Ə.U.QULİYEV
N.Ə.NEYMƏTOV

RİYAZİ MƏNTİQ

(*klassik və müasir məntiq*)

GƏNCƏ 2016

Elmi redaktor
Nüyvər Loğman oğlu Nəsrullayev
Gəncə Dövlət Universiteti
Həndəsə və cəbr kafedrasının dosenti

Rəyçilər
Orcəli Hüseynqulu oğlu Rzayev
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
Zaqatala filialının direktoru, professor

Rövşən Ənvər oğlu Həsənov
Naxçıvan Dövlət Universiteti
Ümumi riyaziyyat kafedrasının dosenti

Sabir Qəhrəman oğlu Həsənov
Gəncə Dövlət Universiteti
Riyazi analiz kafedrasının dosenti

Rövşən Əlifağa oğlu Bəndəliyev
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
Riyazi analiz şöbəsinin dosenti

Vəsait Universitetlərin bakalavr pilləsində Riyaziyyat, Riyaziyyat müəllimliyi, Riyaziyyat və informatika müəllimliyi və Kompüter elmləri ixtisaslarında təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulmuşdur. Vəsaitdən həm də Universitetlərin məntiq fənni tədris olunan bütün sahələrində, eləcə də magistrlər və müəllimlər istifadə edə bilərlər.

ÖN SÖZ

Təqdim olunan kitab klassik və müasir məntiq adlandırılmaqla iki hissədən ibarətdir.

Birinci hissənin ilkin variantları 1996 və 2011-ci illərdə Respublika Təhsil Nazirliyinin qrifi əsasında dərs vəsaitləri kimi nəşr edilmişdir. Sonuncu (hazırki) variant onların yeniləşdirilmiş və təkmilləşdirilmiş formasıdır. Eyni zamanda bu hissədə cəmləşdirilmiş materiallar son dövrlərin Dövlət Standartlarında riyaziy-yat, informatika, riyaziyyat və informatika, kompüter elmləri ixtisasları üçün nəzərdə tutulmuş proqramları tam əhatə edir.

Birinci hissədə çoxluqlar nəzəriyyəsi həm cəbri, həm də aksiomatik şəkildə qurulmuşdur ki, bu da çoxluqlarla bağlı bir sıra paradoksların (məsələn, Rassel paradoksu, Kantor para-doksu və s.) yaranma səbəblərinin açılması üçün çox vacibdir. Həm də nəzərə alınmışdır ki, kitabın ikinci hissəsində verilmiş müasir məntiqin elementləri sırf çoxluqlar nəzəriyyəsi əsasında qurulmuşdur. Oxucuların mövzuları yaxşı qavramaları tələbini nəzərə alaraq ikincidən başlayaraq hər fəslin sonunda kifayət qədər məsələ və misallar verilmişdir. Bu eyni zamanda oxucunu praktik məqsədlər üçün yeni mənbə axtarmaqdan azad edir.

Klassik məntiq adlandırdığımız birinci hissə 9 fəsildən ibarət olmaqla onların düzülüşündə məntiqi arlıcıllıq gözlənilmiş-dir. Belə ki, birinci fəsildə riyazi məntiqin predmeti haqqında qısa tarixi məlumat verilir və onun müxtəlif riyazi nəzəriyyələrin qurulması, riyaziyyat əsaslarının öyrənilməsi və güclü imkanlara malik EHM-lərin yaradılmasındakı rolu göstərilmişdir.

İkinci və dördüncü fəsillərdə mülahizələr məntiqi, üçüncü və səkkizinci fəsillərdə çoxluqlar nəzəriyyəsi həm məzmunlu və həm də aksiomatik olmaqla iki formada verilmişdir.

Beşinci fəsildə predikatlar məntiqi məzmunlu şəkildə qurulur. Onun aksiomatik qurulması isə sonrakı – altıncı fəsildə verilmiş birinci tərtib nəzəriyyələrin bir xüsusi halı kimi təqdim olunur.

Yeddinci fəsildə natural ədədlər sistemi aksiomatik qurulmuşdur.

Ön söz

Vəsaitin doqquzuncu fəsli kompüter elmlərində xüsusi əhəmiyyəti olan rekursiv çoxluqlar və rekursiv hesablanan funk-siyalar nəzəriyyələri ilə tamamlanır.

Qeyd etdiyimiz kimi kitabın ikinci hissəsi müasir məntiqə həsir edilmiş, onun mühüm detalları aydınlaşdırılmışdır.

Klassik məntiq funksiyalarının qiymətləri oblastı yalnız 0 və 1 elementlərindən ibarət olmaqla ikielementli çoxluq olduğun-dan o, bir çox həyati məsələlərin – məsələn, humanitar, təsər-rüffat, idealoji, siyasi və s. – həlli üçün kafi deyildir. Belə ki, göstərilən tip məsələlərin qarşıya çıxan hər bir sualına ya «**mütləq hə**», yaxud da «**mütləq yox**» cavabı vermək həmin məsələlərin həlli üçün etibarlı hesab edilə bilməz. Ona görə də problemlərin qeyri dəqiq (bundan sonra qeyri səlis işlədəcəyik) həllərinin tapıl-ması bizi qeyri səlis çoxluq və qeyri səlis məntiq anlayışlarına gətirir. Dərs vəsaitinin ikinci hissəsi məhz elə müasir məntiq adlandırılmışdır. Bu hissə üç fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil qeyri səlis çoxluqlar nəzəriyyəsinin qurulma-sına həsr edilmiş, onu adi mənada bildiyimiz çoxluqdan fərqlən-dirən xarakterik xüsusiyyətlər göstərilmişdir.

İkinci fəsildə qeyri səlis məntiqin əsas elementləri verilmiş və onunla klassik məntiq arasındakı köklü fərqlər bütün təfər-rüatları ilə ortaya qoyulmuşdur.

Nəhayət, üçüncü fəsildə qeyri səlis məntiqin bir sıra ma-raqlı tətbiqləri verilmişdir.

Hörmətli oxucular!

Əgər haqqında Sizin rəy və təkliflərinizi bilmək müəlliflər üçün çox faydalı olardı və tənqidi fikirlərinizə görə əvvəlcədən öz təşəkkürümüzü bildiririk.

Müəlliflər
Gəncə, 2016-cı il

GİRİŞ

Obyektiv gerçəkliyin insan şüurunda düzgün inikasından ibarət olan məntiq elmi haqqında ilk təlim hələ eramızdan əvvəl IV əsrdə yunan filosofu və riyaziyyatçısı Aristotelin əsərlərində verilmişdir. Aristotelin «Orqanon» ümumi adı altında birləşdirilmiş əsərlərində formal mənti-qin əsası qoyulmuşdur. Ona görə də formal məntiq adı ilə bizə gəlib çatmış bu elmin banisi Aristotel hesab olunur. Formal məntiqə görə konkret məzmunu ilə fərqlənən mülahizələr (hökmlər) eyni formaya malik ola bilərlər.

«Məntiq» yunanca **loqos** sözündən olub dilimizə tərcümədə söz, anlayış, fikir, ideya və düşüncə mənalarında işlənir. Bəs niyə formal məntiq? Ona görə ki, burada tədqiq olunan obyektlərin forma və quruluşu əsas götürülür, onun məzmunu isə etinasız buraxılır, tədqiqat oblastından kənar-da qalır. Məsələn, «bütün metallar müəyyən fəza qurulu-şuna malikdirlər» və «bütün dövlətlərin öz qanunları var» mülahizələri müxtəlif məzmunlu olsalar da eyni bir forma daşıyırlar ki, bu da həmin mülahizələrin ümumi olması xüsusiyyətidir.

Tərkibində məntiq sözü olan hər bir sözbirləşməsini məntiqi idrak forması kimi qəbul etmək olmaz. Məsələn, «bitkilərin məntiqi» və «tarixin məntiqi» dedikdə təbiət və cəmiyyətin inkişafı qanunauyğunluqları düşünülür; yəni elə qanunauyğunluqlar ki, onların formal məntiqlə heç bir əlaqəsi yoxdur. Ancaq «elmi tədqiqatın məntiqi» və «roman yazmağın məntiqi» sözbirləşmələrinə münasibət bir qədər fərqlidir. Burada «elmi tədqiqatın məntiqi» və «roman yaz-mağın məntiqi» ifadələri idrakla, təfəkkür qanunları ilə bila-vasitə əlaqədə olub, onun məzmunundan əlavə həm də elmi və yaradıcı təxəyülün məntiqi quruluşu tədqiq edilir, for-ması diqqətdə saxlanır. Digər tərəfdən onların tədqiqat ob-lastı formal məntiqinkindən geniş olduğu üçün formal mən-tiqin qanunları ilə məhdudlaşa bilməz. Formal məntiqin öyrəndiyi sahə təfəkkür prosesləridir, onların qanunauyğun-luqlarıdır.

Ancaq onu da demək olmaz ki, yalnız formal məntiq təfəkkür və onun qanunları haqqında elmdir; çünki bir sıra başqa elmi sahələr var ki, onlar da təfəkkür prosesləri ilə məşğul olur. Buna misal olaraq dialektik məntiqi, idrak nəzəriyyəsi, psixologiya, fəlsəfə və s. elmləri göstərmək olar.

Formal məntiq, hər şeydən əvvəl, təfəkkür proses-lərini, onların məntiqi ardıcıllığı və ziddiyyətsizliyi məsələ-lərini öyrənir. Müqayisə üçün qeyd edək ki, psixologiya elmi də idrak və təfəkkür proseslərini öyrənir. Lakin formal məntiqdən fərqli olaraq psixologiya, belə məsələləri öyrənər-kən emprik və eksperimental tədqiqatlardan istifadə edir. Beləliklə, formal məntiqin tədqiqat oblastını psixologiyanın tədqiq etdiyi sahələrdən ayrılıqda öyrənmək olar, lakin dialektik məntiqi və idrak nəzəriyyəsini fərqli düşünmək mümkün deyil.

İdrak nəzəriyyəsi təfəkkürə insan şüurunun formalarından biri kimi baxır. Bu nəzəriyyə təsdiq edir ki, əgər predmetlər arasında əlaqə varsa və bu əlaqə obyektiv gerçəkliyi əks etdirirsə, o zaman həmin predmetlər haqqında bildiklərimiz həqiqətdir.

Başqa sözlə desək, insan əqli predmetlər haqqında o zaman doğru nəticə çıxarır ki, o, həqiqəti adekvat əks etdirir, obyektiv reallıqla uyğunlaşdırır.

Formal məntiq həmçinin, aparılan mühakimənin doğruluğunun təsdiqi, yaxud təkzibi məsələlərilə məşğul olur.

Formal məntiqin predmetinin şərhinə başqa bir istiqamətdən yanaşaq.

Gündəlik həyatımızda çıxarılan nəticəni təsdiq edə-rək bəzən deyirik: «Məntiqlidir!» Təbii ki, bu cür ifadə ömründə bir dəfə də olsun məntiqə aid kitab oxumayan hər bir şəxs üçün tamamilə doğru olaraq qəbul edilir. Lakin məntiq elmi faktiki olaraq elə məsələlərlə məşğul olur ki, bu məsələlər elmin və gündəlik həyatımızın hansı sahəsinə aid olmasından asılı olaraq düzgün əqli nəticə çıxara bilir.

Yuxarıda deyilənlərdən çıxış edərək formal məntiqi aşağıdakı kimi də tərif edə bilərik: *formal məntiq düzgün mühakimə apararaq əqli nəticə çıxarmağın ümumi qaydaları haqqında elmdir.* Əgər hesab etsək ki, formal məntiq yalnız təfəkkürün forma və quruluşu ilə məşğul olur, onda təfəkkürün məzmunu və predmeti nöqteyi-nəzərdən öyrənilməsi-ni dialektik məntiqin problemlərinə aid etmək olar.

Bütövlükdə, məntiqi təfəkkür insan cəmiyyətinin inkişafı prosesində yaranır. İnsan məqsədə çatmaqdan ötrü öz yaradıcılığını istiqamətləndirmək üçün həmişə düzgün düşünməli və nəticə çıxarmalıdır. Ona görə də zəruridir ki, insanlar bütün həyatı boyu düzgün fikirləşsinlər, əks təqdir-də təbiətdə və cəmiyyətdə mövcud olan qanunauyğunluqları məqsədyönlü istiqamətləndirə bilməzlər. Lakin o da məlumdur ki, təfəkkür qanunları obyektiv reallığa əsaslanır və insanların iradəsindən asılı deyil.

İnsanın düşündükləri o vaxt həqiqət olur ki, onun fikirləşdikləri real olsun və o zaman həqiqət olmur ki, o, nələri fikrində cəmləşdirirsə onlar real həyatda olmasın. Bu heç də o demək deyildir ki, formal məntiqin qanunları ob-yektiv reallıq qanunlarının bilavasitə təzahürüdür, inikası-dır.

Necə ki, məntiq qanunları insan yaradıcılığının bü-tün formaları üçün əlverişlidir, elə də onlara konkret anla-yışlar və təkliflər arasında obyektiv əlaqələr kimi baxmaq olar. Bundan əlavə söhbət belə ümumi fəlsəfi suallardan gedir ki, formal məntiqin qanunları hansı əsaslara söykənir? Anlayışların əmələ gəlməsinin əsasında nələr durur? Mən-tiqi nəticənin doğruluğu nədən asılıdır? və s.

Əgər insan təbii olaraq məntiqi cəhətdən düzgün fikirləşirsə və əqli nəticə çıxara bilirsə, onda məntiq elmini öyrənməyə ehtiyac varmı?

Məntiqi çıxarılış qaydalarını yaradıcı şəkildə tətbiq etmək üçün daha dəqiq fikirləşmək, təfəkkür qanunlarını və onların tətbiqlərini yaxşı mənimsəmək lazımdır. Təbliğatçı o zaman yüksək nailiyyət qazanar ki, o özünün mühakimə-lərini əsaslandıra bilir, düzgün isbat metodu seçir, yaxud məlum olan faktlara əsaslanaraq məntiqi qaydalarla yalan mülahizələri tədqiqat oblastından uzaqlaşdırıb, onları tək-zib etməyi bacarır.

Məntiq elminin öyrənilməsi əvvəla təfəkkürün şüura köçürülməsi prosesini asanlaşdırır, nəticədə düzgün əqli nəticə çıxarmaqla biliklər sistemi formalaşdırır; ikincisi təbii elmlərdə olduğu kimi, bilavasitə, əqli inkişaf etdirir. Bu da öz növbəsində məntiq qanunları ilə tanışlıq rolu oynayaraq onların şüurlu tətbiqlərini asanlaşdırır.

Formal məntiq, elmi araşdırmalar üçün daha geniş perspektivlər yaradır, elmi problemlərin həllində əsas vasitə rolunu oynayır. Belə problemlər bir qayda olaraq, məsələn, hər hansı elmi nəzəriyyənin sistemləşdirilməsi və ya verilmiş nəzəriyyənin məntiqi ziddiyyətsizliyinin araşdırılması zama-nı meydana çıxır.

Ümumiyyətlə, məntiq təfəkkürün forma və qanun-ları haqqında elmdir. Hansı ki, bu qanunlar bir sıra həqiqi hökmlərdən digər hökmlərin çıxarılması qaydalarını mü-əyyən edir.

Bəs onda riyazi məntiq nəyi öyrənir? Bu elmin predmeti nədən ibarətdir? Bu suallara qısa olaraq belə ca-vab vermək olar. Məsələn, mexanika elmi cisim və ya ci-simlər sisteminin hərəkəti, onu törədən səbəblər və hərəkət qanunları haqqında elm olduğu kimi riyazi məntiq də təfəkkür qanunları, onların təhlili və tətbiqi haqqında elmdir. Riyaziyyat deduktiv bir elm olduğundan təsadüf edən faktların ciddi isbatdan keçirilməsi onun bütün sahə-ləri üçün mərkəzi məsələlərdən biridir.

Ciddi isbatın nə demək olması məsələsi isə məntiqi xarakter daşıyır və ona riyazi məntiqin mühüm bir sahəsi kimi baxırlar.

Ona görə də deyə bilərik ki, riyaziyyatda istifadə olunan formal isbat metodunun ciddiliyinin əsaslandırıl-ması riyazi məntiqin əsas problemlərindən biridir. Bu problem həm də riyazi həqiqətlərin təbiətinin aydınlaş-dırılmasını tələb edir. Bir halda ki, riyazi məntiq qarşıya çıxan məsələləri riyazi metodlarla öyrənir, deməli, bu mə-sələlərə münasibətdə riyaziyyatın təbiətinə müxtəlif baxış-lar meydana gəlir. Riyaziyyatın təbiətinə aid baxışlar, əsa-sən iki qrupa bölünür. Bunlardan birini kontensivizm (məzmunlu), digərini isə formalizm (aksiomatik) adlan-dırırlar.

Birinci nöqteyi-nəzərə görə riyaziyyat tamamilə müəyyən predmetə, müəyyən məzmuna malikdir. Riyazi faktların ifadə edilməsi zamanı istifadə edilmiş obyektlər tamamilə aydın olmalıdır, dəqiq məna daşımalıdır. Məsə-lən, ədəd, çoxluq, münasibət, funksiya və sairə anlayışlar kimi burada tədqiq olunan obyektlərin də məzmunu eyni dərəcədə aydın olmalıdır.

İkinci nöqteyi-nəzərə görə isə tədqiq edilən obyekt-lər ya tərif olunmur, yaxud da tərif olunur, lakin onların xalis təbiəti məlum olmur və onun məlum olması heç lazım da deyildir. Ona görə də formalizmdə bir kateqori-yalı obyektlərin başqa kateqoriyalı obyektlərlə əvəz edil-məsi nəzəriyyənin düzgünlüyünə təsir etməyə də bilər; təki əvvəlcədən qəbul edilmiş mülahizələrin (aksiomların) doğ-ruluğu təmin edilsin.

Birinci nöqteyi-nəzərin tərəfdarları Freqe, Rassel, Brauer və onların ardıcılları idi. İkinci cəbhənin başında isə Hilbert,Bernays,Qeytinq və onların şagirdləri dururdu.

Hər iki baxışın tərəfdarları öz ideyalarını inkişaf etdirmək üçün riyazi məntiqə aid qiymətli əsərlər yazmış-lar. Məsələn, Frenkel, Çerç, Şalts, Lukaseviç, Yanovski və başqa məntiqçilərin əsərləri riyazi məntiqə aid qiymətli informasiyalarla zəngindir.

Müxtəlif riyazi nəzəriyyələr isə aksiomatik metodlarla Hilbert, Akkerman, Mastovski, Novikov, Tarski və s. kimi görkəmli alimlərin gərgin əməyi ilə işlənib hazırlanmışdır. Belə nəzəriyyələrin əksəriyyəti seçmə aksiomu, kontinium-hipotez kimi məhşur aksiomlara əsaslanır ki, bunlar da Hödel, Karri, Kuayn, Rosser və Şpikkerin elmi işlərində hərtərəfli işıqlandırılmışdır.

Peano, Dedekind və Urassman öz qiymətli əsərlərində natural ədədlərin sistematik nəzəriyyəsini riyazi məntiqin köməyilə yenidən işləyib hazırlamışlar.

Natural ədədlər nəzəriyyəsinə aid Peanonun qoy-duğu aksiomlar riyaziyyata aid müasir monoqrafiyaların özülünü təşkil edir. Məsələn, bu aksiomlar Landaunun əsərlərində nəzəri hesabın məntiqi qurulması üçün əsas olmuşdur. Bu sahədə Peanodan sonra Skolem və Lorent-sen qiymətli addım atmışlar.

Mülahizələr cəbri və predikatlar hesabı öz deduktiv şərhini Klini, Şmidt və Qentsenin monoqrafiyalarında tapmışdır. Bu monoqrafiyaların hər birində müəyyən bir deduktiv sistemə baxılmaqla digər eyni tipli nəzəriyyələrə dair tarixi və tənqidi qeydlər verilir, qurulmuş nəzəriy-yələrlə bağlı qarşıya çıxan paradoksların mahiyyəti izah edilir. Qentsenin külliyyatlarında intuistlərin baxışlarının geniş mənzərəsi açılmaqla bu nəzəriyyə tərəfdarlarının (Brauer, Markov, Kroneker, Puankare və i.a.) ziddiyyətli nöqteyi-nəzərləri ətraflı təhlil edilir. Həm də burada in-tuistlərlə formalistlər arasında bitərəf mövqe tutan Veyl, Qudsteyn, Şanin kimi görkəmli riyaziyyatçıların ikili isti-qamətləri tənqid edilir.

XIX əsrin axırlarında riyaziyyatın sistemləşdiril-məsi və əsaslandırılması üçün çoxluqlar nəzəriyyəsinin daxil edilməsi, habelə riyazi nəzəriyyələrin qurulmasında nəzəri çoxluq aparatının bütün riyaziyyat üçün əsas qəbul edilməsinin böyük əhəmiyyəti olmuşdur. Lakin bu, bir sıra paradoksların yaranması ilə nəticələnmişdir. Onu da qeyd edək ki, riyazi paradoksların (bu barədə sonralar ətraflı danışacağıq) böyük əksəriyyəti çoxluğa dəqiq tərif vermə-dən onun nəzəriyyəsinin məzmunlu şəkildə qurulması səbəbindən meydana gəlmişdir. Ona görə də çoxluqlar nəzəriyyəsinin özünün formal qurulması (kitabda buna xüsusi fəsil ayrılmışdır) alimlərin diqqət mərkəzində idi. B.Baltsano, R.Dedekind, Q.Kantor və s. kimi riyaziyyat-çıların əsərlərində inkişaf etdirilmiş çoxluqlar nəzəriyyəsi, riyaziyyat əsaslarının tədqiqi üçün perspektivli olması ilə bir çox alimlərin diqqətini cəlb edirdi. Nəzəri çoxluqla bağlı bir sıra kəşflərin riyazi məntiqin inkişafındakı rolu Q.Freqe və P.Rasselin tədqiqatlarında daha aydın görü-nürdü. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi çoxluqlar nəzəriyyə-sinin özünün daxili ziddiyyətləri ilə əlaqədar meydana çıxan paradoksların aradan qaldırılması üçün güclü mən-tiq tələb olunurdu. Məhz bu tələb riyazi məntiqin sərbəst bir elm kimi meydana gəlməsinə səbəb oldu.

XX əsr elmi texniki inqilabın ən böyük naliyyətlərin-dən biri güclü elektron hesablama maşınlarının və avto-matik idarəetmə sistemlərinin yaradılmasıdır. Belə ma-şınların və idarəetmə mərkəzlərinin yaradılması böyük həcmli informasiyaları yüksək sürətlə işləyib hazırlamaq, habelə qarşılıqlı əlaqədə olan minlərlə dəyişənlərin təsvir et-diyi mürəkkəb sistemlərin təhlili üçün geniş imkanlar açdı. Bu qabildən olan mürəkkəb sistemlərə, məsələn, ehtiyatların istifadə edilməsi, nəqliyyat axınının nizamlanması, şəhər təsərrüfatının idarə olunması, iqtisadi planlaşdırma və s. kimi problemləri aid etmək olar.

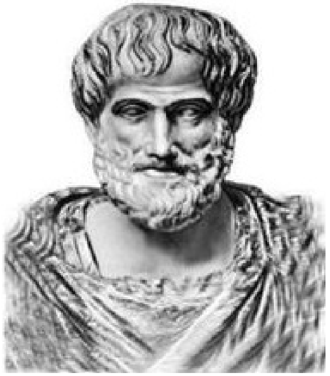
Bununla belə, hələ də mübahisəli qalırdı ki, görəsən bəzi mürəkkəb sistemlərin, məsələn, humanitar sistemlərin analizi üçün adi miqdarı analiz doğrudan da, effektli hesab edilə bilərmi? Başqa sözlə, ancaq insanların bilik və müha-kiməsi tələb olunan sistemlər üçün miqdari analiz nə dərə-cədə

effektli hesab edilə bilər? Məlumdur ki, bir qayda olaraq, belə sistemlər kifayət qədər mürəkkəb olmaqla həm də işləmə prinsipləri ədədi kəmiyyətlərlə təsvir olunan mexa-niki sistemlərə nisbətən, dəqiq və korrekt təyin olunmurlar. Təbiidir ki, kifayət qədər mürəkkəb olan humanitar sistem-lər (məsələn, humanitar məsələlər, siyasi şərhlər, edilən mə-ruzələr və s.) ümumi qəbul edilmiş miqdari metodlardan fərqli analiz metodlarının tətbiqini tələb edir. Başqa sözlə desək, belə sistemlərin real modelləşdirilməsinin təhlili üçün miqdari metodların tətbiqini bir qədər sadələşdirib onun əvəzinə linqvistik metodları daxil etmək zərurəti yaranır; yəni elə metodlar ki, dəyişənlərin aldığı qiymətlər təkcə ədəd deyil, həm də təbii və ya süni qurulmuş dilin sözləri və ya cümlələridir. Belə dəyişənlər, məhz, qeyri səlis məntiqin, habelə təqribi mühakimə və qərar qəbul etmə nəzəriyyəsinin əsasını təşkil edir.

