx}$
20. $\int \frac{dx}{2-x}$
21. $\int \frac{dx}{2x-5}$
22. $\int \frac{dx}{5-3x}$
23. $\int e^x dx$

24. $\int e^{-2x+3}dx$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

27. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

29. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$

30. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

31. $\int \frac{dx}{e^x-1}$

Hissə-hissə inteqrallama üsulundan istifadə edərək qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

32. $\int \ln xdx$

33. $\int x\ln xdx$

34. $\int x^2\ln xdx$

35. $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$

36. $\int x\cos xdx$

37. $\int x\sin xdx$

38. $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx$

39. $\int x^2\sin xdx$

40. $\int x\ln^2 xdx$

41. $\int xe^x dx$

42. $\int x^2e^{-x}dx$

43. $\int e^x\sin xdx$

44. $\int e^{-x}\cos xdx$

45. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Müəyyən inteqralları hesablayın

46. $\int_a^b cxdx$

47. $\int_a^b x^2dx$

48. $\int_a^b e^x dx$

49. $\int_2^3 (3x^2+x)dx$

50. $\int_0^1 (e^x-x)dx$

51. $\int_{-1}^1 (2e^x-3x^2)dx$

52. $\int_{1}^{2}(2^x+2x+1)dx$

53. $\int_{1}^{2}(2^{-x}+e^x-3)dx$

54. $\int_{0}^{2}3x^2dx$

55. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$

56. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$

57. $\int_{1}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

58. $\int_{-5}^{-1}\frac{dx}{x}$

59. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$

60. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx$

61. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{x^2+1}dx$

62. $\int_{1}^{2}x\ln xdx$

63. $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin xdx$

64. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

65. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos^2 xdx$

67. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

68. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

69. $\int_{0}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

70. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

71. $\int_{0}^{1}\arcsin xdx$

72. $\int_{0}^{3}\ln(x+3)dx$

73. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

74. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$

75. $\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x dx$

76. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

Verilmiş parçada funksiyanın orta qiymətini hesablayın

77. $f(x) = 3x$; [-2;2] parçasında.

78. $f(x) = x^2$; [0;1] parçasında.

79. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; [1;5] parçasında.

80. $f(x) = 3^x - 2x + 3$; [0;2] parçasında.

ƏDƏBİYYAT

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. Част I,II. Физматгиз. Москва, 1971.
2. Никольский С.М. *Курс математического анализа*. Т.I,II. Наука. Москва, 1983.
3. Кудрявцев Л.Д. *Математический анализ*. Т.I,II. Высшая школа. Москва, 1981.
4. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Физматгиз. Москва, 1962.
5. Шилов Г.Е. *Математический анализ функции одного переменного*. Физматгиз. Москва, 1969.
6. İbrahimov İ.İ. *Riyazi analiz kursu*. Bakı, 1962.
7. Məmmədov R. *Ali riyaziyyat kursu*. I, II hissə. Maarif. Bakı, 1984.
8. Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. М.: Мир, 1996.
9. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Том 1,2,3. М.: Наука 1966.
10. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*. М.: 1967.
11. Демидович Б.П. *Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов*. М.: Наука, 1978.
12. Хинчин А.Я. *Краткий курс математического анализа*. М.: ГИТТЛ, 1957.

CAVABLAR

I FƏSİL.

1. a) 18, b) 0, c) 1, d) 2, e) $\cos 2\alpha$, ə) $\sec^2\alpha$. **2.** a) 2, b) $\frac{1}{2}$, c) x_1=-1, x_2=-4, d) $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{1}{6}$. **3.** a) $x>-10$, b) $-1<x<7$, c) $x>3$, d) $x<-3$. **4.** $x=16$, $y=7$. **5.** Sistemin həlli yoxdur. **6.** $x=2$, $y=3$. **7.** $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. **8.** $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$. **9.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. **10.** $x=280$, $y=-310$. **11.** a) -8, b) -12, c) 8. **12.** a) 0, b) $2a^2b$, c) 0. **13.** a) $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$, b) $\cos(\alpha+\beta)$, c) $\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}$. **14.** $x_1=2$, $x_2=-10$. **15.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **16.** $x_1=2$, $x_2=3$. **17.** $x<2$. **18.** $-6<x<-4$. **19.** $-10\le x\le -5$. **20.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **21.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **22.** Sistemin həlli yoxdur.**23.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **24.** $x=1$, $y=3$, $z=5$. **25.** Sistemin həlli yoxdur.