Beləliklə, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi elektron he-sablama maşınları, məsələn, mexanika, fizika, kimya, elektrik dövrələri və elektromaqnetizm qanunları ilə idarə olunan sistemlər üçün yüksək effektli olduğu halda, təəssüf ki, bunu humanitar sistemlər üçün demək olmaz. Doğrudan da, bu maşınlar fəlsəfə, psixologiya, ədəbiyyat, sosiologiya, hüquq, siyasət və s. kimi humanitar sahənin qarşıya çıxan bir sıra əsas problemlərinin həlli üçün müvəffəqiyyətli hesab edilə bilməz.

Humanitar sahənin nisbətən mürəkkəb və korrekt təyin olunmayan problemlərinin öyrənilməsinin ədədlərlə deyil, sözlər və ya cümlələrlə təsvir edilməsi onunla şərtlənir ki, bir qayda olaraq, linqvistik təsvir prosesin ədədlərlə təsvirindən az konkret və dəqiqdir. Məsələn, «Orxan gənc-dir» ifadəsi «Orxanın 20 yaşı var» cümləsinə nisbətən az korrekt və informativdir. Bu mənada **gənc** sözünə **yaş** linq-vistik dəyişəninin qiyməti kimi baxmaq olar.

I HİSSƏ. Klassik məntiq



Təbiət heç bir ideyadan asılı deyıl, ideyalar isə onun əsasında yaranır.

Aristotel

I FƏSİL. MÜXTƏLİF NƏZƏRİYYƏLƏRİN QURULMASINDA RİYAZİ MƏNTİQİN ROLU.

§1. Riyazi məntiqin predmeti və onun inkişafı haqqında qısa tarixi oçerk

Riyazi məntiq riyazi isbatları, onların səmərəli üsullarını və habelə formal qurulmuş riyazi nəzəriyyələrin əsaslandırılması məsələlərini öyrənir. Başqa sözlə riyazi məntiqi öyrənmək riyaziyyatda istifadə olunan məntiqi əlaqələri öyrənmək deməkdir. Odur ki, məntiq elmi müxtəlif metodlara əsaslanaraq riyazi nəzəriyyələrin qurulmasında mühüm bir vasitə kimi böyük əhəmiyyətə malikdir.

Riyazi məntiqin əsas anlayışlarından biri mülahizədir.

Mülahizə **doğru** və ya **yalan** olması barədə hökm etmək mümkün olan nəqli cümləyə deyilir.

Məntiqin əsas qanunlarından biri olan üçüncünün istisna edilməsi qanununu rəhbər tutaraq deyə bilərik ki, hər bir mülahizə eyni zamanda həm doğru, həm də yalan ola bil-məz.

Biz bundan sonra doğru mülahizələri təklif adlandıracağıq.

Məntiq nəzəriyyəsində əqli nəticənin və təfəkkürün köməyilə verilmiş mülahizə və ya mülahizələr sisteminin doğruluğuna arxalanaraq onlardan asılı başqa mülahizənin doğru və ya yalan olması haqqında dəqiq fikir söyləmək olar. Həm də burada tədqiq olunan mülahizənin yalnız forma və quruluşu əsas götürülür, onun məzmununa əhəmiyyət verilmir. Misal üçün, riyaziyyatda ən çox təsadüf olunan sılloqizm qanununu götürək. Bu qanun təsdiq edir ki, əgər B hökmü A hökmünün məntiqi nəticəsidirsə və C hökmü də B hökmünün məntiqi nəticəsidirsə, onda C hökmü A-nın məntiqi nəticəsidir. Bunu biz sonralar belə yazacağıq: $A \Rightarrow B$ və $B \Rightarrow C$ olarsa, onda $A \Rightarrow C$. Eyni zamanda bu qanun A, B, C hərfləri ilə hansı obyektlərin işarə edilməsin-dən asılı deyildir.

Riyazi məntiqin əsas tədqiqat obyekti müxtəlif hesablardır: natural ədədlər hesabı, mülahizələr hesabı, predikatlar hesabı və s.

Hər bir hesab isə aşağıdakı əsas komponentlərdən ibarətdir: *a*) hesabın formal dili, *b*) hesabın aksiomları, *c*) çıxarılış qaydaları.

Bu komponentlərin köməyilə riyazi isbat anlayışına ciddi tərif verilir və nəzəriyyənin bu və ya başqa təklifinin isbatının mümkünlüyü və ya qeyri-mümkünlüyü təsdiq edilir.

Hər bir riyazi nəzəriyyəni ifadə edərkən biz hər dəfə məntiqdən istifadə etməli oluruq.

Məsələn, hələ eramızdan əvvəl 330-320-ci illərdə Evklid özünün «Başlanğıclar»ında aksiomlar daxil etmiş və məntiqin köməyilə həndəsənin teoremlərini həmin aksiomlardan almışdır.

Nəinki riyazi, həmçinin, başqa elmi bilikləri sistemləşdirmək, mühakimə yürütmək, mülahizələr söyləmək və habelə onu isbat etmək üçün məntiqdən əsas vasitə kimi geniş istifadə edilir. Ayrı-ayrı mülahizə və nəticələrin doğru və ya yalan olması məntiqi maraqlandırmır. Onun əsas məq-sədi, düzgün mühakimə metodlarını formal olaraq sistemləş-dirmək və bunlardan doğru nəticə alındığını çıxarmaqdan etməkdən ibarətdir.

Məntiq elminin bütün elmlər üçün baza olmasına bax-mayaraq, riyazi nəzəriyyələrin dərin məntiqi təhlilinə maraq yalnız XIX əsrin ortalarında qeyri-Evklid həndəsəsinin kəşfi və riyazi analiz elminin bəzi məsələlərinin ciddi əsaslandı-rılmasını təmin etmək zərurəti nəticəsində yaranmışdır. Təx-minən 160 ilə yaxın bir dövr ərzində o, bir sıra paradoks-ların, yəni ziddiyyətə gətirən mühakimələrin daxili sirlərinin açılmasına kömək etmişdir. Paradoks (bəzən buna antino-miya da deyirlər) elə bir vəziyyətdədir ki, burada nəzəriyyə-nin biri digərinin inkarı olan iki müəyyən təklifinin doğru-luğu həmin nəzəriyyədə istifadə edilən vasitələrin köməyilə inandırıcı şəkildə sübut edilir. Əgər riyazi sofizmlər qəsdən gizli şəkildə səhv əqli nəticə çıxarmağın məhsuludursa (mə-sələn, $\frac{36-36}{6-6}=\frac{(6-6)(6+6)}{(6-6)}=12$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ və s.), riyazi para-dokslar bir qayda olaraq baxılan nəzəriyyənin fundamental çatışmazlıqları nəticəsində yaranır. Adətən, nəzəriyyədə pa-radoksların aşkar edilməsi onun yenidən qurulmasını tələb edir. Bu xüsusiyyət hələ antik dövrdən filosofların va riya-ziyyatçıların diqqət mərkəzində olmuşdur. Məsələn, Kant fəlsəfəsində mühüm rol oynayan antinomiyaların tədqiqi diqqəti cəlb edirdi. Belə paradokslardan (antinomiyalardan) biri filosof Zenonun adı ilə bağlı olan məşhur «Axilles və tısbağa» məsələsidir. Tarixi əfsanələrdən məlum olduğu ki-mi Axilles cəldyeriyən, çox böyük addım atan qeyri-adi var-lıqdır (necə deyərlər addımının birini burada, digərini «Fitil-börkdə» atarmış). Tısbağa isə çox kiçik sürətə malik bir hey-vandır (el arasında ləng hərəkəti tısbağa sürətilə müqayisə edirlər).

Sonsuz çoxluq anlayışını əsas götürərək Zenon isbat edir ki, tısbağa kiçik bir zaman fasiləsi qədər, məsələn, 10 dəqiqə eyni istiqamətdə Axillesdən tez hərəkətə başlasa «uzun ayaqlı» Axilles kiçik sürətli tısbağanı heç vaxt ötüb keçə bilməz. Bu paradoksun sirri parçanın yarıya bölünməsi prosesinin sonsuz olmasındadır. Doğrudan da Zenon məsə-ləsi tipli («Ox», «Stadion» və s.) paradoksların daxili sirləri açılmasaydı, onda praktik olaraq bizim hər birimizin, misal üçün, iş yerindən çıxıb evimizə getməyimiz sanki qeyri-mümkün olardı, bir stəkan çayı içib qurtara bilməzdik, bir kitabı heç vaxt oxuyub qurtarmazdıq, əbədi yaşayardıq və s. Nəticə etibarilə Darvinin təkamül, Eynşteynin nisbilik nəzə-riyyələri, Nyutonun ümumdünya cazibə qanunu və i. a. kimi böyük kəşflər də yalan olardı.

Qeyd etmək lazımdır ki, riyazi paradoksların böyük əksəriyyəti nəzəri çoxluq konstruksiyasının özünün daxili ziddiyyətləri ilə bağlıdır. Misal üçün, riyaziyyatda tez-tez rast gəldiyimiz Rassel paradoksuna baxaq.

Rassel paradoksu. Məlumdur ki, çoxluq dedikdə eyni xassəyə malik hər hansı obyektlər yığımı nəzərdə tutulur. Məsələn, bütün həqiqi ədədlər çoxluğu, bütün kitablar çox-luğu, bütün riyaziyyatçılar çoxluğu və s. Sinif, ailə, külliyyat, ansambl, heyət və s. sözləri çoxluq sözünün sinonimləridir. Çoxluğun elementlərinin özləri də çoxluqlar ola bilər. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır. Müəyyən bir çoxluq özü-nə element kimi daxil ola bilərmi? Bu suala Rassel aşağıdakı kimi cavab vermişdir. Özünə element kimi daxil olmayan bütün çoxluqlar sinfini Y ilə işarə edək. Yəni $Y=\{X/X\overline{\in}X\}$. Əgər Y özünə element kimi daxil olsaydı, başqa sözlə $Y\in Y$ isə, onda Y çoxluğunun təyininə görə $Y\overline{\in}Y$. Əksinə, əgər $Y\overline{\in}Y$ olsaydı, onda yenə də Y çoxluğunun xassəsinə görə $Y\in Y$ alardıq. Deməli, Y çoxluğu özünə həm element kimi daxildir, həm də özünün elementi deyil. Göstərilən xassəyə malik çoxluğun olmadığını qəbul etməklə Rassel paradoksu ilə alınan ziddiyyətdən azad olmaq mümkündür. Ancaq məsələyə bu cür yanaşma vəziyyəti nəinki sadələşdirər, hətta bizi daha böyük çətinliklərlə qarşılaşdırardı. Rassel paradoksunun (həmçinin, bu tipli digər paradoksların) yaranmasının əsas səbəbi nəzəri çoxluq anlayışına ciddi tərif vermədən onu müxtəlif vəziyyətlərdə izah etməyin və yaxud çoxluğu özünün hər hansı xarakterik xassəsi ilə «sadəlövhcə-sinə» konstruktiv qurmağın nəticəsidir. Göründüyü kimi Rassel paradoksu çoxluğun şərtlə verilməsi konsepsiyasına ciddi zərbədir.

Kantor paradoksu. Bu paradoksun qoyuluşunda istifadə ediləcək bəzi anlayış və məlumatları qeyd edək.

Tutaq ki X və Y verilmiş iki çoxluqdur.

Tərif 1. Əgər X və Y çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkündürsə (yəni X çoxluğunun hər bir x elementinə Y çoxluğundan yeganə y elementi və tərsinə hər bir $y \in Y$ elementinə yalnız həmin $x \in X$ elementi qarşı qoyularsa), onda X və Y çoxluqları ekvivalent çoxluqlar adlanır və $X \simeq Y$ kimi işarə edilir.

Tərif 2. Əgər X və Y çoxluqları ekvivalent olarsa, onda onlara eynigüclü (bərabərgüclü) çoxluqlar deyilir.

Başqa sözlə əgər $X \simeq Y$ isə, onda deyirlər ki X və Y çoxluqları eyni gücə (eyni kardinal ədədə) malikdirlər. Y çoxluğunun gücünü və ya kardinal ədədini $k(Y)$-lə işarə edək.

Əgər X çoxluğu Y çoxluğunun hər hansı altçoxluğu ilə eynigüclüdürsə, lakin Y çoxluğu X-in heç bir altçoxluğu ilə eynigüclü deyilsə, onda deyirlər ki X çoxluğunun gücü (kardinal ədədi) Y-in gücündən (kardinal ədədindən) kiçikdir.

Qeyd edək ki, Kantor paradoksu kardinal ədədlə əlaqədar olub aşağıdakı kimi qoyulur. Əgər Y çoxluğu Z çoxluğunun hər hansı altçoxluğu ilə eynigüclüdürsə, onda deyirlər ki Y-in kardinal ədədi Z çoxluğunun kardinal ədədindən böyük deyil və $k(Y) \le k(Z)$ kimi işarə olunur, $k(Y) \le k(Z)$ və $k(Y) \ne k(Z)$ olmasını isə $k(Y) < k(Z)$ kimi təyin edək.

Kantor isbat etmişdir ki, əgər $P(Y)$ Y-in bütün altçoxluqları çoxluğu olarsa, onda $k(Y) < k(P(Y))$.

İndi tutaq ki, U universal çoxluqdur, yəni bütün çoxluqların çoxluğudur.

$P(U)$ U çoxluğunun altçoxluğu olduğundan, aydındır ki, $k(P(U)) \le k(U)$.

Digər tərəfdən Kantor teoreminə görə $k(U) \le k(P(U))$. Çoxluqlar nəzəriyyəsinə aid Şreyder-Bernşteyn teoreminə görə isə əgər $k(Y) \le k(Z)$ və $k(Z) \le k(Y)$-dirsə, onda $k(Y) = k(Z)$; deməli alırıq ki, $k(U) = k(P(U))$, bu isə $k(U) < k(P(U))$ olmasına ziddir.

Dəqiq ifadə edilmiş xassələrə istinad edən problemləri ancaq ciddi məntiqi dilin qurulması sayəsində məqbul həll etmək mümkündür. Xüsusilə, çoxluqlar nəzəriyyəsi ilə əlaqədar meydana çıxan paradokslardan azad olmağa bu nəzəriyyənin qurulmasına aksiomatik yanaşma müvəffəqiyyətli yol hesab edilə bilər. Nəzəri çoxluq anlayışı ilə bağlı olan paradoksların dərin məntiqi izahı Brauer və onun intuist məktəbi tərəfindən verilmişdir.

İntuistlər - varlığı təcrübə və məntiqi nəticələrin köməyilə deyil, bilavasitə «seyr» yolu ilə dərk etmək, həqiqi idrakı yalnız intuisiya əsasında duymaq tərəfdarı olan bu mürtəce cərəyan məntiqin bəzi əsas qanunlarının universal xarakterini rədd edirdi. Onların fikrincə, məsələn, üçüncü-nün istisna edilməsi və ziddiyyət kimi məşhur qanunlar yal-nız sonlu çoxluqlar üçün doğrudur və heç bir məhdudiyyət qoymadan onları bütün çoxluqlara aid etməyə əsas yoxdur.

1903-cü ildə yuxarıda haqqında danışdığımız Rassel paradoksunun çap edilməsi riyaziyyatçı filosofların heyrətinə səbəb oldu.

1908-ci ildə Brauer klassik məntiq qanunlarının sonsuz çoxluqlara tətbiq edilməsi əleyhinə çıxış etdi. Onun irəli sürdüyü intuist proqramda «aktual sonsuzluq» anlayışından imtina etmək təklif olunurdu.

«Aktual sonsuzluq» dedikdə elə sonsuz külliyyat nəzərdə tutulur ki, onun qurulması başa çatmış olsun və elementləri eyni zamanda təsəvvür edilsin. Məsələn, tam ədədlər çoxluğu ilə işləyərkən biz, aktual sonsuzluqla qarşılaşı-rıq. Kifayət qədər böyük tam ədədin varlığını fərz edən intuistlər tam ədədlər külliyyatına qurulması başa çatmış çoxluq kimi baxmağın əleyhinə çıxırdılar. O vaxtın məşhur riyaziyyatçı məntiqçiləri Kronekerin, Borelin, Luzinin, Fon Neymanın, Bernaysın və s. əsərlərində də Brauerin bu tənqidi istiqaməti hiss edilirdi.

1910-cu ildə Hilbert Brauerin ciddi intuist hücumlarına və bütün riyaziyyatı yenidən qurmaq tələbinə qarşı cəsarətlə çıxış etdi. Hilbert qarşıya çıxan çətinliyi aradan qaldırmaq üçün başqa yol təklif edirdi. O, aksiomatik metodun tətbiqinə əsaslanmağı və belə modellərdə ziddiyyətsizlik məsələsini etibarlı finit (sonlu, məhdud) vasitələrin köməyilə birbaşa tədqiq etməyi əsas götürürdü. Bu metod Hilbert finitizmi adını almışdır.

İndi isə riyazi məntiqin semantik quruluşu ilə əlaqədar olan yalançı paradoksunu nəzərdən keçirək.

Bir nəfər deyir: «Mən aldadıram». Əgər o, doğrudan da aldadırsa, deməli, onun *aldadıram* dediyi yalandır və o aldatmır. Əksinə əgər o, aldatmırsa, onda onun *aldadıram* deməsi doğrudur və deməli o, aldadır. Beləliklə o, eyni zamanda həm aldadır və həm də aldatmır. Yalançı paradoksunu daha konkret şəkildə kritli Epimenid (b.e.ə.VI əsr)

söyləmişdir. Epimenid demişdir: bütün kritlilər yalançıdırlar.

Epimenid özü kritlidir.

Deməli, o, yalançıdır.

Sonra isə belə mühakimə aparılır. Əgər Epimenid özü yalançıdırsa, onda onun «bütün kritlilər yalançıdırlar» fikri yalandır, deməli, kritlilər yalançı deyillər.

Epimenid özü kritlidir.

Deməli, o, yalançı deyil və onun «bütün kritlilər yalançıdırlar» fikri doğrudur.

İstər yalançı paradoksunda, istərsə də bu məzmunda olan digər (məsələn, kənd bərbərxanası paradoksu, Evbumed paradoksu, Epimenid paradoksu və s.) paradokslarda da Rassel paradoksunda olduğu kimi belə bir adamın olmadığını qəbul etməklə çətinlikdən yaxa qurtarmaq olardı. Lakin göründüyü kimi, bu yalançı üzərinə qoyulan şərt (kənd bərbərxanasında olduğu kimi) həyat şəraiti ilə bağlı şərtdir, daxili ziddiyyətdir və deməli onun səbəblərini nə riyazi nəzəriyyələrdə, nə də nəzəri çoxluqla əlaqədar məsələlərdə axtarmaq lazım deyildir. Doğrudur, belə nöqteyi-nəzər təbii olaraq həyat hadisələrinin daxili ziddiyyətsizliklərinin açılması kriteriyası üçün vacibdir, ancaq Rassel paradoksundan fərqli olaraq burada qoyulan problem heç də orada olduğu qədər aktual deyildir. Məntiqin semantikasından (dil üslubundan) meydana gələn bu tip paradokslar formal aksiomatik nəzəriyyənin tam olmaması haqqında məşhur Hödel teoreminin əsasını təşkil edir. İstər çoxluq nəzəriyyəsi ilə, istərsə də semantik quruluşla bağlı olan paradoksial məsələlər (antinomiyalar) hazırda kifayət qədər öz izahını tapmamışdır. Onların aradan qaldırılmasının əsas yollarından biri çoxluq nəzəriyyəsinin əsası Hödel tərəfindən qoyulmuş aksiomatik qurulması ideyasıdır. Lakin onun özünün də ciddi çətinlikləri vardır.

Riyazi məntiqin inkişafının sonrakı müvəffəqiyyətləri de Morqan, Bul, Şreder, Freqe, Peano və s. kimi görkəmli alimlərin adı ilə bağlıdır. Lakin o yeni bir elm sahəsi kimi Uaytxed və Rasselin əsərlərində inkişaf etdirilmişdir.

Riyazi məntiqin sərbəst bir elm kimi meydana gəlməsində Hilbert, Hödel, Post, Çerç, Klini, Kolmoqorov, Novikov, Markov və s. kimi görkəmli riyaziyyatçıların böyük əməyi olmuşdur. Onların əsərlərində riyaziyyatın deduktiv xarakteri açılır, qarşıya çıxan xüsusi faktlar ümumiləşdirilir və induktiv metodlar əsaslandırılır.

§2. Riyaziyyatın deduktiv xarakteri

Məlumdur ki, riyaziyyatda ən geniş yayılmış metodlardan biri deduktiv mühakimə və ya isbat metodudur. Bu metod ciddi məntiqi əsaslara arxalanır.

Deduksiya elə bir mühakimə metodudur ki, burada ümumi mülahizələrdən xüsusi nəticələr çıxarılır. Belə bir misala baxaq. Bütün canlılar yatırlar. Bu ümumi bir mülahizədir. Pişik də canlıdır (xüsusi mülahizə). Deməli, pişik də yatır.

Başqa bir misal. Rəqəmləri cəmi 9-a bölünən bütün ədələr 9-a bölünür, $100^{100}-1$ ədədinin də rəqəmləri cəmi 9-a bölünür. Deməli, $100^{100}-1$ ədədi 9-a bölünür.

Daha bir misal. Paraleloqramın qarşı tərəfləri cüt-cüt konqruentdir. Romb da paraleloqramlar ailəsinə mənsubdur. Buradan da belə bir məntiqi nəticə çıxır ki, rombun da qarşı tərəfləri cüt-cüt konqruentdir.

Deduktiv metod müəyyən aksiomlar sisteminə əsaslanan isbat metoduna deyilir. Bu səbəbdən həmin metoda bəzən aksiomatik metod da deyirlər. Bundan sonra deduktiv metod və aksiomatik metod anlayışlarına sinonimlər kimi baxacağıq.

Deduktiv metodun əsasını təşkil edən aşağıdakı iki mühüm cəhəti fərqləndirmək lazımdır:

a) riyazi obyektlərin seçilməsi,

b) bu obyektlər arasında münasibətlərin müəyyən edilməsi.

Hər hansı riyazi obyektlər sistemini tədqiq edərkən, hər şeydən əvvəl, onların xassələrini və aralarındakı qarşılıqlı münasibətləri ifadə etmək üçün lazım olan terminlər müəyyənləşdirilir. Bundan sonra isə həmin obyektlərin özlərini və onların xassələrini və aralarındakı münasibətləri təyin etmədən bir sıra mülahizələr söylənilir ki, həmin xassə və münasibətlər bu mülahizələrdə öz əksini tapır. Bu mülahizələr bütün mümkün obyektlər sistemindən elələrini ayırır ki, onlar üçün bu xassələr və münasibətlər ödənilsin. Beləliklə, söylənilən mülahizələrə müəyyən obyektlər sinfini, onların xassələrini və aralarındakı münasibətləri təyin edən başlıca amillər kimi baxmaq olar. Həmin bu mülahizələri, quracağımız nəzəriyyənin ilkin doğru mülahizələri və ya aksiomları adlandıracağıq.

Tutaq ki, latın əlifbasının $a, b, c, ...$ hərfləri ilə işarə edilmiş obyektlərin hər hansı çoxluğu verilmişdir. Bu obyektlər arasında «aktivdir» termini ilə ifadə edilmiş binar münasibəti isə $\in$ simvolu ilə işarə edək.

Aşağıdakıları ilkin doğru mülahizələr olaraq qəbul edək:

1. Heç bir obyekt özü-özündən aktiv deyil. Bunu biz simvolik olaraq $a \overline{\in} a$ kimi işarə edəcəyik.

2. Əgər a aktivdir b və b aktivdir c olarsa, onda a aktivdir c (simvolik olaraq, əgər $a \in b$ və $b \in c$ isə onda $a \in c$). Aydındır ki, elementlər arasında $\in$ binar münasibəti təyin edilmiş elə obyektlər çoxluğu tapmaq olar ki, həmin çoxluqda 1 və 2 mülahizələri doğru olar və elə obyektlər çoxluğu göstərmək olar ki, onun elementləri üçün 1 və 2 mülahizələri yalan olar.

Məsələn, baxdığımız obyektlər müəyyən bir hərbi hissədə xidmət edən əsgərləri, «aktivdir» termini ilə ifadə edilmiş «a aktivdir b-dən» münasibətini isə əsgərlərin boy sırasına görə nizamlı düzülüşündə Babəkin İsadan əvvəl durması kimi təsəvvür etsək, onda həmin hərbi hissənin əsgərləri çoxluğu üçün 1, 2 mülahizələri doğru olar.

Lakin $a,b,c,...$ obyektləri olaraq hər hansı universal çoxluğun altçoxluqlarını, «aktivdir» termini əvəzinə «daxildir» ifadəsi işlətsək, onda «a aktivdir b-dən» cümləsi «a daxildir b-yə ($a \in b$) kimi» işlədilər və bu halda, 1, 2 mülahizələrinin hər ikisi eyni zamanda baxılan obyektlər uçün doğru olmaz.

İndi fərz edək ki, baxdığımız obyektlər külliyyatı kimyəvi elementlər çoxluğudur, «aktivdir» termini isə kimyadan məlum olan aktivlik anlayışı ilə üst-üstə düşür (məsələn, K elementi Na-dan əvvəl gəlir, Na elementi Mg-dan əvvəl gəlir və s.). Aydındır ki, bu obyektlər uçün «a aktivdir b-dən» münasibəti 1, 2 mülahizələrini doğru mülahizələrə çevirir. Buna əsaslanaraq böyük kimyaçı Beketov metalların aktivlik sırasını müəyyən etmişdir.

Lakin, «aktivdir» terminini həndəsi fiqurlar çoxluğunda təyin edilmiş «oxşardır» anlayışı ilə əvəz etsək, həmin çoxluqda 1, 2 mülahizələrinin hər ikisi eyni zamanda doğru olmaz.

Bu misallardan görünür ki, aralarında konkret münasibət təyin edilən və 1, 2 mülahizələrini ödəyən obyektlər sistemi müəyyən bir sinif əmələ gətirir. 1, 2 mülahizələrinə bu sinfin tərifi kimi baxmaq olar. Müəyyən mülahizələrin köməyilə biz verilmiş obyektlər külliyyatından konkret obyektlər sinfini bilavasitə ayıra biliriksə, həmin mülahizələr məhz nəzəriyyənin aksiomlarıdır.

1,2 aksiomlarının bütün interpretasiyası riyaziyyatda leksikoqrafik nizamlanma nəzəriyyəsi adlanır. Belə nizamlanma ilə biz kataloqlar tərtib edərkən, coğrafi xəritələr, məlumat sorğu kitabları düzəldərkən, çoxdəyişənli polinomların hədlərini düzərkən və s. rastlaşırıq.

İndi tutaq ki, 1, 2 mülahizələrini ödəyən obyektlər arasında həmin terminlə ifadə edilmiş belə bir mülahizə də doğrudur.

3. İstənilən a və b obyektləri üçün ya «a aktivdir b-dən», yaxud «b aktivdir a-dan».

Bu yeni qəbul etdiyimiz mülahizə 1, 2 aksiomlarını ödəyən obyektlərin müəyyən etdiyi siniflər içərisindən elələrini ayırar ki, onların bütün elementləri üçün 1-3 mülahizələri doğru mülahizəyə çevrilsin.

1,2,3 mülahizələri əsasında qurulmuş bu yeni aksiomatik nəzəriyyə ciddi nizamlanma nəzəriyyəsi, həmin aksiomların ayırdığı obyektlər çoxluğu isə ciddi nizamlanmış çoxluq adlanır. Məsələn, tam ədədlər çoxluğu «kiçikdir» terminınə görə ciddi nizamlanmış çoxluqdur.

Lakin qeyd edək ki, tam ədədlər sistemini yalnız 1 - 3 aksiomlarının köməyilə təyin etmək olmaz, çünki həmin aksiomları ödəyən və tam ədədlər sistemi ilə üst-üstə düşməyən başqa sinif obyektlər də vardır.

İndi fərz edək ki, obyektlər çoxluğu e, a, b, c hərfləri ilə işarə edilmiş dörd elementdən ibarətdir. Burada ilkin terminlər olaraq • kimi işarə olunan «vurma» və $=$ kimi işarə olunan «bərabərlik» anlayışını qəbul edək.

Aşağıdakı bərabərliklərlə ifadə olunan mülahizələri quraçağımız nəzəriyyənin aksiomları adlandıraq.

$$e \cdot e = e,\ e \cdot a = a \cdot e = a,\ e \cdot b = b \cdot e = b,\ e \cdot c = c \cdot e = c,$$
$$a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = e,\ a \cdot b = b \cdot a = c,\ a \cdot c = c \cdot a = b,$$
$$b \cdot c = c \cdot b = a$$

Beləliklə, götürdüyümüz obyektlərin, • və $=$ kimi işarə etdiyimiz binar əməlin və münasibətin, habelə qəbul etdiyimiz aksiomların mahiyyətinə varmadan hər hansı bir aksiomatik nəzəriyyə qurmuş oluruq. Bu formal nəzəriyyənin bütün interpretasiyası dörd dərəcəli multiplikativ qrupdur.

Məsələn, baxdığımız obyektlər $1,\ -1, i,\ -i$ kompleks ədədlərindən ibarət olarsa, onda vahidin dörd dərəcədən köklərinin multiplikativ qrupunu alarıq.

Əgər e, a, b, c elementlərini uyğun olaraq $E, -E$, $iE, -iE$ (burada E ikitərtibli kvadrat matrisdir) kimi şərh etmiş olsaq, onda dördelementli kvadrat matrislərin multiplikativ qrupunu alarıq. Başqa bir misal göstərək:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

dörddərəcəli əvəzləmələr olarsa, onda dörddərəcəli simmetrik qrupun hər hansı bir dördtərtibli altqrupunu alarıq və s.

Qeyd edək ki, yuxarıda qəbul etdiyimiz aksiomlarla verilmiş qrupların bütün interpretasiyaları izomorfdur.

Bir daha yada salaq ki, nəzəriyyəni aksiomatik qurarkən, istər baxdığımız obyektlər, istərsə də onun elementləri arasında tapılmış münasibətlər təyin edilmədən ümumi mülahizələr söylənilir, sonra isə həmin obyektlərə və münasibətlərə konkret məna verməklə söylənilən mülahizələrin də mahiyyəti açılır. Yalnız bundan sonra o, dəqiq riyazi (fiziki, kimyəvi və s.) struktura çevrilir.

Aksiomatik metodun deduktiv xarakteri də buradan aydın olur.

Aksiomatik nəzəriyyə, adətən, hər hansı intuitiv nəzəriyyədən doğur. Doğrudan da hesabın, mexanikanın, ehtimal nəzəriyyəsi və həndəsənin bugünkü aksiomatik qurulması bu elmlərin tarix boyu inkişaf etmiş intuitiv bazasına əsaslanmışdır. Duymaq və bilavasitə «seyr etmək» nəticəsində quracağımız nəzəriyyənin əsasını təşkil edən obyektlər və onların malik olduqları əsas xassələr seçilib ayrılır. Sonra isə seçilmiş obyektləri adlandırmaq (işarə etmək) üçün hər hansı simvollar (xüsusi halda sözlər də ola bilər) daxil edilir ki, həmin əsas xassələr bu simvolların köməyilə yazılır. Bu simvollar nəzəriyyənin ilkin simvolları və ya terminləri, seçilib ayrılmış əsas xassələr isə aksiomlardır. Daha sonra nəzəriyyədə elə qaydalar müəyyən edilir ki, onların köməyilə aksiomlardan məntiqi nəticələr çıxararaq həmin aksiomları ödəyən bütün obyektlər külliyyatı üçün doğru olan yeni mülahizələr söyləmək mümkün olsun. Bu yeni təkliflər nəzəriyyənin teoremləri, onların alınması qaydası isə çıxarılış qaydaları adlanır.

Klassik məntiq. Müxtəlif nəzəriyyələrin qurulmasında
riyazi məntiqin rolu

Aksiomatik nəzəriyyə ilk andan ona görə diqqəti cəlb etmişdir ki, orada qəbul edilmiş ilkin müddəalar onun interpretasiyası nəticəsində alınan istənilən konkret nəzəriyyənin hər bir teoreminin isbatı üçün kifayətdir.

Həm də nəzəriyyənin hər hansı bir interpretasiyası üçün isbat edilmiş faktlar avtomatik olaraq digər interpretasiyaya köçürülə bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, intuitiv nəzəriyyəni aksiomatik nəzəriyyəyə köçürərkən əsas anlayışların seçilməsi ixtiyaridir. Eyni bir nəzəriyyəni müxtəlif cür aksiomatik qurmaq olar və onların hər birində istifadə edilən anlayışlar da bir - birindən fərqli ola bilər.

Məsələn, Evklid həndəsəsinin Hilbert tərəfindən verilmiş aksiomatikasında belə ilk anlayışlar altıdır: «nöqtə», «düz xətt», «müstəvi», «insidentdir», «arasında» və «konquruentdir».

Lakin həmin həndəsənin Pyeri tərəfindən təklif edilmiş digər aksiomatikasında isə yalnız iki dənə ilk anlayışdan istifadə edilir: «nöqtə» və «hərəkət».

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, aksiomatik metod əsasən intuitiv nəzəriyyənin məhsulu olsa da, bu metodun meydana çıxmasının başqa bir mənbəyi də var ki, bu, tamamilə müxtəlif olan nəzəriyyələr arasında ümumi bir əsas cəhət və oxşarlıqların olmasıdır. Bu vəziyyət tədqiqatçını belə bir nəticəyə gətirir ki, həmin ümumi cizgiləri (cəhətləri) aşkara çıxarsın, ayırsın və nəzəriyyəni aksiomatik qurarkən onları əldə rəhbər tutsun.

Nəzəriyyəni aksiomatik qurarkən biz hər dəfə qəbul edilmiş aksiomlar sisteminin ziddiyyətə gətirmədiyinə əmin olmalıyıq. Yəni aksiomlardan çıxarılan bütün mümkün nəticələr içərisində biri digərinə zidd olan mülahizələr olmamalıdır. Nəzəriyyədə ziddiyyətin aşkar edilməsi o demək olardı ki, qəbul edilmiş aksiomlar sistemini heç bir obyektlər yığımı ödəmir və deməli, bu aksiomlar heç nəyi təsvir etmir.

Aksiomlar sisteminin ziddiyyətsizliyini bu sistemin hər hansı bir dəqiq interpretasiyasını qurmaqla isbat etmək olar.

Aksiomlar sistemi üzərində qoyulan tələblərdən biri də bu sistemin asılı olmamasıdır.

Verilmiş aksiomlar sisteminin hər hansı aksiomu o vaxt asılı olmayan hesab olunur ki, o, sistemin qalan aksiomlarının köməyilə çıxarıla bilməsin. Hər hansı aksiomun asılı olmadığını isbat etmək üçün elə obyektlər çoxluğu tapmaq kifayətdir ki, o, sistemin tədqiq olunan aksiomundan başqa qalan bütün aksiomlarını ödəsin, lakin həmin aksiomu ödəməsin. Başqa sözlə, aksiomlar sisteminin tədqiq olunan aksiomunu onun inkarı ilə əvəz etmək nəticəsində alınan sistemin hər hansı bir interpretasiyasını tapmaq mümkün olsun.

§3. Riyaziyyat əsaslarının tədqiqində riyazi məntiqin rolu

Riyaziyyatın məntiqi əsaslarla qurulması ideyası hələ XVII əsrin ortalarında Leybnis tərəfindən irəli sürülmüşdür.

O deyirdi: «Biz işarələrdən təkcə öz fikrimizi başqa şəxslərə çatdırmaq üçün deyil, həm də təfəkkür proseslərimizin özünü asanlaşdırmaq üçün istifadə edirik».

Riyaziyyat əsaslarının öyrənilməsi və tədqiqində məntiqdən istifadə edilməsini riyazi məntiqin yaradıcı tətbiq sahələrindən biri hesab etmək olar. Bu sahədə əsas müvəffəqiyyət ondan ibarətdir ki, riyazi məntiqin köməyilə riyaziyyat əsaslarının müasir aksiomatik metodu işlənib hazırlanmışdır. Bu, aşağıdakı üç şərtlə xarakterizə olunur.

1. Bu və ya digər nəzəriyyənin çıxış vəziyyətinin (aksiomlarının) aşkar edilməsi.

2. Nəzəriyyənin qurulması üçün məntiq vasitələrinin (çıxarılış qaydalarının) aşkar edilməsi.

3. Baxılan nəzəriyyənin sonrakı təkliflərinin (teoremlərin) ifadə edilməsi üçün süni qurulmuş formal riyazi dillərdən istifadə edilməsi.

Birinci şərt klassik aksiomatik metodu xarakterizə edir. Digər iki şərt isə nəzəriyyənin qurulmasında və müvəffəqiyyətlə tətbiq edilməsində sonrakı addımlardır.

Riyaziyyat əsasları riyaziyyatın elə bir sahəsidir ki, onun köməyilə əsas riyazi anlayışların dəqiq analizi verilir, onlar arasındakı münasibətlər və onunla əlaqəli məsələlər araşdırılır. Bu əsas anlayışlar və onlar arasındakı münasibətlərə görə riyazi nəzəriyyələr qurulur və təkliflər isbat edilir. Məsələn, həndəsi fiqurların qurulması və onların xassələrinə aid teoremlərin isbat edilməsində əsas anlayışların və münasibətlərin mühüm rolu hələ antik həndəsəşünasların əsərlərində qeyd olunurdu. Deduktiv metodu inkişaf etdirməklə, onlar həndəsənin özülünü təşkil edən əsas anlayış-ları, aksiom və postulatları bu elmin qurulması və inkişafı üçün çıxış nöqtəsi hesab edirdilər.

Evklidin «Başlanğıclar»ında belə əsas anlayışlar «nöqtə», «düz xətt» və «müstəvi», onlar arasındakı münasibətlər isə aksiom və postulatlardır.

Riyaziyyat əsasları sahəsində elmi axtarışların səviyyəsi isə aşağıdakı üç istiqamətdə səciyyələnir:

a) həndəsi aksiomların bazası əsasında aksiomatik metodun təkmilləşdirilməsi;

b) qəbul edilmiş ciddi aksiomatikaya görə kəmiyyət nəzəriyyəsinin ədədlər və ədədi çoxluqlar nəzəriyyəsinə yaxınlaşdırılması təhlilinin qurulması;

c) ədəd və çoxluq anlayışlarının əsaslandırılması istiqamətində tədqiqat aparılması.

Hilbert təlimində irəli sürülən bu ideya riyaziyyat əsasları məsələlərinin həllində yeni mərhələnin başlanması və aksiomatik metodun inkişafı üçün dönüş nöqtəsi idi.

Hilbertin təklif etdiyi və onun ardıcılları tərəfindən inkişaf etdirilmiş riyaziyyatın formallaşdırılması metodu nəinki riyaziyyat əsaslarının məntiqi problemlərinin tədqiqində, həm də riyaziyyatın bir çox bölmələrinin inkişafında xüsusi əhəmiyyət kəsb edirdi.

Riyaziyyat əsaslarının tədqiqində və inkişafında öz tətbiqini tapana qədər keçən uzun bir dövr ərzində riyazi məntiq, riyaziyyat elmləri içərisində gizli fəaliyyət göstərərək, yalnız onların daxili tələblərinə xidmət edirdi. Lakin o, «daxili elm» kimi həmişə şərəfli və vacib olmuş, insan zəkasının tədqiqat obyektinə çevrilmişdir.

Riyaziyyat əsasları üçün məntiq elminin rolunu lazımınca qiymətləndirən Hilbert 1925-ci ildə yazırdı: «Bununla hesablaşmamaq olmaz ki, biz hazırda uzun müddət davam edən, dözülməz və təəccüblü paradokslar əhatəsindəyik. Özünüz fikirləşin. Əgər əqli nəticə çıxarılmasında ən etibarlı dayaq hesab etdiyimiz riyaziyyatın özü müvəffəqiyyətsizliyə uğrayırsa, onda bəs həqiqəti harada axtarmalıyıq? Lakin indiyə qədər sadiq qaldığımız bu elmi dəyişmədən paradokslardan azad olmağa aparan müvəffəqiyyətli yol vardır».

Əlbəttə, burada böyük alim müvəffəqiyyətli yol dedikdə riyaziyyatın məntiqi əsaslarla qurulmasını nəzərdə tuturdu.

Hilbert təliminin əsas prinsnpləri aşağıdakı iki mə-sələ üzərində qurulmuşdur.

1. Elə əsas anlayışlar və prinsiplər məcmuu tapmalı ki, onlar nəzəri çoxluq təsəvvürlərinin heç bir müəmmalı sahəsini özündə saxlamasın.

2. Belə anlayışlar çərçivəsində istənilən aksiomlar sistemi, xüsusi ilə də, çoxluq nəzəriyyəsi aksiomları üçün ziddiyyətsizlik və asılı olmamaq məsələlərini qoymaq və onları həll etmək.

Riyaziyyat əsaslarının öyrənilməsinə başqa bir istiqamətdə yanaşmaq riyaziyyatda istifadə edilən və əsaslandırılması mümkün olmayan bəzi vəziyyətlərin tədqiqi ilə əlaqədardır. Buraya, xüsusi halda, riyaziyyatda qeyri-məhdud tətbiq olunan üçüncünün istisna edilməsi qanunu və seçmə aksiomunu aid etmək olar. İntuist riyaziyyatçıların proqramında riyaziyyatın məhz bu prinsiplərin çiddi məhdudlaşdırılması əsasında qurulması tələb olunurdu. Həmin dövrdə rus alimi A.A.Markov və onun ardıcılları tərəfindən inkişaf etdirilən riyaziyyat əsaslarının öyrənilməsinin konstruktiv metodu məntiqi vasitələrin riyaziyyata daxil edilməsini tənqid edirdi. Bununla yanaşı onlar riyazi nəticələrin alınmasında alqoritm anlayışından sistematik olaraq istifadə edilməsi tərəfdarı idilər. Riyaziyyat əsaslarının öyrənilməsinə yönəldilən bü-tün istiqamətlər, bütövlükdə, riyaziyyatın sürətli inkişafına ciddi təkan vermişdir.

§4. Müxtəlif nəzəriyyələrin öyrənilməsində formalizasiya metodunun tətbiqi və bununla riyazi məntiqin əlaqəsi

Bütövlükdə riyaziyyat elmi üçün universal bir dilin qurulması və bu dilin bazası əsasında riyazi isbatların formallaşdırılması proqramı birinci dəfə Freqe və Rassel tərəfindən irəli sürülmüşdür. Həndəsənin məntiqi dildə qurulması isə çox qədim tarixə malikdir. Lakin Evklid həndəsəsinin inkişaf etdirilməsi və Boyai - Lobaçevski həndəsəsinin yaranması bu elmlə bağlı olan nəzəriyyələri formallaşdırmaq və onu məntiqi dilə çevirmək zərurəti doğururdu. Həndəsi intuisiyaların etibarlı olmadığını dərk edən Hilbert intuisiyaya müraciət etmədən Evklid həndəsəsini diqqətlə nəzərdən keçirmiş və onu məntiqi əsaslarla yenidən işləmişdir. Bunun da nəticəsində Hilbertin, birinci nəşri 1899-cu ildə çapdan çıxmış «Həndəsə əsasları» monoqrafiyası yaranmışdır.

XIX əsrin ortalarında Bul və Morqanın çap edilmiş elmi əsərləri birinci olaraq Aristotel məntiqinin cəbrə köçürülməsinə həsr edilmişdir. Bir qədər sonra Freqe və Pirs predikatlar məntiqini, habelə predmet dəyişənləri və kvantorları «cəbr dilinə» daxil etmişlər. Bunun da nəticəsində bu dilin riyaziyyat əsaslarının bir çox məsələlərinə tətbiqi üçün real imkanlar açılmışdır. Elə bu vaxt Veyerştras, Dedekind və Kantorun əsərlərində tam ədədlər hesabının, habelə bütün klassik riyaziyyat üçün əsas götürməklə, riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsinin «arifmetizasiyasının» mümkünlüyü göstərildi. Daha sonra Peano və Dedekind hesabın özünün aksiomatik qurulması prinsipini işləyib hazırladılar. Bundan əlavə həm də Peano məntiqi dil üçün daha əlverişli simvollardan istifadə etməyi təklif edirdi. Sonralar bu dil Rasselin və Uaytxedin «Riyaziyyat prinsipləri» adlı birgə əsərlərində təkmilləşdirildi. Həmin əsərdə bütün riyaziy-yatın məntiqi dilə qovuşdurulması təşəbbüsü irəli sürülürdü. Lakin bu təşəbbüs müvəffəqiyyətsiz oldu. Çünki sonsuz çoxluqlarla əlaqədar olan bir çox təklifləri sırf məntiqi aksiomların köməyilə almaq mümkün olmurdu. XX əsrin birinci onilliyində Hilbert hər bir riyazi nəzəriyyəyə müx-təlif

modellərdə baxmaq və nəzəriyyələrin aksiomlarının ziddiyyətsizlik və asılı olmamaq kimi başlıca problemlərini həmin modellərdə birbaşa həll etmək təklifini verdi.

Riyazi nəzəriyyələrin belə modellərinin tam formalizasiyası, yəni aksiomatik qurulması müasir riyaziyyatda qəbul olunmuş adi simvolikaya formal məntiqi dili qoşmaqla alınır. Bunun da nəticəsində formallaşdırılmış nəzəriyyənin tam bir simvolik dili (semantikası) qurulur. Bu dil üçün biz dəqiq sintaksis (düzəldilmə qaydası) və məntiq (çıxarılış qaydası) təyin etməli oluruq. Nəticədə alınan modelə formal sistem və ya məntiqli sistem deyilir. Bu metodun özü isə məntiqi metod adlanır. Formal sistemə formalizm və ya deduktiv hesab da deyirlər. Formalizmin hər bir təklifini formula (düstur) adlandırmaq qəbul edilmişdir.

Qəbul etdiyimiz aksiomlar və onlardan çıxarılış qaydalarının köməyilə alınan hər bir düsturu həmin formalizmdə çıxarılan düstur adlandırırlar.

Hər hansı formal sistemin xassələrini (düzəldilmə və çıxarış qaydalarını) təhlil edərək, habelə onlarla əlaqədar nəticələri araşdıraraq başqa bir nəzəriyyənin dəqiq təsvirinə başlamaq olar. Bu axırıncını *metanəzəriyyə* adlandıracağıq. Həmin formal nəzəriyyənin özünə isə *predmet nəzəriyyə* deyirlər.

Formal sistemlərin xassələrini öyrənərək onu metadil çərçivəsində məzmunlu riyazi metodlara keçirməyə *metariyaziyyat*, yaxud *isbatlar nəzəriyyəsi* deyilir. Başqa cür desək, metariyaziyyat formal nəzəriyyələrin elə metodlarla tədqiqidir ki, ondan ümumi rəyə görə məhz bu növ yaradıcılıqlar üçün istifadə edilməlidir.

Metariyazi anlayışa misal olaraq həndəsə aksiomlarının ziddiyyətsizliyini göstərmək olar. Orada ziddiyyətsizliyə verilən tərif istənilən formal nəzəriyyəyə tətbiq edilə bilər. Formal sistem bir qayda olaraq məzmunlu (qeyri-formal) riyaziyyatdan onun bəzi bölmələrinin formallaşdırılması nəticəsində alındığından belə formal sistemin simvolları, düsturları və başqa anlayışları qeyri-formal riyaziyyatın terminləri vasitəsilə interpretasiya olunur.

Formal nəzəriyyənin hər hansı xassələrini təsvir edən teoremlər *metateorem* adlanır.

Riyazi nəzəriyyələrin formalizasiyası məsələsilə Hilbertə qədər də məşğul olmuşlar. Məsələn, 1871-ci ildə Kleyn tərəfindən qurulmuş proyektiv model Lobaçevski həndəsəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsini Evklid həndəsəsinin ziddiyyətsizliyinə gətirir. Öz növbəsində Evklid həndəsəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsi də həqiqi ədədlər nəzəriyyəsində ziddiyyətsizlik məsələsinə gətirilə bilər. Lakin riyazi analiz və hesab üçün ziddiyyətsizlik problemini həll etməkdən ötrü hansı vasitələrdən istifadə etməklə model qurmağın praktik yolu görünmürdü. Hilbertin xidməti də ondan ibarət olmuşdur ki, o, ziddiyyətsizlik problemini həll etmək üçün birbaşa yol göstərmişdir. Formal nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi o deməkdir ki, hər hansı düstur və onun inkarı həmin nəzəriyyədə eyni zamanda çıxarılan olmasın. Hilbertə görə verilmiş nəzəriyyənin ziddiyyətsiz olduğunu isbat etmək üçün əvvəlcə onu formal sistem şəklində ifadə etmək, sonra isə baxılan nəzəriyyədə çıxarılmayan düsturun varlığını göstərmək kifayətdir. 1930-cu ildə Kurt Hödel predikatlar hesabının tamlığını isbat etməklə göstərmiş oldu ki, bu hesab riyaziyyatın formallaşdırılması üçün baza ola biləcək məntiqi sistemdir. Lakin o, 1931-ci ildə hesabınköməyilə bütün riyaziyyatı formallaşdırmaq mümkün olmadığını (tam olmamaq haqqında Hödel teoremi) isbat etdikdə Hilbertdə riyaziyyat əsaslarının bütün məsələlərinin həlli uçün onun göstərdiyi yolun doğruluğuna bir inamsızlıq yarandı. Tam olmamaq haqqında Hödel teoreminə görə, əgər hesabı öz daxilinə alan formallaşmış sistem ziddiyyətsizdirsə, onda bu sistemdə

onun ziddiyyətsizliyi haqqında ifadə edilmiş təklif, nəzəriyyənin formallaşdırılması vasitələrinin köməyilə isbat edilə bilməz. Bu o demək idi ki, məsələnin həlli Hilbertin düşündüyü qədər də asan deyilmiş. Lakin Q.Qentsen və P.Novikov göstərdilər ki, hesabın formallaşdırılması üçün zəruri olan vasitələr çərçivəsindən kənara çıxaraq, kafi qədər etibarlı konstruktiv vasitələrdən istifadə etməklə onun ziddiyyətsizliyini isbat etmək olar.

§5. Avtomatik idarəetmə sistemlərinin qurulması və kibernetika elminin yaranması ilə əlaqədar riyazi məntiqin intensiv inkişafı

XX əsrin ikinci yarısında riyazi məntiqin başqa elmi sahələrə tətbiqi üçün daha geniş imkanlar açıldı. Riyazi məntiqin hesablama texnikasına, kibernetikaya və informasiya sorğu sistemlərinə tətbiqi onu bu gün üçün, xüsusilə, aktual etdi.