II FƏSİL.

1. $f(1)=\frac{1}{4}$. **2.** $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $f(2)=12, f(3)=26$. **4.** $-1\le x<+\infty$. **5.** $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. **6.** $[-1;5]$. **7.** [-1;1]. **8.** [-1;1). **9.** $x\neq 1$. **10.** $x\neq -1$, $x\neq 1$. **11.** $x\le 2$. **12.** [-2;1]. **13.** (-1;1). **14.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **15.** $\{0\}\cup[2;+\infty)$. **20.** a) Cüt, b) Cüt, c) Tək, d) Nə tək, nə də cüt, e) Tək, ə) Cüt. **21.** a) 2π, b) 2π, c) $\frac{2\pi}{3}$, d) $\frac{8}{3}$, e) $\frac{\pi}{3}$, ə) π. **22.** $\frac{3}{2}$. 23. 0. **24.** ∞. **25.** $\frac{2}{3}$. **26.** e. **27.** $\frac{1}{e}$. **28.** e. **29.** 2. **30.** 12. **31.** 2. **32.** -1. **33.** 4. **34.** 12. **35.** 15. **36.** $\frac{8}{3}$. **37.** 256. **38.** 3. **39.** 8. **40.** $\sqrt{2}$. **41.** 1. **42.** $\sqrt{2}$. **43.**

x=1 nöqtəsində kəsilməzdir. **44.** Hər iki nöqtədə kəsilməzdir. **45.** x=2 nöqtəsində kəsilməzdir. **46.** x=4 birinci növ kəsilmə nöqtəsidir. **47.** x=5 aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsi. **48.** x=0 aradan qaldırıla bilən, $x=k\pi$ (k=±1,±2,...) nöqtələri isə sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **49.** x=-2 və x=1 sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **50.** Sonsuz sayda $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k=±1,±2,...) kəsilmə nöqtələri var.

III FƏSİL.

1. $y' = 6x^2 + 3$, $y'(0) = 3, y'(-1) = 9, y'(2) = 27.$ **2.** $y = 4x^3 - 6x - 2$, $y'(0) = 2, y'(1) = -4.$ **3.** $y' = 3t^2 - 4t$, $y'(-1) = 7, y'(a) = 3a^2 - 4a.$ **4.** $y = 6x + 1$, $y'(1) = 7, y'(a+b) = 6(a+b) + 1.$ **5.** $y' = x^3 - x^2 + 2$, $y'(0) = 2, y'(c) = c^3 - c^2 + 2.$ **6.** $y' = 1$, $y'(1) = 1, y'(2) = 1.$ **7.** $y' = 5x^4 + 4x^3$, $y'(-1) = 1.$ **8.** $y' = 3ax^2 + 2a^2x + a^3$, $y'(a) = 6a^3$. **9.** $y' = nx^{n-1} + n$, $y'(a) = na^{n-1} + n, y'(a+b) = n(a+b)^{n-1} + n.$ **10.** $y' = -\frac{1}{(x-3)^2}$. **11.** $y' = x^2$. **12.** $y' = 20x^4 - 15x^2 + 24x.$ **13.** $y' = (x-5)^3(x+3)^4(9x-13)$. **14.** $y' = -2x$. **15.** $y' = -6x^2$. **16.** $y' = -\frac{\sin x}{2}$. **17.** $y' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. **18.** $y' = -\frac{2}{x^2}$. **19.** $y' = -\frac{6x}{(x^2-1)^2}$.

20. $y' = -\frac{2}{x^3}$. **21.** $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **22.** $y' = 2x\cos x^2$. **23.** $y' = -\frac{x^4 - 15x^2 + 6x}{(5-x^2)^2}$. **24.** $y' = -\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. **25.** $y' = \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$. **26.** $y' = x\,\mathrm{arctg}\,x$. **27.** $y' = \frac{2a^3}{x^4 - a^4}$. **28.** $dy = \frac{17dx}{(2x+3)^2}$. **29.**

$dy = -4x(a^2 - x^2)dx$. **30.** $dy = (24x^2 - 4x - 15)dx$. **31.** $dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}$. **32.** $dy = \dfrac{2xdx}{1+x^4}$. **33.** $dy = \dfrac{dx}{1-x^2}$. **34.** $dy = \sec^4 xdx$.

35. $y'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$. **36.** $y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. **37.** $y'' = -4\sin 2x$.