Riyazi məntiqin ən böyük nailiyyətlərindən biri alqoritm anlayışının dəqiq riyazi tərifini vermək, yəni bu və ya başqa sinif məsələlərin həlli üçün səmərəli üsul tapmaqdan ibarətdir. Bu isə nəticə etibarilə, müasir dövrdə cəld işləyən hesablama maşınlarının qurulması, onların xalq təsərrüfatının müxtəlif sahələrinə tətbiqi, avtomatik idarəetmə sistemlərinin yaranması, habelə kibernetikanın sürətli inkişafına gətirib çıxarmışdır.

Riyazi məntiqin güclü formal dilə malik olması nəticəsində hazırda xətti proqramlaşdırmanın müxtəlif spektrlərini əhatə edən universal elektron hesablama maşınları qurulmuşdur ki, bu da müasir elm və texnikanın ən böyük nailiyyətlərindən biridir.

Əvvəlcədən tərtib edilmiş proqrama əsaslanaraq müəyyən əməlləri və mürəkkəb hesablamaları yerinə yetir-məyə qadir olan bu maşınlar öz növbəsində istehsalın avtomatlaşdırılması və mexanikləşdirilməsinə, habelə xalq təsərrüfatının inkişafı planına uyğun tərtib edilmiş proqramı kibernetik maşına, yaxud hesablama mərkəzinə verilir, o da öz növbəsində məsələnin iqtisadi modelini qurur və onu həll edir.

Məntiqi dilin köməyilə xətti proqramlaşdırma məsələsinə ikili olan məsələ ifadə edilir və onun həlli məntiqi mühakimə vasitəsilə əsas məsələnin həlli ilə əlaqələndirilir.

Yarandığı lap ilk anlardan elektron hesablama texnikası belə bir inam yaratdı ki, bu maşınlar müxtəlif məsələlərin həlli üçün əsas vasitə hesab edilə bilər. Müxtəlif elmi və texniki qurğular, misal üçün, ağır sənayenin gəmiqayırma, təyyarəçilik, raket texnikası, atom reaktorları və s. kimi sahələrinin inkişafı çox mürəkkəb və çətin hesablamalar aparmağı tələb edir. Bu çətinlik və mürəkkəblik ondan ibarətdir ki, lazımi nəticəni almaq üçün prosesi ifadə edən cəbri, diferensial və ya inteqral tənliyi maşında həll etmək və buraya daxil olan parametrləri tapmaqdan ötrü milyonlarla, bəzən də on milyonlarla əməlləri yerinə yetirmək lazım gəlir. Bir çox iqtisadi məsələlərin həlli 200 - 300 dəyişəni özündə saxla-yan çoxlu sayda xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə gəti-rilir. Tələb olunan cavabı almaq üçün yüz milyonlarla ele-mentar çevrilmələr və hesab əməlləri aparılmalıdır. Müqa-yisə üçün qeyd edək ki, belə məsələlərdən bircə dənəsini həll etməkdən ötrü hətta ixtiyarında sadə hesablayıcı alətlər - arifmometrlər, cədvəllər və s. olan ən yaxşı hesablayıcı şəxsin 10 - 12 illik gərgin əməyi lazımdır.

Halbuki indi dünyada mövcud olan elektron hesablama maşınlarının əksəriyyəti saniyədə bir neçə yüz min, hətta milyonlarla əməl yerinə yetirə bilər. Elektron hesablama maşınları əsasən öz tətbiqini istehsalın idarə olunması proseslərində, iqtisadi əlaqələndirmə sahəsində, statistik və

sorğu informasiyalarının saxlanması və yenidən işlənib hazırlanmasında, habelə, insanın şüurlu yaradıcılığının müxtəlif formalarının modelləşdirilməsində tapmışdır.

XX əsr elmi-texniki inqilabın ən böyük nailiyyətlərindən biri də avtomatik idarəetmə sistemlərinin yaranmasıdır. Bu isə cavan elm olan kibernetikanın məhsuludur. O, yalnız ikinci dünya müharibəsindən sonra təşəkkül tapmışdır. Onun əsası Norbert Viner tərəfindən qoyulmuşdur. Bu elmin əsasında müxtəlif təbiətli sistemlərin idarə edilməsi proseslərinin inkişafına ümumi yanaşmanın mümkünlüyü ideyası durur. Bu ideyanın gücü nəinki proseslərin ümumi təhlilinin metodoloji xarakterini açmaqda, habelə informasiya nəzəriyyəsi metodlarına, dinamik sistemlərə və s. nəzəriyyələrə arxalanaraq mürəkkəb məsələlərin həlli üçün onların miqdarı təsvirinin güclü aparatını təklif etməyin mümkünlüyündədir.

Kibernetika elmi meydana gəldikdən sonra dünyanın materiyadan və enerjidən ibarət olması haqqında klassik təsəvvür, onun materiya, enerji və informasiya kimi üç ünsürdən ibarət olması fikri ilə əvəz edildi. Həm də sübut edildi ki, canlı orqanizmlərdə müşahidə edilən təşkiledici sistemlər informasiyasız təsəvvür edilə bilməz.

Bu elmin sürətli inkişafı ilə əlaqədar onun qarşısında duran əsas məqsəd bütün belə təşkiledici və idarəedici sistemlər üçün ümumi olan vacib faktları müəyyən etmək, bu sistemlər üçün hipotezlər irəli sürmək, nəzəriyyələr qurmaq, onların ümumi qanunauyğunluqlarını göstərməkdən ibarətdir.

Riyazi məntiqin əsas tətbiq sahələrindən biri də sonlu avtomatlarla əlaqədar məsələlərin analizi və sintezidir. Son-lu avtomatların əsas nümunələri kimi rele-kontakt və elekt-ron sxemləri, ürək-damar sistemlərinin ideallaşdırılmış mo-deli olan «əsəb şəbəkələri» sxemini və s. göstərmək olar. Bu sistem və şəbəkələrin analizi və sintezi aparatlarının işlənib hazırlanmasında riyazi məntiqin rolunu xüsusi qeyd etmək lazımdır.

Məlumdur ki, hazırda hesablama riyaziyyatı bütövlükdə riyaziyyatın ən tətbiqli sahələrindən biridir. Formal məntiqi nəticələrlə hesablama prosesləri arasında olduğu kimi, riyazi məntiqlə hesablama riyaziyyatı arasında da dərin bir əlaqə vardır. Müasir hesablama mərkəzlərinin qurulması da həmin bu əlaqəyə əsaslanır.

«Kibernetik çevriliş» nəticəsində əvvəllər insanlar qrupu tərəfindən mübadilə edilən informasiyalar indi artıq maşınlara tapşırılmışdır. İnformasiyaların qəbul edilməsi, saxlanması, yenidən işlənməsi və verilməsi üçün maşın müəyyən funksiyaları yerinə yetirməlidir. Kibernetik maşının bu funksiyaları yerinə yetirməsi isə onların formal məntiqi analizini işləyib hazırlamağı tələb edir. Həm də aydındır ki, informasiyaların maşında saxlanması və bir maşından digər maşına ötürülməsi kimi daha mürəkkəb funksiyaların yerinə yetirilməsində xüsusi dilin - maşın dilinin qurulması zəruridir. Belə dilin qurulması, əlbəttə, təkcə riyazi məntiqin deyil, həm də formal məntiqin predmeti olan formallaşdırılmış dilin qurulması kimi qiymətləndirilməlidir.

Bəşər tarixində toplanmış və toplanmaqda davam edən informasiya ehtiyatlarından biri, nəşr edilmiş mətnlərin məcmuudur. İnformasiyanın bu növündən effektli şəkildə istifadə etmək mühüm elmi məsələ kimi qarşıya qoyulur. Bu məsələnin müvəffəqiyyətlə həlli, toplanmış informasiya vasitələrinin dərin məntiqi təhlilini verməyi və nəşr edilmiş mətnlər şəklində ifadə olunan informasiyaların məntiqi strukturunun ümumi metodlarını yaratmağı tələb edir. Toplanmış bu informasiyaların yazılması və yenidən nümayiş etdirilməsi üçün rasional bir sistemin yaradılması da günün vacib məsələsi kimi qarşıya çıxır. İnsan yaradıcılığının mühüm bir sahəsini əhatə edən bu kimi məsələlər nəşr edilmiş mətnlərin avtomatik işlənməsi məsələsi ilə üzvü surətdə bağlı olub tərcüməçilik və məlumat - sorğu kitablarının, kataloqların, ensiklopediyaların hazırlanmasında, habelə, bir mətnin başqa mətnə çevrilməsində mühüm bir vasitədir.

Ən nəhayət, məntiq elmi linqvistika, beyin fiziologiyası, psixologiya, təbabət, hüquqşünaslıq və s. kimi elmi sahələrdə müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir.

II FƏSİL. MÜLAHİZƏLƏR CƏBRİ.

§6. Mülahizələr üzərində məntiq əməlləri

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi riyazi məntiqin əsas anlayışlarından biri mülahizədir. Mülahizə dedikdə ya ancaq doğru, ya da ancaq yalan olan nəqli cümlələri nəzərdə tutacağıq. Mülahizələri latın əlifbasının $A, B, C, \ldots$ kimi böyük $x, y, z, \ldots$ kimi kiçik hərfləri, yaxud da indeksli hərflərlə $A_1, A_2, \ldots,\quad B_1, B_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ kimi, onların doğru və yalan olmasını isə uyğun olaraq D, Y («*doğru*» və «*yalan*» sözlərinin ilk böyük hərfləri) ilə işarə edəcəyik.

Mülahizələri işarə etmək üçün istifadə edilən hərfləri propozisional hərflər və ya işarələr adlandıracağıq.

Sadə nəqli cümlə şəklində söylənilən mülahizələri elementar mülahizələr və ya atomlar adlandıraq.

Məntiq əməlləri və ya bəzən deyildiyi kimi propozisional əlaqələr vasitəsilə verilmiş elementar mülahizələrdən (atomlardan) yeni, mürəkkəb mülahizələr düzəltmək olar. Belə məntiq əməlləri beşdir. Bu əməllər və onların xassələrindən istifadə edərək məntiq cəbri quracağıq.

Tutaq ki, A, B kimi iki sadə mülahizə verilmişdir.

Tərif 1. A və B mülahizələrinin «və» bağlayıcısı ilə birləşməsindən alınan yeni mülahizəyə bu mülahizələrin konyunksiyası deyilir və $A \wedge B$ kimi işarə edilir.

A, B konyuktiv hədlər adlanır.

Misal. A mulahizəsi: «π irrasional ədəddir».
B mülahizəsi: «dəvə ev heyvanıdır».

$A \wedge B$ mülahizəsi «π irrasional ədəddir və dəvə ev heyvanıdır» şəklində olacaqdır.

Sadə mülahizələr və onların konyunksiyasından ibarət mülahizənin doğruluq qiymətlərinin təhlili belə bir nəti-cə çıxarmağa imkan verir ki, iki A və B mülahizələrinin $A \wedge B$ konyunksiyası onların hər ikisi doğru olduqda və an-caq onda doğru olur.

Bu deyilənlərə görə konyunksiya üçün doğruluq cədvəli belə olar:

A	B	$A \wedge B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Konyunksiya əməlini sonlu sayda $A_1, A_2, ..., A_m$ mülahizələri üçün də təyin etmək olar: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$. Bu yazılış əvəzinə sadəcə olaraq $\bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ yazacağıq. Verilmiş $A_1, A_2, ..., A_m$ mülahizələrinin konyunksiyası həmin mülahizələrin hər biri doğru olduqda və ancaq onda doğru olar.

Tərif 2. İki A və B mülahizələrinin «yaxud» (və ya) bağlayıcısı ilə birləşməsindən alınan yeni mülahizəyə bu mülahizələrin dizyunksiyası deyilir və $A \vee B$ kimi işarə olunur. A, B dizyunktiv hədlər adlanır.

Misal. A mülahizəsi: «Pələng vəhşi heyvandır».
B mülahizəsi: «35 ədədi tam kvadratdır».

$A \vee B$ mülahizəsi: «Pələng vəhşi heyvandır, yaxud 35 ədədi tam kvadratdır» mülahizəsindən ibarətdir.

Sadə mülahizələrin və onların dizyunksiyasının doğruluq qiymətlərini təhlil edərək belə bir nəticəyə gələ bilərik ki, iki A və B mülahizəsinin $A \vee B$ dizyunksiyası bu mülahizələrin hər ikisi yalan olduqda və ancaq onda ya-lan olur. Odur ki, dizyunksiya üçün doğruluq cədvəli belə olar:

A	B	$A \vee B$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Dizyunksiya əməlini sonlu sayda $A_1, A_2, ..., A_m$ mülahizələri üçün də təyin etmək olar: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m = \bigvee_{i=1}^{m} A_i$.

Verilmiş $A_1, A_2, ..., A_m$ mülahizələrinin dizyunksiyası həmin mülahizələrin hər biri yalan olduqda və ancaq onda yalan olur.

Mülahizələr üzərində aparılan üçüncü əməl implikasiya adlanır.

Tərif 3. İki A və B mülahizələrindən «əgər,..., onda» sözbirləşməsi vasitəsilə alınan mülahizəyə bu iki mülahizənin implikasiyası deyilir və $A \Rightarrow B$ kimi işarə olunur. Bəzən $A \Rightarrow B$ yazılışını, «əgər A, onda B» kimi oxuyurlar. Bunun aşağıdakı sinonimləri də vardır: A olduqda B olar, A-dan B alınır, B, A-nın nəticəsidir və s.

Misal. A mülahizəsi: «Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi $4d$-yə bərabərdir».

B mülahizəsi: «5 sadə ədəddir».

$A \Rightarrow B$ mülahizəsi: «Əgər üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi $4d$-yə bərabərdirsə, onda 5 sadə ədəddir» mülahizəsindən ibarət olacaqdır.

İki A və B mülahizələrinin $A \Rightarrow B$ implikasiyası onda və ancaq onda yalan mülahizə olar ki, A doğru, B isə yalan mülahizə olsun. Bu dediyimizə əsasən implikasiya üçün doğruluq cədvəli aşağıdakı kimi olar:

A	B	$A \Rightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

$A \Rightarrow B$ yazılışında A mülahizəsi şərt, B mülahizəsi nəticə,

$A \Rightarrow B$ isə məntiqi gözləmə adlanır.

Tərif 4. A və B mülahizələrindən «onda və ancaq onda», «yalnız və yalnız onda», «onda və yalnız onda» sözbirləşmələrinin köməyilə alınan yeni mülahizəyə bu mülahizələrin ekvivalensiyası deyilir və $A \Leftrightarrow B$ kimi işarə edilir.

$A \Leftrightarrow B$ yazılışında A-ya B-nin məntiqi nəticəsi və tərsinə B-yə A-nın məntiqi nəticəsi kimi baxılır.

Misal. A mülahizəsi: «Verilmiş ədədin axırıncı iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ədəd 4-ə bölünürsə, onda həmin ədədin özü də 4-ə bölünür».

B mülahizəsi: «Verilmiş ədəd 4-ə bölünürsə, onda onun axırıncı iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ədəd 4-ə bölünür».

$A \Leftrightarrow B$ mülahizəsi: «Verilmiş ədəd onda və ancaq onda 4-ə bölünər ki, onun axırıncı iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ədəd 4-ə bölünsün».

$A \Leftrightarrow B$ ekvivalensiyası A və B mülahizələri eyni doğruluq qiymətinə malik olduqda və ancaq onda doğru olar. Ona görə də ekvivalensiya üçün doğruluq cədvəli aşa-ğıdakı kimi olar:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Nəhayət, mülahizələr üzərində aparılan sonuncu əməl inkar əməli adlanır. Bu, verilmiş mülahizədən «yox», «deyil», «doğru deyil ki» kimi inkaredici sözlərin köməyilə alınır.

A mülahizəsinin inkarını $\overline{A}$ (yaxud $\neg A$) kimi işarə edəcəyik.

Göründüyü kimi konyunksiya, dizyunksiya, implikasiya və ekvivalensiya əməlləri binar əməllər olduğu halda, inkar əməli unar əməldir. Yəni inkar əməli yalnız bir mülahizə üzərində aparılır.

Misal. A mülahizəsi: «Timsah sürünənlər ailəsinə mənsubdur».

$\overline{A}$ mülahizəsi: «Timsah sürünənlər ailəsinə mənsub deyil» kimi olacaqdır.

Aydındır ki, əgər A mülahizəsi doğru olarsa, onda onun inkarı yalan olar və tərsinə. Ona görə də inkar üçün doğruluq cədvəli belə olar:

A	$\overline{A}$
D	Y
Y	D

§7. Düsturlar və onların doğruluq qiymətləri

Yuxarıda göstərdiyimiz beş məntiq əməllərinin bilavasitə ardıcıl tətbiqi nəticəsində verilmiş elementar mülahizələrdən yeni, mürəkkəb mülahizələr ala bilərik. Aldığımız bu mürəkkəb mülahizələri propozisional formalar və ya mülahizələr məntiqində düsturlar adlandıraq.

Daha dəqiq desək:

1^0. $A, B, C, ..., x, y, z, ...$ hərfləri ilə işarə etdiyimiz elementar mülahizələr düsturlardır. Düsturları yunan əlifbasının $\alpha, \beta, \gamma, ..., \alpha_1, \alpha_2, ..., \beta_1, \beta_2, ...$ hərfləri ilə işarə edəcəyik.

2^0. Əgər α və β düsturlardırsa, onda

$$(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta), (\alpha \Leftrightarrow \beta), \overline{\alpha}$$

düsturlardır.

3^0. Ancaq və ancaq 1^0, 2^0 şərtləri ilə müəyyən edilən ifadələr (obyektlər) düsturlardır.

Düsturun tərifində qəbul etdiyimiz 1^0 şərti düsturla-

rın düzəldilməsi üçün atılan ilk addımdır. 2^0 şərti isə verilmiş düsturlardan yeni düsturların düzəldilməsi üçün konstruktiv yol göstərir. Nəhayət, 3^0 şərti düsturların düzəldilməsi qaydasını yalnız 1^0 və 2^0 şərtləri ilə məhdudlaşdırır. Beləliklə də düstur anlayışı tamamilə müəyyən olunur.

Məsələn, tutaq ki, x, y, z, u, v, w ixtiyari mülahizələrdir. 1^0 şərtinə görə onların hər biri düsturdur. 2^0 şərtinə görə $(x \vee y)$ və $(x \Rightarrow y)$ düsturlardır. Yenə həmin şərtə görə $((x \vee y) \Rightarrow z)$, $(((x \vee y) \Rightarrow z) \Rightarrow (x \vee z))$ və $\overline{(x \Leftrightarrow y)}$ düsturlardır.

Ümumiyyətlə,

$$(x \vee (y \wedge z)),\ (((x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow y) \wedge z))),$$

$$\overline{(\overline{(x \vee y)} \wedge (z \Rightarrow (u \Rightarrow (v \Leftrightarrow w))))}$$

düsturlardır və s.

Elementar mülahizələr kimi məntiq düsturları da müəyyən doğruluq qiymətinə malik olur. Bu doğruluq qiymətini elementar mülahizələrin doğruluq qiyməti və düstura daxil olan məntiq əməllərinin doğruluq cədvəllərinə görə asanlıqla müəyyən etmək olar. $\alpha, \beta, \gamma, ...$ düsturlarının doğruluq qiymətlərini, $\rho(\alpha), \rho(\beta), \rho(\gamma), ...$ kimi işarə edək.

Əgər α düsturu doğru qiymət alarsa, onda $\rho(\alpha) = D$, yalan qiymət aldıqda isə $\rho(\alpha) = Y$ kimi yazmağı şərtləşək. Misal üçün yuxarıdakı

$$\overline{(\overline{(x \vee y)} \wedge (z \Rightarrow (u \Rightarrow (v \Leftrightarrow w))))}$$

düsturunu α ilə işarə edib,

$$\rho(x) = \rho(z) = \rho(u) = D,\ \rho(y) = \rho(v) = \rho(w) = Y$$

qiymətlərində $\rho(\alpha)$-nı tapaq:

$$\rho(\alpha) = \rho\overline{(\overline{(D \vee Y)} \wedge (D \Rightarrow D \Rightarrow (Y \Leftrightarrow Y)))}.$$

Lakin,

$$(D \vee Y) = D,\ \overline{(D \vee Y)} = Y,\ (Y \Leftrightarrow Y) = D\ \ (D \Rightarrow D) = D$$

olduğundan axırıncı ifadəni belə yazarıq:

$$\rho(\alpha)=\overline{(Y\wedge(D\Rightarrow(D\Rightarrow D)))}.$$

Yenə də $(D\Rightarrow D)=D$, $(Y\wedge D)=Y$ və $\overline{(Y\wedge D)}=D$ olduğunu nəzərə alsaq, $\rho(\alpha)=D$ olar.

Deməli, elementar mülahizələrin verilmiş doğruluq qiymətləri yığımı üçün baxdığımız α düsturu doğru qiymət alır. Göründüyü kimi məntiq düsturu oraya daxil olan elementar mülahizələrin hər bir qeyd olunmuş qiymətləri yığımı üçün tamamilə müəyyən bir doğruluq qiymətinə malik olur.

Tərif 1. Verilmiş məntiq düsturu ona daxil olan elementar mülahizələrin istənilən doğruluq qiymətləri yığımı üçün yalnız doğru qiymət alarsa, onda belə düstura eyniliklə doğru düstur və ya tavtologiya deyilir.

Misal üçun, $((A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\overline{A}\vee B))$, $((A\vee(A\wedge B))\Rightarrow A)$ və s. eyniliklə doğru düsturlardır.

Tərif 2. Verilmiş məntiq düsturu oraya daxil olan elementar mülahizələrin istənilən doğruluq qiymətləri yığımı üçün yalnız yalan qiymət alarsa, onda belə düstura eyniliklə yalan düstur və ya ziddiyyət deyilir.

Misal üçün, $\overline{((A\wedge(A\Rightarrow B))\Rightarrow B)}$, $\overline{((A\wedge(A\vee B))\Leftrightarrow A)}$ və s. eyniliklə yalan düsturlardır.

Tərif 3. Verilmiş məntiq düsturu oraya daxil olan elementar mülahizələrin hər hansı qiymətləri yığımı üçün doğru qiymət alarsa, ona yerinə yetirilən düstur deyilir.

$$((A\wedge B)\Rightarrow B),\ ((A\vee B)\wedge\overline{A})$$

və s. kimi düsturlar yerinə yetiriləndir.

Tərifdən aydındır ki, bütün eyniliklə doğru düsturlar yerinə yetirilən, eyniliklə yalan düsturlar isə yerinə yetirilməyəndir.

§8. Düsturların eynigüclülüyü və eynigüclü

çevrilmələr

Tutaq ki, α və β $x_1,x_2,...$ elementar mülahizələri özündə saxlayan istənilən iki məntiq düsturdur.

Tərif. α və β düsturlarına daxil olan $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərinin istənilən qiymətləri yığımı üçün həmin düsturlar eyni doğruluq qiymətinə malik olarsa, onlara eynigüclü düsturlar deyilir və $\alpha\equiv\beta$ kimi yazılır.

Misal üçün,

$$((x_1\wedge\overline{x}_1)\vee x_2)\equiv x_2,\ (x_1\Rightarrow x_2)\equiv\overline{x}_1\vee x_2,$$

$$(x_1\Leftrightarrow x_2)\equiv(x_1\Rightarrow x_2)\wedge(x_2\Rightarrow x_1)$$

və s. eynigüclülüklərini göstərmək olar.

Düsturların eynigüclülüyü ilə ekvivalensiyası arasında aşağıdakı əlaqə vardır. Əgər $\alpha\equiv\beta$ olarsa, onda $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ düsturu dəyişənlərin bütün qiymətlərində doğru olur və tərsinə, əgər $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ düsturu oraya daxil olan dəyişənlərin bütün qiymətlərində doğru qiymət alarsa, onda $\alpha\equiv\beta$ olar.

Aydın görmək olar ki, düsturların eynigüclülüyü münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitivdir. Ona görə də bu münasibət bütün məntiq düsturları çoxluğunu ekvivalentlik siniflərinə ayırır.

Qeyd edək ki, α və β düsturlarının eynigüclü olması üçün onların eyni sayda və eyni hərflərlə işarə edilmiş dəyişənləri özündə saxlaması vacib deyildir. Əsas şərt ondan ibarətdir ki, onlar bu düsturlara daxil olan dəyişənlərin bütün qiymətlərində eyni doğruluq qiyməti alsınlar. Məsələn,

$$((x\wedge\overline{x})\vee y)\equiv y$$

eynigüclülüyündə sol tərəfdəki düstur x və y dəyişənlərindən, sağ tərəfdəki düstur isə yalnız y dəyişənindən asılıdır.

Aşağıdakı eynigüclülükləri həm də məntiq əməllərinin xassələri adlandırırlar.

$1^0.\ \overline{\overline{x}} \equiv x$
$2^0.\ (x \wedge y) \equiv (y \wedge x)$
$3^0.\ (x \vee y) \equiv (y \vee x)$
$4^0.\ ((x \wedge y) \wedge z) \equiv (x \wedge (y \wedge z))$
$5^0.\ ((x \vee y) \vee z) \equiv (x \vee (y \vee z))$
$6^0.\ (x \wedge (y \vee z)) \equiv ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$
$7^0.\ (x \vee (y \wedge z)) \equiv ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$
$8^0.\ \overline{(x \vee y)} \equiv (\overline{x} \wedge \overline{y})$
$9^0.\ \overline{(x \wedge y)} \equiv (\overline{x} \vee \overline{y})$
$10^0.\ (x \wedge x) \equiv x$
$11^0.\ (x \vee x) \equiv x$
$12^0.\ (x \wedge D) \equiv x$
$13^0.\ (x \vee D) \equiv D$
$14^0.\ (x \wedge Y) \equiv Y$
$15^0.\ (x \vee Y) \equiv x$
$16^0.\ (x \wedge (x \vee y)) \equiv x$
$17^0.\ (x \vee (x \wedge y)) \equiv x$
$18^0.\ (x \vee (\overline{x} \wedge y)) \equiv (x \vee y)$
$19^0.\ (x \wedge (\overline{x} \vee y)) \equiv (x \wedge y)$
$20^0.\ (\overline{x} \vee (x \wedge y)) \equiv (\overline{x} \vee y)$
$21^0.\ (\overline{x} \wedge (x \vee \overline{y})) \equiv (\overline{x} \wedge \overline{y})$
$22^0.\ (\overline{x} \vee (x \wedge \overline{y})) \equiv (\overline{x} \vee \overline{y})$

8^0 - 9^0 eynigüclülüklərinə de Morqan qanunları, 10^0-11^0 eynigüclülüklərinə isə udulma qanunları deyilir. Bundan əlavə məntiq əməllərinin birini digəri ilə ifadə edən və gələcəkdə tez-tez istifadə edəcəyimiz aşağıdakı eynigüclülükləri də qeyd etmək faydalıdır:

$23^0.\ (x \wedge y) \equiv \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}$
$24^0.\ (x \vee y) \equiv \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})}$
$25^0.\ (x \wedge y) \equiv \overline{(x \Rightarrow \overline{y})}$
$26^0.\ (x \vee y) \equiv (\overline{x} \Rightarrow y)$
$27^0.\ (x \Rightarrow y) \equiv \overline{(x \wedge \overline{y})}$
$28^0.\ (x \Rightarrow y) \equiv (\overline{x} \vee y)$
$29^0.\ (x \Leftrightarrow y) \equiv ((x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}))$
$30^0.\ (x \Leftrightarrow y) \equiv ((\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}))$
$31^0.\ (x \Leftrightarrow y) \equiv ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x))$

Məlumdur ki, hər bir məntiq düsturu sonlu sayda elementar mülahizələri və onlar üzərində aparılan məntiq əməllərini özündə saxlayır. Belə düsturun doğruluq qiymətlərini düstura daxil olan mülahizələrin doğruluq qiymətlərinə və məntiq əməllərinin doğruluq cədvəllərinə görə birqiymətli təyin etmək olar. Bu, bilavasitə dəyişənlərin veri-lən qiymətlərinə görə cəbri ifadələrin qiymətlərini hesabla-maqla analojidir. Lakin cəbri ifadələr üzərində əvvəlcə ey-nilik çevrilmələri aparıb, sonra isə dəyişənlərin aldıqları qiymətləri yerinə yazmaqla hesablamanı daha rasional şəkildə yerinə yetirmək olar. Təbiidir ki, belə eynilik çevrilmələrini məntiq düsturları üzərində də aparmaq mümkündür. Yəni verilmiş məntiq düsturunu onunla eynigüclü olan sadə düsturla əvəz edib, alınan yeni düstur üçün doğruluq qiymətini hesablamaq daha əlverişlidir. Məntiq düsturlarının belə çevrilməsini eynigüclü çevrilmə adlandıracağıq.

Eynigüclü çevrilmələr zamanı əldə rəhbər tutacağımız əsas prinsip ondan ibarətdir ki, əgər istənilən məntiq düsturunda sadə mülahizələri və ya məntiq əməlləri ilə bağlı olan aralıq düsturları onlarla eyniguclü olan düsturlarla əvəz etsək, onda əvvəlki düsturla eynigüclü olan düstur alarıq.

Məsələn, $\rho(x) = D$, $\rho(y) = Y$ qiymətləri üçün

$$\alpha : ((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}))$$

düsturunun doğruluq qiymətini hesablamaq üçün əvvəlcə onu aşağıdakı kimi eynigüclü çevirək.

$$\alpha : ((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})) \equiv ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)) \equiv (x \Leftrightarrow y).$$

Deməli,

$$\alpha : (x \Leftrightarrow y) = (D \Leftrightarrow Y) = Y$$

olar. Eləcə də, $\rho(x) = D$, $\rho(y) = D$ olduqda

$$\beta : (((x \vee x) \wedge y) \vee (x \wedge x))$$

düsturunun doğruluq qiymətini hesablamaq üçün əvvəlcə

$$x \wedge x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$$

eynigüclülüklərindən istifadə edərək β düsturunu aşağıdakı kimi çevirək:

$$\beta : (((x \vee x) \wedge y) \vee (x \wedge x))) \equiv ((x \wedge y) \vee x).$$

İndi isə alınan sadə düstur üçün doğruluq qiymətini hesablayaq:

$$\alpha : ((x \wedge y) \vee x)) \equiv ((D \wedge D) \vee D) = (D \vee D) = D.$$

§9. İkilik prinsipi

Bu prinsipin riyaziyyatda rolu hamıya məlumdur. Məsələn, belə bir təklifə baxaq.

İki müxtəlif nöqtə yeganə düz xətti müəyyən edir. Əgər burada «*nöqtə*» terminini «*düz xətlə*» və tərsinə «*düz xətt*» terminini də «*nöqtə*» ilə əvəz etsək, yeni bir təklif alarıq. Kəsişən iki müxtəlif düz xətt yeganə bir nöqtəni müəyyən edir. Belə təkliflər riyaziyyatda dual (ikili) təkliflər adlanır. Bəzən də belə deyirlər ki, bu təkliflərdən biri digərinin ikili formasıdır. Cəbr kursunda xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həllində, həndəsədə proyektiv fəza-ya aid təkliflərin (Paskal və Brianşon teoremləri və s.) qoyuluşu zamanı, mücərrəd çoxluqlar nəzəriyyəsində və başqa sahələrdə bu cür dual məsələlərlə qarşılaşırıq. Maraqlı cəhətdir ki, əgər dual məsələlərdən birinin həlli varsa (mülahizə doğrudursa), onda digərinin də həlli var (digər mülahizə doğrudur).

Riyaziyyata ikilik prinsipi birinci dəfə fransız alimi Ponsele tərəfindən daxil edilmişdir.

Riyazi məntiqdə də ikilik prinsipinin köməyilə verilmiş mülahizədən yeni mülahizə almaq və həmçinin, düstur verildikdə onunla ikili olan yeni düstur qurmaq olar. Bunların birinin doğruluğuna əsasən digərinin doğru olması nəticəsi çıxır. Sonralar görəcəyik ki, hər bir düsturu onunla eynigüclü olan elə düsturla əvəz etmək olar ki, o yalnız $\wedge, \vee, \rceil$ əməllərini özündə saxlayır. Ona görə də biz burada elə düsturlara baxacağıq ki, onlar yalnız yuxarıdakı əməllərin köməyilə düzəldilsin.

$\wedge$ və $\vee$ əməllərini bir-birilə ikili olan əməllər adlandırıb, dual (ikili) düsturlara aşağıdakı kimi tərif verək.

Tərif. Əgər iki α və α^* məntiq düsturlarından biri digərindən ikili əməllərin bir-biri ilə əvəz edilməsi nəticəsində alınarsa, onda belə düsturlara ikili düsturlar deyilir. Məsələn,

$$(((A \wedge B) \vee \overline{A}) \wedge C) \text{ və } (((A \vee B) \wedge \overline{A}) \vee C),$$

eləcə də

$$((\overline{\overline{A} \vee B}) \wedge (C \wedge \overline{D})) \text{ və } ((\overline{\overline{A} \wedge B}) \vee (C \vee \overline{D}))$$

düsturları bir-biri ilə ikili olan düsturlardır.

De Morqan qanunlarından istifadə edərək verilmiş α düsturu ilə ikili olan α^* düsturunu konstruktiv qura bilərik.

Fərz edək ki, α düsturu $x_1, x_2, ..., x_n$ mülahizələrindən asılıdır: $\alpha\ (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Məlumdur ki, de Morqan qanunları düsturlara aid olan inkarı elementar mülahizələr üzərinə köçürməklə $\wedge$ və $\vee$ əməllərinin birini digəri ilə əvəz edir. Bu da verilmiş α

və β düsturlarının eynigüclülüyünə əsasən onlarla ikili olan α^* və β^* düsturlarının eynigüclü olması nəticəsini çıxarmağa imkan verir. Bu nəticə ikilik prinsipi adlanan aşağıdakı təklif şəklində söylənir.

İkilik prinsipi. Əgər α və β düsturları eynigüclüdürsə, onda onlara ikili olan α^* və β^* düsturları da eynigüclü olar.

Doğrudan da, fərz edək ki, $\alpha(x_1,x_2,...x_n)$ və $\beta(x_1,x_2,...,x_n)$ eynigüclü düsturlar, $x_1,x_2,...,x_n$ isə bu düsturlara daxil olan elementar mülahizələrdir.

Onda yuxarıdakı nəticəyə əsasən

$$\alpha^*(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n) \equiv \alpha\overline{(x_1,x_2,...,x_n)}$$

və

$$\beta^*(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n) \equiv \beta\overline{(x_1,x_2,...,x_n)}$$

olur.

Əgər bu eynigüclülüklərdə $x_1,x_2,...,x_n$ mülahizələrini uyğun olaraq özlərinin $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n$ inkarı ilə əvəz etsək,

$$\alpha^*(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \alpha\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \qquad (9.1)$$

$$\beta^*(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \beta\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \qquad (9.2)$$

alarıq. Digər tərəfdən

$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \beta(x_1,x_2,...,x_n)$$

eynigüclülüyünə əsasən

$$\alpha(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n) \equiv \beta(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$$

və eləcə də

$$\alpha^*\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \equiv \beta^*\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \qquad (9.3)$$

olar. Eynigüclülük münasibətinin tranzitiv olduğunu nəzərə alsaq, (9.1), (9.2) və (9.3)-dən

$$\alpha^*(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \beta^*(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (9.4)$$

alınar.

(9.1) düsturundan görünür ki, verilmiş düsturla ikili olan düsturu qurmaq üçün həmin düsturun özünü və oraya daxil olan bütün mülahizələri inkarları ilə əvəz etmək lazımdır:

$$\alpha^*(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \alpha\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}$$

Tərif. Əgər $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturu onunla ikili olan düsturla üst-üstə düşərsə, onda α düsturuna özü-özünə ikili düstur deyilir.

Məsələn,

$$\alpha(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$$

düsturu özü-özü ilə ikili olan düsturdur.

Doğrudan da, məntiq əməllərinin xassələrindən istifadə edərək aşağıdakı kimi ardıcıl çevrilmələr aparsaq,

$$\alpha^*(x_1,x_2,x_3) = \alpha\overline{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)} = \overline{(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)} \equiv$$
$$\equiv \overline{(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)} \wedge \overline{(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3)} \wedge \overline{(\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)} \equiv (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv$$
$$\equiv ((x_1 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (x_2 \vee x_3)) \vee (x_2 \wedge x_3) \equiv$$
$$\equiv ((x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \vee x_3) \equiv ((x_1 \vee (x_1 \vee x_2) \vee$$
$$\vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv$$
$$\equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee ((x_2 \wedge (x_2 \wedge x_3)) \vee ((x_3 \wedge (x_2 \wedge$$
$$\wedge x_3)) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee$$
$$\vee (x_2 \wedge x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

alarıq. Beləliklə, $\alpha^*(x_1,x_2,x_3) = \alpha(x_1,x_2,x_3)$ olur.

§10. Mülahizələr cəbrində həllolunma problemi

Riyaziyyatın öyrəndiyi maraqlı sahələrdən biri də bütöv bir sinfi əhatə edən eynitipli məsələlərin həlli üçün vahid bir metodun (alqoritmin) olub-olmadığını aşkara çıxarmaq və əgər varsa onu tapmaqdan ibarətdir. Başqa sözlə, elə bir səmərəli üsul göstərmək mümkündürmü ki, onun köməyilə verilmiş sinif məsələlərin şərtindən istifadə edə-rək bir sıra göstərişləri yerinə yetirdikdən sonra həmin sinif məsələlərin həlli tapılmış olsun? Verilmiş sinif məsələlərin həlli üçün belə bir metodun (alqoritmin) tapılması və ya onun olmadığının aşkar edilməsi həllolunma problemi adını almışdır.

Məsələn, üçdərəcəli tənliklərin həlli üçün belə bir səmərəli üsul XVI əsrdə İtalya alimi Kardanonun davamçıları tərəfindən tapılmış Kardano düsturlarıdır. Kardano düsturları

$$x^3 + px + q = 0$$

şəklində ədədi əmsallı kub tənliyin köklərini əmsallarla ifadə edir.

Beləcə də Evklid alqoritmi adlanan ardıcıl bölmə üsulu ixtiyari iki və daha çox sayda çoxhədlinin ƏBOB-ni tapmağa imkan verir və s.

Müxtəlif alqoritmlərin tapılması və yaxud bəzi sinif məsələlərin həlli üçün alqoritmlərin olmamasının isbatı, habelə alqoritmlərin ümumi nəzəriyyəsinin qurulması hesablama riyaziyyatının sürətli inkişafına səbəb olmuşdur.

Mülahizələr cəbrində həllolunma problemi aşağıdakı kimi söylənir.

Elə bir alqoritm vardırmı ki, onun vasitəsilə verilmiş məntiq düsturunun eyniliklə doğru olub-olmadığını müəyyən etmək mümkün olsun? Başqa cür desək mülahizələr cəbrinin hər bir qarşıya çıxan düsturunun məntiq qanunu ifadə edib-etmədiyini müəyyən edən bir riyazi aparat vardırmı?

Bu paraqrafda mülahizələr cəbrinin hər bir düsturunun eyniliklə doğru və ya yerinə yetirilən olub-olmaması

sualına cavab verən bir neçə alqoritmin varlığını göstərəcəyik.

I. Məlumdur ki, mülahizələr cəbrinin hər bir düsturu yeganə bir doğruluq cədvəlini müəyyən edir. Əgər α düsturu $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mülahizələrini özündə saxlayırsa, onda ona uyğun cədvəl 2^n sayda sətir və verilmiş düstura daxil olan alt düsturların sayı qədər sütundan ibarət olacaqdır. Axırıncı sütunun hər bir ünsürü $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mülahizələrinin müəyyən qeyd olunmuş qiymətləri yığımı üçün $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)$ düsturunun doğruluq qiymətidir. Axırıncı sütunda yalnız D-lərin olması α düsturunun tavtologiya olması deməkdir və tərsinə. Eləcə də α düsturunun yerinə yetirilənliyi ona uyğun cədvəlin axırıncı sütununda heç olmasa bir dənə D olduğunu göstərir. Beləliklə, sonlu sayda göstərişləri yerinə yetirərək (doğruluq cədvəli quraraq) hər bir düsturun eyniliklə doğru olub-olmadığını müəyyən edə bilərik.

Əgər α düsturuna uyğun qurulmuş cədvəlin axırıncı sütununda yalnız Y-lar durursa, düstur yerinə yetirilməyəndir və deməli o, eyniliklə yalan düsturdur.

Misal. Doğruluq cədvəli qurmaqla aşağıdakı düsturun eyniliklə doğru olub-olmadığını yoxlayaq:

$$\alpha(x_1, x_2) = ((x_1 \wedge \bar{x}_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2)).$$

Birinci sətirdə α düsturunun bütün mümkün olan altdüsturlarını yazmaqla aşağıdakı cədvəli düzəldək:

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2)$
D	D	Y	Y	Y	Y	D
D	Y	Y	D	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	D	D
Y	Y	D	D	Y	Y	D

Cədvəlin axırıncı sütunundan göründüyü kimi baxdığımız düstur yerinə yetiriləndir, lakin tavtologiya deyildir.

II. Verilmiş məntiq düsturunun eyniliklə doğru olub-olmadığını müəyyən etməyin ikinci üsulunu göstərmək üçün əvvəlcə düsturun xususi forması olan konyunktiv və dizyunktiv normal formaları ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, $x_1, x_2, ..., x_n$ mülahizələri verilmişdir.

Tərif 1. Elementar mülahizələr və onların inkarlarının dizyunksiyalarından (konyunksiyalarından) ibarət olan hər bir düstura elementar dizyunksiya (konyuksiya) deyilir.

Məsələn,

$$(x_1 \vee x_2),\ (x_1 \vee x_2 \vee x_3),\ (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$$

elementar dizyunksiyalar,

$$(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2),\ (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_2),\ (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$$

isə elementar konyunksiyalardır.

Təklif 1. Elementar dizyunksiya (konyunksiya) şəklində olan məntiq düsturu onda və ancaq onda tavtologiya (ziddiyyət) olar ki, həmin düstura hər hansı mülahizə öz inkarı ilə birlikdə daxil olsun.

Bu təklifi elementar konyunksiya üçün isbat edək, elementar dizyunksiya üçün isbat buna tamamilə oxşardır.

Fərz edək ki, hər hansı x_i mülahizəsi və onun inkarı $\bar{x}_i$ verilmiş düstura eyni zamanda daxildir. §8-də 2^0 və 4^0 eynigüclülüklərindən istifadə edərək həmin düsturu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$(x_i \wedge \bar{x}_i) \wedge \cdots.$$

Burada nöqtələrin yerində düstura daxil olan başqa mülahizələrin (əgər varsa) konyunksiyaları durur. Göründüyü kimi mötərizə daxilindəki ifadə eyniliklə yalandır. Onda 14^0 eynigüclülüyünə görə bütün düstur eyniliklə yalan olacaqdır.

Tərif 2. Elementar dizyunksiyaların konyunksiyalarından ibarət olan hər bir düstura konyunktiv normal forma deyilir.

Məsələn,

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3),$$

$$(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3)$$

konyuktiv normal formalardır.

Tərif 3. Elementar konyunksiyaların dizyunksiyalarından ibarət hər bir düstura dizyunktiv normal forma deyilir. Məsələn,

$$\bar{x}_1 \vee (x_1 \wedge x_2),\ (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee \bar{x}_3,$$

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3)$$

dizyunktiv normal formalardır.

Göründüyü kimi, konyunktiv və dizyunktiv normal formalar elə düsturlardır ki, həmin düsturlarda yalnız $\neg$, $\wedge$, $\vee$ əməlləri iştirak edir. Ona görə də hər bir düsturu kon-yunktiv (dizyunktiv) normal formaya gətirmək olar. Bunun üçün verilmiş düsturda iştirak edən $\Rightarrow$ və $\Leftrightarrow$ əməllərini (əgər varsa) $\neg$, $\wedge$, $\vee$ əməlləri ilə əvəz etmək lazımdır. Bu işi implikasiya və ekvivalensiya əməllərini yuxarıda göstərdiyimiz üç məntiq əməli ilə ifadə edən eynigüclülüklərdən və habelə məntiq əməllərinin 1^0 - 31^0 xassələrindən istifadə etməklə yerinə yetirmək olar.

Misal. $(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Leftrightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ düsturunu konyunktiv və dizyunktiv normal formaya gətirin.

Ekvivalensiya əməlinin tərifinə görə:

$$(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Leftrightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2) \equiv$$

$$\equiv ((x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2)) \wedge ((\bar{x}_1 \wedge x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow \bar{x}_2)).$$

İmpliksiya əməlini $\neg$, $\wedge$ və $\vee$ əməlləri ilə ifadə edək və məntiq əməllərinin 5^0 - 6^0, 8^0 - 11^0, 14^0 - 15^0 xassələrini nəzərə alaq. Onda

$$((x_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2)) \wedge ((\bar{x}_1 \wedge x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow \bar{x}_2)) \equiv (\overline{(x_1 \Rightarrow \bar{x}_2)} \vee$$
$$\vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)) \wedge (\overline{(\bar{x}_1 \wedge x_2)} \vee (x_1 \Rightarrow \bar{x}_2)) \equiv (\overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)} \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)) \wedge$$
$$\wedge (\overline{(\bar{x}_1 \wedge x_2)} \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)) \equiv ((x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)) \wedge ((x_1 \vee \bar{x}_2) \vee$$
$$\vee (\bar{x}_1 \vee x_2)) \equiv ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)) \vee ((x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \vee \bar{x}_2)) \vee$$
$$\vee ((\bar{x}_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge \bar{x}_2)) \vee ((\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)) \equiv (x_2 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee$$
$$\vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_2) \vee$$
$$\vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2).$$

Deməli, verilmiş düsturla eynigüclü olan dizyunktiv normal forma

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$$

şəklindədir.

Konyunktiv normal formaya keçmək üçün dizyunksiyanın konyunksiya əməlinə görə paylama qanunundan istifadə edək:

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \equiv ((x_1 \wedge x_2) \vee \bar{x}_1) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \vee x_2) \equiv$$
$$\equiv (x_1 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_2 \wedge \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_2) \equiv$$
$$\equiv (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge x_2 .$$

Deməli, verilmiş düsturla eynigüclü olan konyunktiv normal forma

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge x_2$$

şəklindədir.

Məntiq düsturunun konyunktiv və dizyunktiv normal formalarından istifadə edərək həllolunma problemi üçün daha asan və əlverişli üsul göstərmək olar.

Fərz edək ki, $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)$ ixtiyari düsturdur. Tutaq ki, α' bu düsturla eynigüclü olan konyunktiv normal forma, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ isə formaya daxil olan elementar dizyunksiyalardır. Onda aydındır ki, $\alpha' = \bigwedge\limits_{i=1}^{s} \alpha_i$ olar. Göründüyü kimi α' düsturu onda və ancaq onda eyniliklə doğru olar ki,

α_i $(i = \overline{1,s})$ konyunktiv hədlərin hamısı eyniliklə doğru olsun. Bu paraqrafdakı I təklifə əsasən elementar dizyunksiya oraya hər hansı bir mülahizə öz inkarı ilə birlikdə daxil olduqda və ancaq onda eyniliklə doğru olar.

Beləliklə, aşağıdakı təklifi alırıq.

Təklif 2. Verilmiş məntiq düsturu onda və ancaq onda eyniliklə doğru olar ki, onunla eynigüclü olan konyunktiv normal formada iştirak edən hər bir elementar dizyunksiyaya mülahizələrdən heç olmasa biri öz inkarı ilə birlikdə daxil olsun.

Verilmiş düsturun eyniliklə yalan olması kriteriyasını da eyni qayda ilə söyləmək olar.

Təklif 3. Verilmiş məntiq düsturu onda və ancaq onda eyniliklə yalan olar ki, onunla eynigüclü olan dizyunktiv normal formada iştirak edən hər bir elementar konyunksiyaya mülahizələrdən heç olmasa biri öz inkarı ilə birlikdə daxil olsun.

Verilmiş α düsturunun yerinə yetirilənliyi məsələsi $\overline{\alpha}$ düsturunun eyniliklə yalan olub-olmaması məsələsinə gətirilir.

Təklif 4. Verilmiş α məntiq düsturu onun $\overline{\alpha}$ inkarı eyniliklə doğru olmadıqda və ancaq onda yerinə yetirilən olar.

§11. Məntiq qanunları

Eyniliklə doğru düsturların əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, onların hər biri məntiq qanununu ifadə edir. Müəyyən bir mülahizənin doğru və ya yalan olması haqqında mühakimə yürüdərkən və əqli nəticə çıxararkən bu qanunlardan mühüm bir vasitə kimi istifadə edilir. Məntiq əməllərinin §8-də göstərdiyimiz bütün xassələri eyni zamanda məntiq qanunlarıdır. Burada biz tarixən ənənəvi olan daha bir neçə məntiq qanunu üzərində dayanacağıq.

I. Eynilik qanunu.

$$A \Rightarrow A. \qquad (11.1)$$

Bu qanunu belə ifadə etmək olar. Hər bir mülahizə özü-özünün məntiqi nəticəsidir.

$$A \Leftrightarrow A \equiv (A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow A)$$

eynigüclülüyünə istinad edərək eynilik qanununu belə də yazmaq olar:

$$A \Leftrightarrow A. \qquad (11.1')$$

Eynilik qanunu verilmiş mülahizənin bütün mühakimə müddətində sabit qalmasını tələb edir. Qanunun adı da buradan götürülmüşdür.

II. Ziddiyyət qanunu.

$$\overline{A \wedge \overline{A}}. \qquad (11.2)$$

Qanun belə ifadə edilir. Qarşılıqlı əks olan istənilən iki mülahizə eyni zamanda doğru ola bilməz.

Doğrudan da, $\overline{A \wedge \overline{A}}$ düsturunun eyniliklə doğru olmasından alınır ki, $A \wedge \overline{A}$ düsturu eyniliklə yalandır. Bu isə o deməkdir ki, A və $\overline{A}$ mülahizələri eyni zamanda doğru ola bilməz. Bu qanun bəzən mənasızlığa gətirmə də adlanır.

III. Üçüncünün istisna edilməsi qanunu.

$$A \vee \overline{A}. \qquad (11.3)$$

Qanun belə ifadə edilir. İstənilən iki qarşılıqlı əks mülahizədən biri həmişə doğrudur.