38. $y^{(IV)} = e^x$. **39.** $y''' = 8e^{2x}$. **40.** $y'' = \dfrac{1}{x}$. **41.** $y^{(V)} = 0$. **42.** $d^2y = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}dx^2$. **43.** $d^2y = \dfrac{8\,\mathrm{ctg}\,2xdx^2}{\sin^2 2x}$. **45.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{9}{16t}$.

46. 1. **47.** 1. **48.** 0. **49.** $\dfrac{1}{6}$. **50.** 2.

IV FƏSİL.

1. $x^2 + x + C$. **2.** $x^3 + x^2 - x + C$. **3.** $\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + C$. **4.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \ln|x| + C$. **5.** $-\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + C$. **6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x + C$. **7.** $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{3}x^3 + C$. **8.** $\dfrac{1}{7}x^7 + \dfrac{1}{2}x^4 + x + C$. **9.** $\dfrac{1}{3}x^3 + 3x - \ln|x| + C$. **10.** $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + C$. **11.** $\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$. **12.** $\dfrac{a^x}{\ln a} + 2\cos x + C$. **13.** $\sin x + \dfrac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + C$. **14.** $\dfrac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + C$. **15.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + \dfrac{1}{3^x \ln 3} + C$. **16.** $-\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$. **17.** $\dfrac{1}{5}\sin 5x + C$. **18.** $\dfrac{1}{m}\,\mathrm{tg}\,mx + C$. **19.** $-\dfrac{1}{n}\,\mathrm{ctg}\,nx + C$. **20.** $-\ln|x-2| + C$. **21.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x-5| + C$. **22.** $-\dfrac{1}{3}\ln|3x-5| + C$. **23.** $\dfrac{1}{5}e^{5x} + C$. **24.** $-\dfrac{1}{2}e^{-2x+3} + C$. **25.** $\sqrt{x^2 - a^2} + C$. **26.** $\arcsin\dfrac{x}{3} + C$. **27.** $\ln|\ln x| + C$.

28. $2\sqrt{x}-2\ln|\sqrt{x}+1|+C$. **29.** $2\sqrt{x+1}-4\ln|\sqrt{x+1}+2|+C$. **30.** $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$. **31.** $\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x}\right|+C$. **32.** $x\ln x-x+C$. **33.** $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$. **34.** $\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$. **35.** $-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+C$.
36. $x\sin x+\cos x+C$. **37.** $-x\cos x+\sin x+C$. **38.** $\dfrac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **39.** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. **40.** $\dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x-\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+C$. **41.** xe^x-e^x+C. **42.** $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$. **43.** $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$. **44.** $\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$. **45.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$. **46.** $\dfrac{1}{2}c(b^2-a^2)$.
47. $\dfrac{1}{3}c(b^3-a^3)$. **48.** e^b-e^a. **49.** 21,5. **50.** e-1,5. **51.** 2(e-1-e^{-1}).
52. $\dfrac{2}{\ln 2}+4$. **53.** $\dfrac{1}{\ln 2}+e^{-4}$. **54.** 8. **55.** 1. **56.** $\dfrac{\pi}{4}$. **57.** 6. **58.** -ln5.
59. $-\dfrac{1}{12}\ln 5$. **60.** π. **61.** $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{4}$. **62.** $2\ln 2-\dfrac{3}{4}$. **63.** 2π. **64.** $2-\ln 2$. **65.** $\dfrac{1}{3}$. **67.** $4-2\ln 3$. **68.** $2\ln 2-1$. **69.** $\left(\dfrac{\pi}{6}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **70.** 1. **71.** $\dfrac{\pi}{2}-1$. **72.** $3(\ln 12-1)$ **73.** $1-\dfrac{2}{e}$. **74.** 1. **75.** -2π. **76.** $\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$. **77.** 0. **78.** $\dfrac{1}{3}$. **79.** 36. **80.** $\dfrac{8}{\ln 3}+2$.

MÜNDƏRİCAT

III FƏSİL. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN DİFERENSİAL HESABI

IV FƏSİL. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN İNTEQRAL HESABI

Nazim Əsədulla oğlu Neymətov

XƏTTİ CƏBR VƏ RİYAZİ ANALİZ

Dərs vəsaiti

Çapa verildiyi tarix 16.07.2019
Kağızın növü: A3, snequroçka
Çap vərəqi: 7,6 ç.v.
Tiraj:150 ədəd
Gəncə Dövlət Universitetinin nəşriyyatı
Ünvan: Gəncə şəhəri, Heydər Əliyev prospekti,429