Həqiqətən, istənilən mülahizə üçün ancaq iki hal mümkündür. O, ya doğrudur, ya yalandır. Üçüncü hal verilməmişdir. Qanunun adı da buradan götürülmüşdür.

IV. Əks mövqe qanunu.

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}). \qquad (11.4)$$

Bu qanun hökm edir ki, əgər A mülahizəsindən B mülahizəsi alınarsa, onda B-nin inkarından da A-nın inkarı alınar.

V. İkiqat inkar qanunu.

$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A. \qquad (11.5)$$

Qanun belə ifadə edilir. İstənilən mülahizənin inkarının inkarı həmin mülahizənin özü ilə eynigüclüdür.

VI. Silloqizm qanunu.

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C). \qquad (11.6)$$

Qanunun ifadəsi belədir: Əgər B mülahizəsi A-nın məntiqi nəticəsidirsə və C mülahizəsi də B-nin məntiqi nəticəsidirsə, onda C mülahizəsi A-nın da məntiqi nəticəsidir. Bu qanun implikasiya əməlinin tranzitiv olduğunu göstərir.

VII. Modus ponens (təsdiqedici modus) qanunu.

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B. \qquad (11.7)$$

Qanun belə ifadə edilir. Əgər hər hansı mülahizə və şərti həmin bu mülahizə olan implikasiya doğrudursa, onda həmin implikasiyanın nəticəsi də doğrudur. Bu qanunun mülahizələr məntiqində nə qədər böyük əhəmiyyətə malik olduğunu sonralar görəcəyik. (11.1)-(11.7) düsturlarının doğrudan da, məntiq qanunu olduğuna onlara doğruluq cədvəli qurmaq və ya düsturlar üzərində eynigüclü çevirmələr aparmaqla inanmaq olar. Məsələn, (11.6) düsturunun tavtologiya olduğunu yoxlayaq:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv ((\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\overline{A} \vee C) \equiv \overline{((\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C))} \vee (\overline{A} \vee C) \equiv \overline{((\overline{A} \vee B) \vee}$$
$$\overline{\vee (\overline{B} \vee C))} \vee (\overline{A} \vee C) \equiv ((A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{C})) \vee (\overline{A} \vee C) \equiv$$
$$\equiv ((A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \vee C) \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{C} \vee C) \equiv$$
$$\equiv \underbrace{(\overline{A} \vee C \vee B \vee A)}_{D} \wedge \underbrace{(\overline{A} \vee C \vee B \vee \overline{B})}_{D} \equiv D$$

Burada D ilə eyniliklə doğru düstur işarə edilmişdir.

§12. Mülahizələr məntiqində funksiya anlayışı. Funksiyaların eynigüclülüyü

Yuxarıdakı paraqrafda gördük ki, mülahizələr cəbri baxımından hər bir məntiq düsturu özünün doğruluq cədvəli vasitəsilə tam xarakterizə olunur. Bu isə bizi məntiq cəbrində funksiya anlayışına gətirib çıxarır.

Beləliklə, n dənə propozisional hərfi özündə saxlayan hər bir propozisional forma (məntiq düsturu) n sayda arqumentdən asılı bir funksiya doğurur. Belə funksiya məntiq funksiyası və ya doğruluq funksiyası adlanır. Bu funksiyanın asılı olduğu arqumentlərin və özünün qiymətləri ancaq D və Y ola bilər. D və Y simvollarını biz uyğun olaraq 1 və 0 ədədləri ilə əvəz edib məntiq funksiyasına aşağıdakı kimi tərif verə bilərik.

Tərif 1. n dənə $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərindən asılı $F(x_1,x_2,...,x_n)$ məntiq funksiyası elə funksiyaya deyilir ki, onun asılı olduğu arqumentlər və özü yalnız 1 və 0 qiymətlərini alır. Buradan görünür ki, $F(x_1,x_2,...,x_n)$ məntiq funksiyası aşağıdakı cədvəl ilə verilə bilər:

x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n	$F(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$
0	0	0	…	0	0	$F(0, 0, 0,...,0, 0)$
1	0	0	…	0	0	$F(1, 0, 0,...,0, 0)$
…	…	…	…	…	…	………………..
0	0	0	…	0	1	$F(0, 0, 0,...,0, 1)$
…	…	…	…	…	…	………………..
1	1	1	…	1	1	$F(1, 1, 1,...,1, 1)$

Cədvəldən aydın olur ki, $x_1,x_2,...,x_n$ arqumentləri $\{0, 1\}$ çoxluğunda dəyişməklə, onların ala biləcəyi bütün müxtəlif komplekslərin sayı 0 və 1 ədədlərindən düzəldilmiş bütün n-liklər sayına, yəni 2^n-ə bərabərdir. Ona görə də n dənə dəyişəndən asılı bütün mümkün olan məntiq funksiyaları sayı 2^n uzunluqlu bütün ikilik komplekslərinin sayına, yəni 2^{2^n}-ə bərabərdir.

Xüsusi halda $n=1$ olduqda belə məntiq funksiyaları 4 dənədir, $F(x_1)=\bar{x}_1$ bunlardan biridir. $F(0)=1$, $F(1)=0$.

Digər birdəyişənli məntiq funksiyaları bunlardır:

$$E(x_1)=x_1\ ,\ J(x_1)=1\ ,\ \Theta(x_1)=0\ .$$

$n=2$ olduqda 16 dənə ikidəyişənli məntiq funksiyası alırıq. Bunlardan 4 dənəsi bildiyimiz binar məntiq əməlləri ilə üst-üstə düşür. Bir daha xatırladaq ki, onların işarə edilməsi və təyini aşağıdakı cədvəllə verilə bilər:

(x_1, x_2)	$\wedge(x_1, x_2)$	$\vee(x_1, x_2)$	$\Rightarrow(x_1, x_2)$	$\Leftrightarrow(x_1, x_2)$
(0, 0)	0	0	1	1
(1, 0)	0	1	0	0
(0, 1)	0	1	1	0
(1, 1)	1	1	1	1

Aydındır ki, hər bir məntiq düsturu yuxarıda verdiyimiz tərifə görə bir məntiq funksiyası təyin edir və həm də məntiqi eynigüclü düsturların doğurduğu funksiyalar üst-üstə düşürlər. Tərsinə öz doğruluq cədvəli ilə verilmiş hər bir məntiq funksiyasına uyğun bir məntiq düsturu tapmaq olar.

Tərif 2. Əgər məntiq funksiyası onun asılı olduğu arqumentlərin istənilən qiymətləri yığımı üçün 1-ə bərabər qiymət alarsa, onda ona eyniliklə doğru məntiq funksiyası və ya ümumqiymətli funksiya deyilir. Məsələn, $J(x)=1$ funksiyası ümumqiymətlidir.

F funksiyasının ümumqiymətli olmasını $\vdash F$ kimi işarə edəcəyik.

Tərif 3. Arqumentlərin istənilən qiymətləri yığımı üçün yalnız 0-a bərabər qiymət alan məntiq funksiyasına eyniliklə yalan funksiya və ya ziddiyyət deyilir. Məsələn, $\Theta(x)$ funksiyası eyniliklə yalan funksiyadır.

Tərifdən aydındır ki, eyniliklə doğru olan bütün məntiq cəbri düsturları eyni bir məntiq funksiyasını - eyniliklə 1-ə bərabər funksiyanı, eyniliklə yalan olan bütün məntiq düsturları yeganə eyniliklə sıfra bərabər funksiyanı təsvir edir.

Fərz edək ki, $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən asılı

$$F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$$

məntiq funksiyası verilmişdir.

Əgər 1 və 0 ədədlərindən düzəldilmiş elə $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, ..., \mathscr{E}_{i-1}, \mathscr{E}_i, \mathscr{E}_{i+1}, ..., \mathscr{E}_n$ ardıcıllığı göstərmək mümkündürsə ki,

$$F(\mathscr{E}_1, ..., \mathscr{E}_{i-1}, 0, \mathscr{E}_{i+1}, ..., \mathscr{E}_n) \neq F(\mathscr{E}_1, ..., \mathscr{E}_{i-1}, 1, \mathscr{E}_{i+1}, ..., \mathscr{E}_n)$$

olsun, onda deyirlər ki, F funksiyası x_i dəyişənindən əhəmiyyətli asılıdır. F funksiyası o dəyişəndən ki, əhəmiyyətli asılıdır, həmin dəyişənə bu funksiya üçün əhəmiyyətli dəyişən, qalan dəyişənlərə isə saxta dəyişənlər deyirlər.

Məsələn, $F(x_1, x_2) = \wedge(x_1, x_2)$ funksiyasına x_1 və x_2 dəyişənləri əhəmiyyətli daxildir. $F(x_1, x_2) = x_1 \vee (\overline{x_1} \vee x_2)$ funksiyasına isə x_2 dəyişəni saxta daxildir.

Düsturlarda olduğu kimi məntiq funksiyalarının da eynigüclülüyündən danışmaq olar.

Tərif 4. İki F və G məntiq funksiyaları onlara daxil olan arqumentlər külliyyatının uyğun qiymətləri yığımı üçün eyni doğruluq qiymətlərinə malik olarsa, belə funksiyalara eynigüclü məntiq funksiyaları deyilir və $F \equiv G$ kimi işarə olunur.

Məsələn,

$$F(x, y) = \rceil(x \wedge y) \text{ və } G(x, y) = \rceil x \vee \rceil y$$

funksiyaları eynigüclü məntiq funksiyalarıdır, çünki arqumentlərin hər bir qeyd edilmiş qiymətlərində onlar eyni doğruluq qiymətlərinə malikdir.

$$F(1,\ 1) = G(1,\ 1); \quad F(1,\ 0) = G(1,\ 0);$$

$$F(0,\ 1) = G(0,\ 1); \quad F(0,\ 0) = G(0,\ 0).$$

Aydındır ki, əgər $F \equiv G$ olarsa və x dəyişəni F funksiyasına daxildirsə, lakin G-yə daxil deyilsə, onda həmin dəyişən F-ə saxta daxildir.

Qeyd edək ki, F və G funksiyaları onda və ancaq onda eynigüclü olar ki, $\Leftrightarrow(F, G)$ funksiyası ümumqiymətli olsun.

§13. Funksiyanın düsturla göstərilişi

Yuxarıda qeyd etdik ki, hər bir məntiq düsturu bir məntiq funksiyası doğurur. Məntiqi eynigüclü düsturların doğurduğu funksiyalar üst-üstə düşür. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır. Bütün doğruluq funksiyalarını düsturla vermək olarmı? Bu sualın cavabı müsbətdir və aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem. Hər bir məntiq funksiyasını yalnız $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ əməllərini özündə saxlayan məntiq düsturu şəklində göstərmək olar.

İsbatı. Tutaq ki,

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{13.1}$$

n dəyişənli istənilən məntiq funksiyasıdır. Bu funksiyaya uy-ğun məntiq düsturunu α ilə işarə edək və onu aşağıdakı kimi düzəldək:

$$\alpha : (F(1, ..., 1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n) \vee (F(1, 1, ..., 0) \wedge$$
$$\wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \overline{x}_n) \vee \cdots \vee (F(1, 0, ..., 0) \wedge x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{x}_n) \vee \cdots$$
$$\cdots \vee (F(0, 0, ..., 0) \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{x}_n). \tag{13.2}$$

Burada iştirak edən konyunksiyaları məntiqi «*hasil*», dizyunksiyaları isə məntiqi «*cəm*» adlandırmağı şərtləşək. (13.2) cəminin hər bir «*toplananı*»nın birinci «*vuruğu*» $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərinin hər hansı müəyyən qiymətlərinə uyğun F funksiyasının qiymətindən, qalan «*vuruqları*» isə ya x_i, dəyişənlərindən, ya da onların inkarlarından ibarətdir. Həm də inkar işarəsi ancaq elə dəyişənlərə aiddir ki, onlar birinci vuruğa 0 qiyməti ilə daxildir. Məsələn,

$$F(1,0,0,...,1,0)\wedge x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge \overline{x}_n . \quad (13.3)$$

Bundan əlavə (13.2) düsturuna (13.3) şəklində bütün mümkün olan toplananlar daxildir. Aşkardır ki, belə toplananların sayı 2^n qədərdir.

Aydın göstərmək olar ki, (13.2) düsturu elə həmin $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasını müəyyən edir.

Doğrudan da əgər arqumentlərin

$$\rho(x_1)=0,\ \rho(x_2)=1,...,\rho(x_{n-1})=1,\ \rho(x_n)=1$$

kimi hər hansı qiymətləri yığımını götürsək, onda funksiya $F(0,1,...,1,1)$ qiymətlərini alar. (13.2) düsturuna daxil olan

$$F(0,1,...,1,1)\wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n \quad (13.4)$$

toplananına baxaq.

Əgər bu toplananda $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərinə onun birinci vuruqda aldığı qiymətləri versək, onda

$$F(0,1,...,1)\wedge \overline{0} \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1$$

ifadəsini alarıq. Burada ikincidən başlayaraq bütün vuruqlar 1-ə bərabərdir. Ona görə də bu fəslin §8-dəki 12^0 eynigüclülüyündən istifadə edərək onları atmaq olar. Odur ki, baxılan hasil birinci vuruqla eynigüclüdür. (13.2)-də iştirak edən qalan bütün toplananlarda inkar işarəsinin dəyişənlərə aid edilməsi baxdığımız həddəkindən fərqli olacaqdır. Dəyişənlərin qeyd etdiyimiz həmin qiymətlər yığımı üçün hər bir hasilə ya 0 ədədinin özü və yaxud 1-in inkarı daxildir. Deməli, vuruqlardan hər biri həmişə 0-a bərabər olacaq. Belə hədlərin hamısını yenə də §8-dəki 15^0 eynigüclülüyü-nün köməyilə (13.2) düsturundan uzaqlaşdırsaq, yalnız (13.4) hasili qalar ki, bu da yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi $F(0,1,...,1)$ ifadəsi ilə eynigüclüdür. Bu isə $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının arqumentlərin seçdiyimiz qiymətləri yığımı

üçün aldığı doğruluq qiymətindən başqa bir şey deyildir.

Beləliklə, $x_1,x_2,...,x_n$ dəyilşənlərini istənilən şəkil-də öz doğruluq qiymətləri ilə əvəz etdikdə α düsturu və $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası eyni doğruluq qiymətinə malik olur. Bundan əlavə (13.2) düsturu həm də yalnız $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ əməllərinin köməyilə düzəldilmişdir. Teorem isbat olundu.

(13.2) düsturunda $F(x_1,x_2,..., x_n)$ funksiyasını onun $\overline{F}(x_1,x_2,...,x_n)$ inkarı ilə əvəz etsək, onda $\overline{F}$ funksiyası ilə eynigüclü olan

$$\overline{\alpha} : (\overline{F}(1,1,...,1)\wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)\vee$$
$$\vee \cdots \vee (\overline{F}(0,0,...,0)\wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{x}_n) \quad (13.5)$$

düsturunu alarıq.

(13.5) düsturundan onun inkarına keçsək $\overline{\overline{F}}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası ilə eynigüclü olan

$$\overline{\overline{\alpha}} : \overline{(\overline{\overline{F}}(1,1,...,1)\wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)\vee \cdots}$$
$$\overline{\cdots \vee (\overline{\overline{F}}(0,0,...,0)\wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)} \quad (13.6)$$

düsturu alınar. Bu fəslin §8-dəki 1^0, 8^0, 9^0 eynigüclülüklərini (13.6)-ya tətbiq etsək, $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının məntiq düs-turu şəklində başqa ifadəsini alarıq:

$$\alpha : (F(1,1,...,1)\vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \cdots \vee \overline{x}_n)\wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (F(0,0,...,0)\vee x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n). \quad (13.7)$$

(13.2) və (13.7) düsturlarını onlarla eynigüclü olan elə düsturlarla əvəz etmək olar ki, həmin düsturlar yalnız elementar dəyişənləri özündə saxlayar. Bunu (13.2) düsturu üçün edək, (13.7) düsturu üçün də konstruksiya analojidir.

Fərz edək ki, $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası eyniliklə sıfır funksiya deyildir. Bu halda dəyişənlərin bəzi qiymət-ləri yığımı üçün o, 1-ə bərabər qiymət alacaqdır. Funksiyanı

(13.2) düsturu şəklində ifadə edərkən yalnız o toplananlar 1-ə bərabər qiymət alır ki, onların birinci vuruğu 1-ə bərabər olsun. Ona görə də (13.2) cəmində yalnız elə toplananları saxlaya bilərik ki, onların birinci vuruğu 1-ə bərabər qiymət alsın, qalan toplananları isə 15^0 eynigüclülüyünə əsasən atarıq. Həmin saxladığımız hədlərdən 12^0 eynigüclülüyündən istifadə edərək yenidən birinci vuruqları uzaqlaşdırsaq, tələb olunan göstərilişi alarıq.

Misal 1. Tutaq ki, üçdəyişənli $F(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$F(1,1,1)=1\,,\ F(0,0,0)=1\,,$$

qalan bütün hallarda isə F funksiyası 0-a bərabərdir. Bu halda (13.2) düsturunu tətbiq etmək əlverişlidir və F funksiyasının təsvir etdiyi düstur belə olar:

$$\alpha:(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3)\,.$$

Misal 2. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ funksiyası arqumentlərin heç olmasa üç dənəsi sıfra bərabər olduqda 0 qiymət alır, qalan hallarda isə F-in qiyməti 1-ə bərabərdir. (13.7) göstərilişindən istifadə edərək verilmiş funksiyaya uyğun düsturu aşağıdakı şəkildə qura bilərik:

$$\alpha:(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee x_4)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4).$$

§14. Funksiyaların superpozisiyası

Bu paraqrafda biz verilmiş məntiq funksiyalarından yeni, daha mürəkkəb funksiya düzəldilməsi qaydası ilə tanış olacağıq. Buna məntiq funksiyalarının superpozisiyası da deyirlər.

Superpozisiya anlayışının əsas məzmunu ondan ibarətdir ki, məntiq funksiyalarının hər hansı sistemi verildikdə bu sistemin ixtiyari funksiyasında arqumentlərin bir və ya bir neçəsini sistemin funksiyaları ilə əvəz etmək, arqument-ləri

yenidən adlandırmaq, onları eyniləşdirmək və nəhayət bu göstərişləri bir neçə dəfə təkrar etmək olar, nəticədə yenə də məntiq funksiyası alarıq.

İndi isə superpozisiya anlayışına ciddi tərif verək. Fərz edək ki, məntiq cəbri funksiyalarının

$$S=\{\varphi_1(x_{11},x_{12},...,x_{1k_1}),\ \varphi_2(x_{21},x_{22},...,x_{2k_2}),...,\varphi_n(x_{n1},x_{n2},...,x_{nk_n})\}$$

kimi hər hansı sonlu sistemi verilmişdir.

Tərif 1. ψ məntiq funksiyası $S=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ sistemi funksiyalarından aşağıdakı qaydaların hər hansı biri vasitəsilə alınarsa, onda ψ funksiyasına S funksiyaları sisteminin elementar superpozisiyası deyilir.

1) $\varphi_i\in S\ (i=\overline{1,n})$ funksiyasında x_{is} dəyişənlərin hər hansı birini va ya bir neçəsini yeni dəyişənlə əvəz etməklə, yəni

$$\varphi_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{i\,s-1},y,x_{is+1},...,x_{i\,k_i})\,,$$

burada xüsusi halda y dəyişəni $x_{i\,j}$ dəyişənlərindən hər hansı biri ilə üst-üstə də düşə bilər.

2) Hər hansı $\varphi_i\in S\ (i=\overline{1,n})$ funksiyasında x_{is} dəyişənini ixtryari $\varphi_m\in S\ (m=\overline{1,n})$ funksiyası ilə əvəz etməklə, yəni

$$\varphi_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{i\,s-1},\varphi_m(x_{m1},x_{m2},...,x_{mk_m}),x_{is+1},...,x_{in})\,.$$

Tərif 2. ψ funksiyası S sisteminin bir neçə dəfə təkrar elementar superpozisiyasından alınmışdırsa, onda ψ-yə S sisteminin superpozisiyası deyilir.

Aydındır ki, xüsusi halda, hər bir elementar superpozisiyanın özü də superpozisiyadır.

Misal.

$$\psi(x_1,x_2)=(x_1\wedge x_2)\Rightarrow(x_1\vee\bar{x}_2)$$

funksiyası $S=\{\rceil,\wedge,\vee,\Rightarrow\}$ funksiyaları sisteminin superpozisiyasından ibarətdir.

Tərifdən görünür ki, əgər F və G funksiyaları yalnız dəyişənlərin işarə olunması ilə fərqlənirsə və eyni bir doğruluq cədvəlinə malikdirsə onda 1)-ə görə onlardan biri digərinin superpozisiyasıdır.

Yenə də 2)-yə əsasən S sistemindən götürülmüş ixtiyari φ_n funksiyasında istənilən sayda arqumenti həmin sistemin funksiyaları ilə əvəz etmək nəticəsində alınan funksiya superpozisiyadır.

§15. Tam və tam olmayan funksiyalar sistemi

Məntiq funksiyalarının superpozisiyası ilə tanışlıq bizi yeni bir anlayışa, tam və tam olmayan funksiyalar sistemi anlayışına gətirir.

Tərif 1. Məntiq cəbrinin hər bir funksiyası $S=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_j\}$ funksiyaları sisteminin superpozisiyası şəklində göstərilə bilərsə, onda S sisteminə funksiyaların tam sistemi deyilir.

Teorem 1. $S=\{\rceil,\wedge,\vee\}$ funksiyaları sistemi tamdır.

İsbatı. Bu fəslin 13-cü paraqrafında isbat etdiyimiz teoremə görə hər bir məntiq funksiyasını elə məntiq düsturu ilə əvəz etmək olar ki, o yalnız inkar, konyunksiya və dizyunksiya əməllərini özündə saxlayar, həm də inkar əməli yalnız elementar dəyişənlərə aid olar. Buradan aydın olur ki, hər bir məntiq funksiyasını $S=\{\rceil,\wedge,\vee\}$ sisteminin superpozisiyası şəklində göstərmək mümkündür. Odur ki, tərifə görə S sistemi tamdır. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. $\{\rceil,\wedge\}$, $\{\rceil,\vee\}$, $\{\rceil,\Rightarrow\}$ funksiyalar sisteminin hər biri tamdır.

İsbatı. Teorem 1-ə görə $\{\rceil,\wedge,\vee\}$ sistemi tamdır. Digər tərəfdən $\overline{x\wedge y}\equiv\bar{x}\vee\bar{y}$ eynigüclülüyünə əsasən bütün

məntiq funksiyalarını yalnız $\rceil$ və $\vee$ funksiyalarının superpozisiyası şəklində göstərmək olar və deməli, $\{\rceil,\vee\}$ tam sistemdir. $\{\rceil,\wedge\}$ və $\{\rceil,\Rightarrow\}$ sistemlərinin tam olması isə uyğun olaraq

$$x\vee y\equiv\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}} \text{ və } x\vee y\equiv\bar{x}\Rightarrow y$$

eynigüclülüklərindən aydındır. Teorem isbat olundu.

Bunun əksinə olaraq

$$\{\wedge,\vee,\Rightarrow\} \qquad (15.1)$$

sistemi tam deyildir. Doğrudan da hər hansı $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasına baxaq. Əgər bu funksiya (15.1) funksiyaları sisteminin superpozisiyası şəklində göstərilmiş olsaydı, onda məntiq əməllərinin tərifinə əsasən F-ə daxil olan bütün dəyişənlər 1-ə bərabər olduqda $F=1$ olardı. Deməli, $F'(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası $F'(1,1,...,1)=0$ şərtini ödəyirsə, məsələn,

$$F'(x_1,x_2)=(x_1\Rightarrow\bar{x}_2)$$

kimidirsə, onda F' funksiyasını yalnız $\wedge,\vee$ və $\Rightarrow$ əməllərini özündə saxlayan məntiq düsturu ilə əvəz etmək olmaz. Deməli, (15.1) sistemi tam deyildir. Beləcə də göstərmək olar ki,

$$\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\} \qquad (15.2)$$

sistemi tam deyildir.

$$\varphi(x,y)=\downarrow(x,y)=\overline{\vee(x,y)} \text{ və } \psi(x,y)=\uparrow(x,y)=\overline{\wedge(x,y)}$$

funksiyalarını uyğun olaraq Pirs və Şeffer funksiyaları adlandıraq. $\varphi(x,y)$ və $\psi(x,y)$ funksiyalarının təyinindən aydındır ki, onlar aşağıdakı doğruluq cədvəlləri ilə xarakterizə olunur.

x	y	$\varphi(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0

x	y	$\psi(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1

0	0	1

0	0	1

Göstərək ki, bu funksiyaların hər biri istənilən məntiq funksiyasını qurmaq üçün kifayətdir.

Teorem 3. $\{\downarrow\}$ və $\{\uparrow\}$ funksiyalarının hər biri tam sistemdir.

İsbatı. $\{\downarrow\}$ sisteminin tam olduğunu isbat etmək üçün göstərək ki, bütün əsas məntiq funksiyalarını yalnız $\downarrow$ funksiyası vasitəsilə ifadə etmək olar. Teorem 2-yə görə bütün məntiq funksiyalarını yalnız $\rceil$ və $\vee$ funksiyaları vasitəsilə göstərmək olar. Digər tərəfdən

$$\rceil x \equiv (x \downarrow x) \quad \text{və} \quad (x \vee y) \equiv (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

eynigüclülüklərindən aydındır ki, $\rceil$ və $\vee$ funksiyalarını təkcə $\downarrow$ funksiyasına gətirmək mümkündür. Ona görə də $\downarrow$ funksiyası istənilən məntiq funksiyasını qurmaq üçün kifayətdir. Teoremin ikinci hissəsinin isbatı yenə də $\rceil x = (x \uparrow x)$ və

$$(x \wedge y) = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$$

eynigüclülüklərindən və teorem 2-dən aydındır.

Tərif 2. Əgər S funksiyaları sisteminin istənilən F funksiyasını S/F sistemi funksiyalarının superpozisiyası şəklində göstərmək mümkün olmazsa, onda S sisteminə asılı olmayan sistem deyilir.

Məsələn, $S_1 = \{\vee, \Leftrightarrow\}$ və $S_2 = \{\rceil, \Rightarrow\}$ sistemləri asılı olmayan sistemlərdir, lakin $S_3 = \{\vee, \wedge, \rceil, \Rightarrow\}$ sistemi asılı sistemdir.

Tərif 3. Əgər S funksiyalar sisteminə bu sistemdən götürülmüş ixtiyari funksiyalarla birlikdə onların bütün superpozisiyaları da daxil olarsa, onda belə sistemə qapalı sistem, əks halda isə qapalı olmayan sistem deyilir.

Məsələn, bir dəyişəndən asılı bütün məntiq funksiyaları sistemi qapalı, lakin iki dəyişəndən asılı bütün məntiq funksiyaları sistemi qapalı olmayan sistemdir.

§16. Mükəmməl normal formalar

Məntiq funksiyalarının bir sıra (məsələn, rele-kontakt sxemlərə, elektrik dövrələrinə, ürək damar sistemi şəbəkələrinə və s.) tətbiqləri onu mükəmməl konyunktiv normal forma (MKNF) və mükəmməl dizyunktiv normal forma (MDNF) adlanan xüsusi görünüşlü düsturlarla ifadə etmək zərurətini qarşıya qoyur. Əvvəlcə aşağıdakı tərifləri söyləyək.

Tərif 1. Əgər $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən düzəldil-miş elementar konyunksiyaya bütün dəyişənlər daxil olmaq-la, həm də hər bir x_i dəyişəni yalnız bir dəfə (ola bilər ki, inkar işarəsi altında) iştirak edərsə, onda belə konyunksi-yaya tam elementar konyunksiya deyilir.

Məsələn, $n=3$ olduqda $x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$ elementar konyunksiya, lakin $x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1$ isə tam olmayan elementar konyunksiyadır.

İkilik prinsipindən istifadə edərək tərif 1-də «*konyunksiya*» sözünü hər yerdə «*dizyunksiya*» ilə və tərsinə əvəz edib tam elementar dizyunksiyanın tərifini alarıq.

Misal üçün x_1, x_2 dəyişənlərinin bütün tam elementar dizyunksiyalarını düzəldək:

$$x_1 \vee x_2\,,\ \bar{x}_1 \vee x_2\,,\ x_1 \vee \bar{x}_2\,,\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\,.$$

Aydın görmək olar ki, n dənə dəyişəndən düzəldilmiş bütün mümkün olan tam elementar dizyunksiyaların (konyunksiyaların) sayı 2^n-ə bərabərdir.

Tərif 2. $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərinin müxtəlif tam elementar dizyunksiyalarının konyunksiyaları şəklində olan α düsturuna həmin dəyişənlərdən asılı mükəmməl konyunktiv normal forma (MKNF) deyilir.

İkilik prinsipindən istifadə edərək tərif 2-də hər yerdə konyunksiyanı dizyunksiya sözü ilə və tərsinə əvəz edib mükəmməl dizyunktiv normal formanın (MDNF) təri-fini

alarıq.

Hər bir məntiq funksiyasına (deməli, hər bir mülahizələr cəbri düsturuna) eynigüclü olan mükəmməl konyunktiv və dizyunktiv normal formaların varlığı, habelə həmin formaların konstruktiv qurulmasının praktik yolu §12-dəki teoremin isbatından bilavasitə görünür. Lakin düstura daxil olan dəyişənlərin sayı nisbətən böyük olduqda doğruluq cədvəlinə görə MKNF və MDNF-nın qurulması texniki cəhətdən bir qədər mürəkkəb olur və ona görə də effektli hesab edilə bilməz. Bu səbəbdən də MKNF və MDNF-nın qurulmasının səmərəli üsulunu - alqoritmini müəyyən etməyə ciddi ehtiyac vardır.

Məsələn, hər bir eyniliklə yalan olmayan məntiq düsturuna eynigüclü mükəmməl dizyunktiv normal formanı tapmaq üçün ardıcıl olaraq aşağıdakı əməliyyatları aparmaq lazımdır:

1) Düstura daxil olan $\Rightarrow$ və $\Leftrightarrow$ əməllərini (əgər varsa) onların daxil olduğu hər yerdə

$$(x \Rightarrow y) \equiv (\bar{x} \vee y) \text{ və } (x \Leftrightarrow y) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$$

eynigüclülüklərinin köməyilə düsturdan uzaqlaşdırmaq;

2) De Morqan qanunlarından istifadə edərək alınan düsturu elə eynigüclü çevirək ki, inkar əməli yalnız elementar dəyişənlərə aid olsun;

3) 1) və 2) çevirmələri nəticəsində alınan düsturda konyunksiya əməlinə «*birinci pilləli əməl*» kimi baxıb §8-dəki 6^0 eynigüclülüyündən istifadə edərək onu özü ilə eynigüclü olan yeni düsturla əvəz etmək.

Bu üç ardıcıl çevirmə nəticəsində aldığımız düstur verilən düsturla eynigüclü dizyunktiv normal forma olacaqdır.

4) Alınan DNF-da əgər bir neçə eyni elementar konyunksiyalar iştirak edirsə, onda $x \wedge x \equiv x$ eynigüclülüyünə əsasən onların yalnız birini saxlayaraq qalanlarını düsturdan

kənar etmək;

5) Əgər aldığımız yeni düsturda eyni dəyişən və ya onun inkarı elementar konyunksiyaya bir neçə dəfə təkrar daxil olarsa, onlardan yalnız bir dənəsini saxlayıb, qalanlarını $x \vee x \equiv x$ eynigüclülüyünün köməyilə düsturdan uzaqlaşdırmaq;

6) Əgər elementar konyunksiyaya hər hansı dəyişən öz inkarı ilə birlikdə daxil olarsa, onda $x \wedge \bar{x} \equiv Y$ və $x \vee Y \equiv x$ eynigüclülüklərindən istifadə etməklə həmin ele-mentar konyunksiyanı düsturdan kənar etmək;

7) Əgər hər hansı $x_{s_1} \wedge x_{s_2} \wedge \cdots \wedge x_{s_m}$ elementar konyunksiyada, məsələn, x_i dəyişəni iştirak etmirsə, $x \vee \bar{x} \equiv D$ və $x \wedge D \equiv x$ eynigüclülüklərinin köməyilə həmin həddi özü ilə eynigüclü olan $x_{s_1} \wedge x_{s_2} \wedge \cdots \wedge x_{s_m} \wedge (x_i \vee \bar{x}_i)$ həddi ilə əvəz etmək və lazım gələrsə bu yeni «*vuruq*» qoşma prosesini o vaxta qədər təkrar etməli ki, alınan həddə bütün dəyişənlər (və ya onların inkarı) iştirak etsin;

8) Alınan düstura 3) və əgər ehtiyac varsa 4) çevirmələrini yenidən tətbiq edib, onu tam elementar konyunksiyaların dizyunksiyaları şəklinə gətirmək.

Nəticədə aldığımız düstur verilmiş düsturla eynigüclü olan MDNF olacaq və deməli, düsturun MDNF-ya çevrilməsi prosesi sona çatacaqdır.

Yalnız onu əlavə etmək qalır ki, 1) - 8) çevirmələrinin hər birini yerinə yetirərkən yeri gəldikcə bu fəslin 8-ci paraqrafında verilmiş 1^0 - 21^0 eynigüclülüklərinin hər birindən istifadə etmək imkanı istisna edilmir.

Yuxarıdakı prosesə uyğun olaraq eyniliklə doğru olmayan hər bir verilmiş düsturla eynigüclü MKNF-nı qurmaq üçün alqoritm müəyyən etmək olar. Bu işi oxuculara tapşırırıq.

Lakin onu da qeyd edək ki, ikilik prinsipinə əsaslanaraq eyniliklə yalan olmayan hər bir məntiq düsturunun

MDNF şəklində göstərilişindən istifadə edib, onunla ikili olan düsturun MKNF şəklində göstərilişini tapmaq olar. Doğrudan da əgər yalnız konyunksiya, dizyunksiya və inkar əməlləri iştirak edən hər hansı düstur verilmişdirsə, onda bu düsturda hər yerdə bütün dəyişənləri özlərinin inkarı ilə, habelə konyunksiyanı dizyunksiya ilə və tərsinə əvəz etməklə həmin düsturla ikili olan düsturu alarıq. Həm də bu üsulu eynigüclü düsturlara tətbiq etsək, ikilik prinsipinə görə yenə də eynigüclü düsturlar alınar.

Bu mülahizəni eynigüclü funksiyalar üçün də söyləmək olar.

Doğrudan da, tutaq ki, $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ eyniliklə 0-a bərabər olmayan ixtiyari məntiq funksiyasıdır. φ funksiyasına ikili olan məntiq funksiyasını $f(x_1,x_2,...,x_n)$-lə işarə edək: $f=\varphi^*$. Aydındır ki, $f\not\equiv 0$ olduğundan $\varphi^*\not\equiv 0$ olar.

Fərz edək ki, f funksiyasını MDNF şəklində göstərmişik:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=1} x_1^{\varepsilon_1}\wedge x_2^{\varepsilon_2}\wedge\cdots\wedge x_n^{\varepsilon_n}, \qquad (16.1)$$

burada $\vee$ əməli bütün mümkün olan elə $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ komplekslər üçün götürülür ki, $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)=1$ olsun. $f\equiv 0$ olduqda (16.1) düsturunun sağ tərəfindəki konyunktiv hədlər çoxluğu boşdur, həm də $\varepsilon=0$ olduqda $x^{\varepsilon}=x$ qəbul edilmişdir.

(16.1) bərabərliyinin sağ tərəfində $\wedge$ və $\vee$ əməllərinin hər birini digəri ilə əvəz edək, sol tərəfdə isə f-ə ikili olan funksiyaya keçək. Onda alarıq:

$$f^*(x_1,x_2,...,x_n)=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\bigwedge_{\varphi(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=0} x_1^{\varepsilon_1}\vee x_2^{\varepsilon_2}\vee\cdots\vee x_n^{\varepsilon_n}.$$

Beləliklə,

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\bigwedge_{\varphi(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=0} x_1^{\varepsilon_1}\vee x_2^{\varepsilon_2}\vee\cdots\vee x_n^{\varepsilon_n}$$

ifadəsi φ funksiyasının MKNF şəklində göstərilişidir. Bu isə bizə hər bir məntiq funksiyasının MDNF-dan onun MKNF-na (və tərsinə) keçmək üçün alqoritm müəyyən etməyə imkan verir.

Məsələn, fərz edək ki, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının müəyyən etdiyi α məntiq düsturunun MDNF-sı verilmişdir. α düsturunda hər yerdə konyunksiyanı dizyunksiya ilə və tərsinə dizyunksiyanı konyunksiya ilə,habelə, x_i-ni $\bar{x}_i$ $(i=\overline{1,n})$ ilə əvəz edək. Nəticədə alınan β düsturu α düsturunun MKNF-da yazılışı olacaqdır.

Misal. $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasının təsvir etdiyi məntiq düsturu MKNF şəklində verilmişdir:

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3).$$

$\alpha(x_1,x_2,x_3)$ düsturu ilə eynigüclü olan MDNF-nı tapaq. Onun üçün verilmiş düsturda hər yerdə x_i $(i=1,2,3)$ dəyişənlərini özlərinin inkarı ilə və eyni zamanda konyunksiya və dizyunksiya əməllərini bir-biri ilə əvəz edək. Bu halda aldığımız

$$\beta(x_1,x_2,x_3)\equiv(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)$$

düsturu α düsturunun MDNF-sı olacaq.

II FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. Məlumdur ki, adi danışıqda «*yaxud*» bağlayıcısı iki mənada işlədilir. 1) birləşdirmək mənasında; 2) ayırmaq mənasında.

Məsələn, əgər «*Qarabağ*» çempion, yaxud kubok sahibi olsa, onda o, Avropa kuboku uğrunda yarışlarda iştirak edəcəkdir.

Burada «*yaxud*» birinci mənada işlənir və elementar mülahizələrdən heç olmasa biri doğru olduqda doğrudur.

2009-cu il futbol üzrə ölkə çempionatının qızıl medal sahibi «Neftçi» yaxud «İnter» komandası olacaqdır mülahizəsini götürək. Burada isə «*yaxud*» ikinci mənada işlənir və verilmiş mülahizələrdən yalnız biri doğru olduqda doğrudur.

Birinci mənada işlənən «*yaxud*» bizə məlum olan dizyunksiya əməlidir. İkinci mənada işlədilən «*yaxud*»u birinci mənada işlədilən «*yaxud*»un alternativi adlandıraq və Δ kimi işarə edək. Buna alternativ dizyunksiya da deyirlər. Alternativ dizyunksiya üçün doğruluq cədvəli qurun və onu əsas məntiq əməlləri vasitəsilə ifadə edin.

2. Aşağıdakı şəkildə təyin edilmiş əməlləri Şeffer və Pirs əməlləri adlandıraq.

$$x \downarrow y \equiv \overline{x} \wedge \overline{y} \equiv \overline{x \vee y},$$

$$x \uparrow y \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \equiv \overline{x \wedge y}.$$

Şeffer və Pirs əməlləri üçün doğruluq cədvəli qurun və əsas məntiq əməllərini $\downarrow$ və $\uparrow$ əməllərinin hər biri ilə ifadə edin.

3. Göstərin ki, implikasiya əməli kommutativ və assosiativ deyil, lakin ekvivalensiya əməli həm kommutativ və həm də assosiativdir.

4. Əsas məntiq əməllərini inkar, konyunksiya və dizyunksiya əməlləri vasitəsilə ifadə edin.

5. Əsas məntiq əməllərini yalnız inkar və konyunksiya əməlləri vasitəsilə ifadə edin.

6. Əsas məntiq əməllərini yalnız inkar və dizyunksiya əməlləri vasitəsilə ifadə edin.

7. Əsas məntiq əməllərini yalnız inkar və implika-siya əməlləri vasitəsilə ifadə edin.

8. Aşağıdakı düsturlar eynigüclüdürmü

a) $A \wedge (B \Rightarrow C)$ və $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)$;

b) $A \vee (B \Rightarrow C)$ və $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$;

c) $A \wedge (B \Leftrightarrow C)$ və $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge C)$;

d) $A \vee (B \Leftrightarrow C)$ və $(A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee C)$?

9. Aşağıdakı eynigüclülükləri isbat edin:

a) $(A \wedge B) \vee \overline{B} \equiv A \vee B$;

b) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;

c) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;

d) $(A \Rightarrow \overline{A}) \equiv \overline{A}$;

e) $(\overline{((A \vee B) \Rightarrow \overline{A})} \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow \overline{B})) \equiv (A \wedge B)$;

f) $((A \vee B) \wedge (A \vee B)) \equiv A$;

g) $(((D \Rightarrow A) \Rightarrow \overline{(B \vee D)}) \Rightarrow A) \equiv ((A \vee B) \vee D)$.

10. Aşağıdakı düsturlar üçün doğruluq cədvəli qurun:

a) $((A \wedge B) \vee (\overline{A} \Rightarrow B)) \wedge (B \Rightarrow \overline{A})$;

b) $(\overline{A} \vee B) \vee (A \Rightarrow (B \wedge A))$;

c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$;

d) $\overline{(A \wedge B)} \Rightarrow ((C \vee B) \Rightarrow \overline{A})$.

11.Aşağıdakı düsturların tavtologiya olduğunu göstərin:

a) $(A \wedge B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow A)$;

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$;

c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

d) $(\overline{A} \Rightarrow (\overline{B} \vee A)) \Rightarrow \overline{(A \wedge \overline{A})}$;

e) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (\overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B}))$;

f) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

g) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$;

h) $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \Rightarrow ((A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D))$.

12. Aşağıdakı düsturların ziddiyyət olduğunu göstərin:

a) $\overline{(\overline{(A \wedge B)} \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})}$;

b) $(A \wedge \overline{(A \vee B)})$;

c) $\overline{(A \Rightarrow B)} \wedge \overline{(A \Rightarrow \overline{B})}$;

d) $((A \wedge \overline{A}) \vee B)$;

f) $((A \wedge (\overline{A} \vee B)) \wedge \overline{B})$;

g) $\overline{(A \vee (\overline{A} \wedge B)) \Leftrightarrow (A \vee B)}$.

13. Düsturların yerinə yetirilənliyini isbat edin:

a) $((A \wedge B) \vee (\overline{A} \vee C))$;

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

c) $A \wedge (B \vee \overline{A})$;

d) $(A \Rightarrow B) \wedge (\overline{B} \Rightarrow A)$;

f) $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \wedge B)$;

g) $((A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow B)$.

14. x dəyişənindən asılı eyniliklə doğru və eyniliklə yalan düsturları uyğun olaraq $t(x)$ və $f(x)$-lə işarə edək: $t(x) \equiv D$, $f(x) \equiv Y$. $x \in \{D, Y\}$ olduqda isbat edin ki, $t(x)$ və $f(x)$ düsturlarının biri digərinin ikili formasıdır.

15. İsbat edin ki, $x \in \{D, Y\}$ olduqda $E(x) = x$ və $\neg(x) = \overline{x}$ düsturları özü-özü ilə ikilidir.

16. $(x_1 \wedge x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$, $(x_1 \Rightarrow x_2)$, $(x_1 \Leftrightarrow x_2)$, $(x_1 \downarrow x_2)$

və $(x_1 \uparrow x_2)$ düsturlarına ikili olan düsturları qurun.

17. Göstərin ki, $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$ və $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$ düsturları özü-özünə ikili düsturlardır.

18. Aşağıdakı düsturlara ikili olan düsturları qurun:

a) $(A \wedge B) \Rightarrow (\overline{A} \wedge B)$;

b) $(((A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))$;

c) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}))$;

d) $((A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \vee C)))$.

19. Üç dəyişəndən asılı $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ düsturu yalnız tək sayda dəyişənlər doğru olduqda doğrudur. Bu düstura ikili olan düsturu tapın.

Həmin məsələni *a*) dörd dənə dəyişəni, *b*) beş dənə dəyişəni özündə saxlayan düstur üçün həll edin.

20. Aşağıdakı düsturlarla eynigüclü olan dizyunktiv və konyunktiv normal formanı tapın:

a) $((((A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{C}) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \vee B))$;

b) $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B}))$.

21. İki dəyişəndən asılı neçə məntiq funksiyası vardır? Bu funksiyaları bir dənə doğruluq cədvəli vasitəsilə göstərin. Cədvəlin köməyilə aşağıdakıları müəyyən edin. Bu funksiyalardan neçəsi;

a) $f(0,0) = 0$; *b*) $f(0,0) = 1$; *c*) $f(1, 1) = 0$; *d*) $f(1, 1) = 1$ şərtini ödəyir?

22. Üç dəyişəndən asılı neçə məntiq funksiyası vardır? Bu funksiya üçün çalışma 21-in *a*), *b*) bəndlərindəki suallara cavab verin.

23. Çalışma 22-ni ixtiyari $n \geq 1$ dəyişəndən asılı məntiq funksiyası üçün həll edin.

24. Aşağıdakı düsturların təsvir etdiyi məntiq funksiyalarına x, y, z dəyişənlərindən hansıların əhəmiyyətli və hansıların saxta daxil olduğunu müəyyən edin:

a) $((x \vee \bar{x}) \Rightarrow (y \wedge z))$;
b) $(x \wedge (x \wedge y))$;
c) $(x \vee (\bar{x} \wedge y))$;
d) $(\bar{x} \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$;
e) $((\bar{x} \wedge (x \vee y)) \Leftrightarrow x)$.

25. *a*) $\vee$ və $\Rightarrow$ funksiyalarını $\wedge$ və $\rceil$ funksiyalarının;
b) $\wedge$ və $\Rightarrow$ funksiyalarını $\vee$ və $\rceil$ funksiyalarının;
c) $\rceil$ funksiyasını $\wedge$ və 0 funksiyalarının;
d) ∇ funksiyasını $\wedge$ və $\rceil$ funksiyalarının;
e) ∇ funksiyasını $\vee$ və $\rceil$ funksiyalarının superpozisiyası şəklində göstərin.

26. İsbat edin ki, $\rceil$ funksiyasını $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ funksiyaları sisteminin superpozisiyası şəklində göstərmək olmaz.

27. İsbat edin ki, $\Leftrightarrow$ funksiyasını yalnız $\wedge$ və $\vee$ funksiyalarının superpozisiyası şəklində göstərmək olmaz.

28. İsbat edin ki, $\{\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ məntiq funksiyaları sisteminin $\rceil$ funksiyasını daxilinə almayan hər bir altsistemi tam sistem deyildir.

29. $\{\rceil, \nabla\}$ sistemi tam sistemdirmi? $\{\Leftrightarrow, \nabla\}$ sistemi necə?

30. Göstərin ki, $\{\rceil, \Leftrightarrow\}$ sistemi istənilən məntiq funksiyasını göstərmək üçün kifayət deyildir.

31. İsbat edin ki, hər bir tam sistemdəki funksiyaların sayı sonludur.

32. İsbat edin ki, funksiyaların hər bir tam sistemindən sonlu sayda tam altsistem ayırmaq olar.

33. İsbat edin ki, $\{\nabla, \vee, 1\}$ funksiyalar sistemi tamdır.

34. $f(x, y, z)$ funksiyası aşağıdakı düsturla verilmişdir:

$$\alpha(x, y, z) : (x \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z});$$

eyniliklə yalan və eyniliklə doğru üçdəyişənli məntiq funksiyalarını isə uyğun olaraq 0 və 1-lə işarə edək. İsbat edin ki, $\{f, 0, 1\}$ funksiyaları sistemi tam sistemdir.

35. Dörd dəyişəndən asılı elə məntiq funksiyası göstərin ki, o tam sistem əmələ gətirsin.

36. Göstərin ki, aşağıdakı funksiyalar sistemi asılı deyil:

a) $\{\rceil, \Leftrightarrow\}$; *b*) $\{\Leftrightarrow, \wedge\}$;
c) $\{\rceil, \nabla\}$; *d*) $\{\Leftrightarrow, \vee, 0\}$.

37. İsbat edin ki, $\{\rceil, \wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$ və $\{\rceil, \nabla, \uparrow\}$ funksiyaları sistemi asılı sistemlərdir.

38. $x \nabla y \equiv x + y$, $x \wedge y = x \cdot y$, $\bar{x} = x + 1$ və istənilən $n \geq 1$ natural ədədi üçün

$$\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ dənə}} = n\,x = \begin{cases} 0, & n \text{ cüt ədəddirsə,} \\ x, & n \text{ tək ədəddirsə} \end{cases}$$

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ dənə}} = x^n = x$ işarələmələrini qəbul edək.

s_k-lar müxtəlif olduqda $x_{s_1} \cdot x_{s_2} \cdots x_{s_i}$ (*) ifadəsini birhədli, bütün müxtəlif $(s_1, s_2, ..., s_i)$ kompleksləri üçün (*) şəklində birhədlilərlə c sabitinin $(c = 0{,}1)$ cəmini isə

$$\sum_{(s_1, ..., s_i)} x_{s_1} \cdot x_{s_2} \cdots x_{s_i} + c$$

ilə işarə edib özünü də *Jeqalkin* polinomu adlandıraq.

İsbat edin ki, hər bir mülahizələr cəbri funksiyasını *Jeqalkin* polinomu şəklində yeganə qaydada göstərmək olar.

39. c_i və c_0 sabitlər (0 yaxud 1) olduqda

$$\sum_i c_i x_i + c_0$$

polinomu şəklində ifadə olunan məntiq funksiyasını xətti polinom adlandıraq.

a) $n=2$ və $n=3$ dəyişənlərindən asılı bütün xətti polinomları yazın.

b) İsbat edin ki, k sayda dəyişəndən asılı bütün xətti polinomların sayı 2^{k+1}-ə bərabərdir.

40. Beş dəyişəndən asılı $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ məntiq funksiyası yalnız cüt sayda arqumentlər 1-ə bərabər qiymətlər aldıqda sıfra bərabərdir. Bu funksiya üçün mükəmməl konyunktiv və mükəmməl dizyunktiv normal formaları tapın.

41. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ məntiq funksiyası aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{cases} 1, & x_1=x_4 \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{qalan hallarda.} \end{cases}$$

Bu funksiyanın təsvir etdiyi mükəmməl konyunktiv və dizyunktiv normal formaları tapın.

III FƏSİL.

ÇOXLUQLAR CƏBRİ.

§17. Çoxluqlar nəzəriyyəsinin qurulmasına aid qısa tarixi məlumat

Eramızın son iki yüz ili bir də onunla əlamatdar olmuşdur ki, bütün riyaziyyat üçün əsas olan çoxluqlar nəzəriyyəsi bu dövrdə özünün ən yüksək inkişaf zirvəsinə çatdırılmışdır.

Sonsuzluq, diskretlik və kəsilməzlik anlayışları ilə bağlı olan problemlərə hələ eramızdan əvvəl yunan riyaziyyat-çıları və filosoflarının yaradıcılığında xüsusi yer verilmişdir. Aristotelin əsərlərini yaxşı mənimsəmiş orta əsrlərin Avropa və İslam ölkələri alimləri bu problemləri geniş müzakirə etmiş və qiymətli fikirlər söyləmişlər. Məsələn, orta əsr İslam ölkələri riyaziyyatçı filosoflardan Ömər Xəyyam, Məhəmməd Nəsirəddin Tusi, Sabit ibn Korra, əl-Xarəzmi, Avropa ölkələri riyaziyyatçılarından Tomas Bradvardini, Nikola Orem, Leonardo Pizanski və bu kimi bir çox görkəmli mütəffəkkirlər öz traktatlarında kəsilməz və diskret proseslər, habelə aktual sonsuzluqla əlaqədar vacib riyazi problemlərə toxunmuşlar.

XVII əsrdə diferensial və inteqral hesabının yaranması, XVIII əsrdə onun inkişafı və nəhayət, XIX əsrdə əsaslandırılması bir daha inandırıcı şəkildə göstərdi ki, bir tərəfdən aktual və potensial sonsuzluq arasındakı müxtəliflik, digər tərəfdən isə ədədlərin diskret xarakteri ilə həndəsi kəmiyyətlərin kəsilməz təbiəti arasındakı fərq riyaziyyatın bütün tarixi mərhələlərində əksliklərin vəhdəti formasında özünü büruzə vermişdir. Lakin riyazi sonsuzluq problemi və onunla əlaqədar olan bir çox anlayışlar birinci dəfə daha ümumi şəkildə, əsası XIX əsrin sonuncu rübündə alman alimi Qeorq Kantor (1845-1918) tərəfindən işlənib hazırlanmış çoxluqlar nəzəriyyəsində qoyulmuşdur. Məlumdur ki, çoxluq ilk riyazi anlayışlardan biri olduğu üçün ciddi tərif edilməmiş, lakin bu və ya digər şəkildə intuitiv izah edilir. Çoxluq hər hansı təbiətli elementlərin yığımıdır, sinfidir, məcmuudur, külliyatıdır. Belə elementlər külliyatı üçün ən vacib şərt onların təbiətcə eyni olmalarıdır. Məsələn, meşədəki ağaclar çoxluğu, (elementlərin hamısı ağaclardır), bir müstəviyə perpendikulyar olan düz xətlər çoxluğu (bütün elementləri düz xətlərdir) və s.

Q.Kantora görə «çoxluq dedikdə vahid bir tam kimi təsəvvür olunan ixtiyari elementlər külliyatı düşünülür».

Əgər elementlərinin təbiətini və düzülüşünü nəzərə almasaq onda iki sonlu çoxluq ancaq bir-birindən elementlərinin miqdarı ilə fərqlənə bilər. Belə çoxluqları müqayisə etmək üçün heç də vacib deyildir ki, onların elementləri sayını tutuşdurasan. Bunun üçün kifayətdir ki, onların elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılsın. Əgər belə bir uyğunluq yaratmaq mümkün olsa, onda deyəcəyik ki, bu çoxluqların elementləri sayı eynidir. Əks halda isə bu çoxluqların birinin elementləri sayı digərindən çoxdur. İki çoxluğun elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaqla onların elementləri sayını müqayisə etmək prinsipinə əsaslanaraq Q.Kantor XIX əsrin 70-ci illərində sonsuz çoxluqların elementlərinin miqdarına görə onların gücünü müqayisə etmək üçün səmərəli üsul təklif etmişdir.

Kantor təliminə görə istənilən iki çoxluğun elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkündürsə, onda onlar eynigüclü hesab edilir. Gücləri eyni olan çoxluqları bəzən də ekvivalent çoxluqlar adlandırırlar. Kantor qeyd edirdi ki, əgər tədqiq edilən çoxluqlar sonlu olarsa, onda güc anlayışı elə çoxluğun elementlərinin miqdarı ilə üst-üstə düşür. Ona görə də bəzən çoxluğun gücü əvəzinə kardinal (miqdar) ədədi də deyirlər. Kantorun bu sadə və ilk baxışdan çox da əhəmiyyətli görünməyən ideyası onun belə bir qiymətli kəşfinə gətirib çıxardı ki, Evklidin sonlu çoxluqlara şamil et-diyi «tam öz hissəsindən böyükdür» aksiomundan fərqli olaraq sonsuz çoxluqlar belə xassəyə malik deyillər. Başqa sözlə, sonsuz çoxluq nə qədər «sadə quruluşa» malik görünsə belə gücü onun gücünə bərabər qeyri-məxsusi altçoxluğa malikdir. Məsələn, ilk baxışdan sadə görünən natural ədədlər çoxluğun-dan $\{2n\},\{2n+1\},\{3n\},\{3n+1\}$ və s. kimi elə altçoxluqlar ayırmaq olar ki, bu altçoxluqların hər birinin gücü verilmiş çoxluğun gücünə bərabərdir. Ona görə də bu xarakterik cəhəti rəhbər tutaraq bəzən sonsuz çoxluğa belə tərif verirlər. **Özü-nün hər hansı altçoxluğuna ekvivalent olan çoxluğa sonsuz çoxluq deyilir.** Onda aydın olur ki, sonlu çoxluqlar özünün heç bir qeyri-məxsusi altçoxluğu ilə eyni gücə malik ola bilməzlər. 1873-cü ildə çoxluqlar nəzəriyyəsi sahəsində Kantor tərəfin-dən edilmiş başqa bir kəşf daha diqqətəlayiqdir. Natural ədəd-lər çoxluğu ilə ekvivalent olan çoxluqlara hesabi çoxluq de-yildiyini yada salsaq, onda Kantor isbat etmişdir ki, rasional ədədlər çoxluğu və eləcə də cəbri ədədlər çoxluğu hesabi-dirlər.

§18. Əsas anlayışlar və işarələmələr

Çoxluqlar cəbrinin qurulmasında istifadə edəcəyimiz əsas anlayışlar və onların qəbul edilmiş simvolik işarələri:

1^0. Çoxluqlar: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ..., A_1, A_2, ..., X_1, X_2, ...$;

2^0. Çoxluğun elementləri (ünsürləri): $a, b, c, ..., x, y, z, ...,$ $a_1, a_2, ..., x_1, x_2, ...$;

3^0. Altçoxluq (çoxluğun hissəsi): $A \subset B$, yaxud $A \subseteq B$;

4^0. Elementin çoxluğa daxil olması: $a \in A, x \in X$ və s.;

5^0. Çoxluğun çoxluğa daxil olmaması: $A \not\subset B$ $(A \overline{\subset} B)$;

6^0. Elementin çoxluğa daxil olmaması: $a \notin A$ $(a \overline{\in} A)$;

7^0. Çoxluqların bərabərliyi: $A = B$;

8^0. Çoxluqların birləşməsi (cəmi): $A \bigcup B$ $(A+B)$;

9^0. Çoxluqların kəsişməsi (hasili): $A \bigcap B$ $(A \cdot B)$;

10^0. Çoxluqların fərqi: $A \setminus B$ $(A-B)$;

11^0. Boş çoxluq: $\varnothing$ $(\boldsymbol{o})$;

12^0. Çoxluqların ekvivalentliyi (eynigüclülüyü): $A \simeq B$;

13^0. A çoxluğunun gücü (kardinal ədədi): $k(A)$.

§17-də qeyd etdiyimiz kimi çoxluq dedikdə hər hansı xassəyə malik elementlər külliyyatı düşünülür.

Misallar:

1) Gəncə şəhərində yaşayan insanlar qrupunu A ilə;
2) Tam əmsallı çoxhədlilər sinfini B ilə;
3) Bir nöqtədən keçən düz xətlər dəstəsini C ilə;
4) $\sin x = \frac{1}{2}$ tənliyinin kökləri külliyyatını D ilə

işarə edək. Əgər x ixtiyari bir əşya (predmet, ünsür, subyekt) olarsa, onda x ünsürünə (elementinə) nəzərən aşağıdakı iki haldan ancaq biri mümkündür:

x elementi baxdığımız çoxluqlara daxildir, yaxud daxil deyil. Məsələn, x element olaraq $\frac{13\pi}{6}$ ədədi götürsək, onda $x \notin A, x \notin B, x \notin C, x \in D$ olar; x elementi olaraq C.Buş götürsək, onda x A, B, C, D çoxluqlarından heç birinə daxil olmaz $(x \notin A, x \notin B, x \notin C, x \notin D)$ və s.

Çoxluqları elementlərinin sayına görə müqayisə etdikdə iki hal mümkündür: çoxluğun elementləri sayı sonlu ədədə bərabərdir, yəni ixtiyarımızda əlverişli sayma imkanı və lazım olan qədər zaman kəsiyi olarsa, onun elementlərini sayıb qurtara bilərik. Belə çoxluqlar sonlu çoxluqlar adlanır. Məsələn, n dərəcəli çoxhədlinin rasional kökləri çoxluğu, Yer kürəsində yaşayan quşlar çoxluğu, $1\,m^3$ həcmdə yerləşən su molekulları çoxluğu, Xəzər dənizi çimərliyindəki qum dənəciklərinin çoxluğu və s. sonlu çoxluqlardır. Lakin natural sıradakı sadə ədədlər çoxluğu, $[0, 1]$ parçasında yerləşən nöqtələr çoxluğu, oxşar üçbucaqlar və s. kimi çoxluqların elementləri sayı heç bir sonlu ədədlə ifadə edilmir və ona görə də belə çoxluqları sonsuz (əslində elementləri sayı sonsuz) çoxluqlar adlandırırlar. Deməli, ola bilər ki, çoxluq sonlu sayda və ya sonsuz sayda elementi özündə saxlasın, yaxud da ola bilər ki, çoxluq heç bir elementi özündə saxlamasın. Sonuncu çoxluğu boş çoxluq adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Məsələn, Mars planetində yaşayan insanlar çoxluğu, $x^4 - 2 = 0$ tənliyinin rasional kökləri çoxluğu, şəhərimizdə yaşayan 7 başlı adamlar çoxluğu və s. boş çoxluqlardır.

Bir qayda olaraq boş çoxluğu $\varnothing$ (bəzən də ***o*** kimi) işarə edirlər. Boş çoxluqla yanaşı «birelementli» çoxluqlara da baxılır; məsələn, $x^2 - 25 = 0$ tənliyinin müsbət kökləri çoxluğu birelementli çoxluqdur: $\{5\}$. Birelementli çoxluqla $\{x\}$ şəklində verilmiş çoxluğu qarışdırmaq olmaz. Belə ki, $A = \{5\}$ birelementli çoxluq olduğu halda $B = \{x\}$ yazılışında x B çoxluğu elementlərinin ümumi adıdır və müxtəlif təyinatlı elementlər külliyatında dəyişə bilər; misal üçün bütün cüt ədədlər çoxluğu demək əvəzinə $\{2n\}$ yazılışından istifadə olunur.

Çoxluqların verilməsi (göstərilişi) üçün ümumi bir qayda, effektli bir metod yoxdur. Lakin bəzi çoxluqları elementləri arasında aşkar edilmiş hər hansı münasibətə görə, müəyyən şərtlə, riyazi düstur şəklində və hətta elementlərini fiqurlu mötərizə daxilində yazmaqla göstərirlər: $C = \{a, b, c, \ldots\}$.

İndi tutaq ki, A və B iki çoxluqdur.

Tərif 1. Əgər A çoxluğunun hər bir elementi B çoxluğuna daxildirsə, onda A-ya B-nin altçoxluğu və ya hissəsi deyilir və

$$A \subset B \ (B \supset A), \text{ yaxud } A \subseteq B \ (B \supseteq A)$$

kimi işarə edilir.

$A \subseteq B$ yazılışında nəzərdə tutulur ki, A və B çoxluqları üst-üstə düşə də bilər.

Tərifdən belə çıxır ki, hər bir çoxluq özünün hissəsi, boş çoxluq isə istənilən çoxluğun hissəsidir, yəni ixtiyari A çoxluğu üçün

$$A \subseteq A, \ \varnothing \subset A.$$

Bir də onu qeyd edək ki, heç bir çoxluq özünə element kimi daxil deyil, yəni $A \notin A$.

Tərif 2. A və B çoxluqları üçün $A \subseteq B$ və $B \subseteq A$ olduqda A və B çoxluqları bərabər çoxluqlar adlanır və $A = B$ kimi işarə olunur.

Məsələn, A çoxluğu $x^4 - 16 = 0$ tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğu, $B = \{-2, 2\}$ olsun, onda $A = B$.

§19. Çoxluqlar üzərində əməllər

Tam ədədlər üzərində aparılan toplama, çıxma və vurma əməllərinə oxşar əməlləri çoxluqlar üzərində də yerinə yetirmək olar. Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir.

Tərif 1. A və B çoxluqlarının birləşməsi (cəmi) elə C çoxluğuna deyilir ki, C çoxluğunun hər bir elementi A və B çoxluqlarından heç olmasa birinə daxil olsun:

$$C = A \bigcup B \quad (C = A + B)$$

kimi göstərilir.

Misal 1.

$A = \{1,2,3,4,5\}$; $B = \{2,5,7,10\}$; $A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,7,10\}$

Əgər $n > 1$ olduqda $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqları verilmişdirsə, onda onların

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

birləşməsi ($A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ cəmi) elə C çoxluğuna deyilir ki, onun hər bir elementi $A_i \ (i = \overline{1,n})$ çoxluqlarından heç olmasa birinə daxil olsun.

Misal 2. $A = \{2n\}$ cüt ədədlər çoxluğu ilə $B = \{2n+1\}$ tək ədədlər çoxluğunun birləşməsi bütün tam ədədlər çoxluğundan ibarətdir:

$$C = A \bigcup B = \{2n\} \bigcup \{2n+1\} = Z.$$

Tərif 2. A və B çoxluqlarının bütün ortaq elementlərindən və ancaq belə elementlərdən düzəldilmiş C çoxluğuna bu çoxluqların kəsişməsi (hasili) deyilir və

$$C = A \bigcap B \quad (C = A \cdot B)$$

kimi işarə edilir.

Misal 3.

$A = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$; $B = \{2, 5, 7, 8, 10, 11\}$; $A \bigcap B = \{2, 5, 7, 10\}$.

$n > 1$ olduqda $A_1, A_2, ..., A_n$ çoxluqlarının kəsişməsi (hasili) elə C çoxluğuna deyilir ki, onun hər bir elementi $A_i \ (i = \overline{1,n})$ çoxluqlarının ortaq elementlərindən və ancaq belə elementlərdən ibarət olsun. Bu əməliyyat

$$C = A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \qquad \left(C = A_1 A_2 ... A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k \right)$$

kimi yazılır.

Misal 4.

$$A = \{2n\}, B = \{2n+1\}; \ C = A \bigcap B = \{2n\} \bigcap \{2n+1\} = \{0\}.$$

Tərif 3. A və B çoxluqları verildikdə A çoxluğunun B-yə daxil olmayan elementlərindən və ancaq belə elementlərdən düzəldilmiş C çoxluğuna A çoxluğu ilə B çoxluğunun fərqi deyilir və

$$C = A \setminus B \qquad (C = A - B)$$

kimi işarə edilir.

Misal 5. $A=\{3,4,5,6,9\}$; $B=\{1,3,5,10\}$; $A\setminus B=\{4,6,9\}$.

Yenə də fərz edək ki, A və B ixtiyari çoxluqlar olmaqla həm də $A\supset B$.

Tərif 4. B çoxluğu A-nın altçoxluğu olduqda $A\setminus B$ fərqinə B çoxluğunun A çoxluğuna tamalayıcısı deyilir və $C_A B$ (və ya $\overline{B}_A$) kimi işarə edilir.

Tərifə görə $C_A B\bigcup B=A$ (yaxud $\overline{B}_A+B=A$),

$$C_A B\bigcap B=\varnothing \text{ (yaxud } C_A B\cdot B=\varnothing\text{)}.$$

Misal 6. A çoxluğu olaraq bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu, B çoxluğu olaraq bütün rasional ədədlər çoxluğunu götürsək, onda $C_A B$ çoxluğu bütün irrasional ədədlər çoxluğundan ibarət olacaqdır.

Sonda universal çoxluq anlayışı verək.

Tərif 5. Eyni xarakteristikalı (növlü) bütün çoxluqları öz daxilinə alan çoxluğa universal çoxluq deyilir.

Misal 7. Kompleks ədədlər çoxluğu bütün ədədi çoxluqlar üçün universal çoxluqdur.

Misal 8. Planetimizdə yaşayan canlılar çoxluğu universal çoxluqdur, çünki bütün insanlar çoxluğu, bütün quşlar çoxluğu, ceyranlar çoxluğu, pələnglər çoxluğu və s. həmin çoxluğa daxildirlər. Universal çoxluğu V ilə işarə edəcəyik.

§20. Çoxluqlar üzərində əməllərin xassələri

Ədədlər üzərində aparılan toplama, çıxma və vurma əməllərinin məlum xassələrinə analoji olan bəzi təklifləri çoxluqlar üçün də isbat etmək olar.

A,B,C ixtiyari çoxluqlar olduqda göstərilən bərabərliklər doğrudur:

1. $A\bigcup B=B\bigcup A$- birləşmənin komutativliyi;
2. $A\bigcap B=B\bigcap A$-kəsişmənin komutativliyi;
3. $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$- birləşmənin assosiativliyi;

4. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ - kəsişmənin assosiativliyi;

5. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ - kəsişmənin birləşmə əməlinə nəzərən distributivliyi;

6. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ - birləşmənin kəsişmə əməlinə nəzərən distributivliyi;

7. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ - kəsişmə və fərqin birgə qanunu;

8. $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$ - çoxluqların birləşməsi və fərqinin birgə qanunu;

$$\left.\begin{aligned} &9.\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\\ &10.\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\end{aligned}\right\}\text{- de Morqan qanunları}$$

$$\left.\begin{aligned} &11.\ A\cap A=A\\ &12.\ A\cup A=A\end{aligned}\right\}\text{- udulma qanunları}$$

$$\left.\begin{aligned} &13.\ A\cap\varnothing=\varnothing\\ &14.\ A\cup\varnothing=A\end{aligned}\right\}\text{- boş çoxluğun xassələri}$$

$$\left.\begin{aligned} &15.\ A\cap V=A\\ &16.\ A\cup V=V\end{aligned}\right\}\text{- universal çoxluğun xassələri}$$

$$\left.\begin{aligned} &17.\ A\setminus A=\varnothing\\ &18.\ \overline{\overline{A}}=A\\ &19.\ V\setminus A=\overline{A}\\ &20.\ \overline{V}=\varnothing\end{aligned}\right\}\text{- digər xassələr}$$

Çoxluqlar üzərində əməllərin və çoxluqların bərabərliyinin təriflərindən istifadə edərək bu xassələrin doğruluğunu isbat etmək olar.

Məsələn, de Morqan qanunlarından birincisinin, isbatını verək. Yəni göstərək ki,

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\,. \tag{20.1}$$

İxtiyari $x \in \overline{A \cap B}$ elementi götürək və göstərək ki, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Doğrudan da $x \in \overline{A \cap B}$ olduğundan, onda $x \notin A \cap B$. Burada aşağıdakı hallar mümkündür.

a) $x \in A,\ x \notin B$;

b) $x \notin A, x \in B$;

c) $x \notin A, x \notin B$.

Bu halları ayrı-ayrılıqda araşdıraq.

a) $x \in A$ və $x \notin B$ olmasından alınır ki, $x \in A$ və

$$x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

b) $x \notin A$ və $x \in B$ isə, onda $x \in \overline{A}$ və

$$x \in B \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

c) $x \notin A$, $x \notin B$ olduğundan $x \in \overline{A}$ və

$$x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Beləliklə, ixtiyari $x \in \overline{A \cap B}$ olmasından aldıq ki,

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Deməli aldıq ki,

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (20.2)$$

İndi ixtiyari $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$ elementi götürək. Burada da aşağıdakı vəziyyətlər ola bilər:

a) $y \in \overline{A},\ y \notin \overline{B}$;

b) $y \notin \overline{A},\ y \in \overline{B}$;

c) $y \in \overline{A},\ y \in \overline{B}$;

vəziyyətlərini araşdıraq.

a) $y \in \overline{A} \Rightarrow y \notin A$ və $y \notin \overline{B} \Rightarrow y \in B$ buradan

$$y \notin A \cap B \Rightarrow y \in \overline{A \cap B}.$$

b) $y \notin \overline{A}, y \in \overline{B}$; buradan alırıq ki, $y \in A, y \notin B$, onda

$$y \notin A \cap B \Rightarrow y \in \overline{A \cap B}.$$

c) $y \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$; buradan $y \notin A, y \notin B$; buradan

$$y \notin A \cap B \Rightarrow y \in \overline{A \cap B}.$$

Beləliklə, ixtiyari $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$ olmasından alınır ki, $y \in \overline{A \cap B}$ və deməli,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}. \qquad (20.3)$$

(20.2) və (20.3) münasibətlərindən (20.1)-in doğruluğu alınır.

§21. Çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq. Ekvivalent çoxluqlar

Tutaq ki, A və B iki sonlu çoxluqlardır.

Təbii olaraq belə sual qoymaq olar: bu çoxluqların elementləri sayı bərabərdirmi? Əgər bərabər deyilsə hansının elementləri sayı çoxdur?

Aydındır ki, çoxluqlar sonlu olduğundan onların hər birinin elementlərini saymaqla bu suala cavab vermək olar.

Lakin çoxluqların elementlərini saymadan da qoyulmuş suala cavab vermək mümkündür.

Məsələn, tutaq ki, $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

A və B çoxluqlarının elementlərini aşağıdakı kimi düzək.

A	1	2	3	4	5
B	α	β	γ	δ	ε

Düzülüşdən aydın görünür ki, A çoxluğunun elementləri sayı B çoxluğu elementlərinin sayına bərabərdir. Çoxluqların bu cür müqayisəsi üçün xarakterik cəhət ondan ibarətdir ki, verilmiş çoxluqlardan birinin hər bir elementinə digərinin ancaq bir elementi qarşı qoyulur və tərsinə. Belə olduqda deyirlər ki, verilmiş çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılmışdır.

Çoxluqların müqayisəsinin bu ikinci üsulunun üstünlüyü ondan ibarətdir ki, onu sonsuz çoxluqlar üçün də tətbiq etmək olar. Məsələn, N natural ədədlər çoxluğu ilə $M=\left\{\frac{1}{3n}\right\}$ şəklində kəsr ədədlər çoxluğu arasında

N	1	2	3	4	5	…
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	…

kimi uyğunluq yaratmaqla müqayisə etmiş olsaq, onda görərik ki, N və M çoxluqlarının elementlərinin «miqdarı» eynidir.

Tərif 1. Tutaq ki, ixtiyari A və B çoxluqları verilmişdir. Əgər elə ψ qaydası (qanunu) tapmaq mümkündürsə ki, hər bir $a \in A$ elementinə ancaq və ancaq bir $b \in B$ elementini qarşı qoyur, həm də həmin qayda ilə $b \in B$ elementinə yalnız və yalnız $a \in A$ elementi qarşı qoyulur, onda ψ qaydası A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq adlanır.

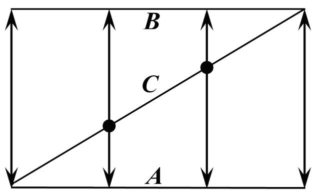
Doğrudan da, yuxarıda verilmiş cədvəldən görünür ki, $\psi : n \leftrightarrow \frac{1}{3n}$ qaydası N və M çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur.

Tərif 2. Əgər A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkündürsə, onda bu çoxluqlar ekvivalent və ya eynigüclü çoxluqlar adlanır və

$$A \simeq B$$

kimi yazılır.

Göründüyü kimi yuxarıda haqqında danışdığımız N və M çoxluqları eyni gücə malikdirlər: $N \simeq M$.

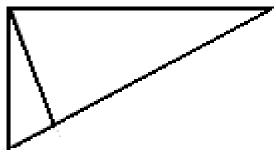


Шякил 1.

Tərifdən aydındır ki, iki son-lu çoxluq onda və ancaq onda ekvivalent (eynigüclü) olarlar ki, onlar eyni sayda elementi özündə saxlasın.

Sonsuz və ekvivalent çoxluqlara aid başqa bir misal göstərək.

Şəkil 1-də göstərilən düzbucaqlının alt və üst oturacaqları üzərindəki nöqtələr çoxluğunu uyğun olaraq A və B ilə, dioqonalı üzərindəki nöqtələr çoxluğunu isə C ilə işarə edək. ψ qaydası olaraq üst oturacağın nöqtələrinin alt oturacağa ortoqonal proyeksiyalanması qaydasını götürək. Aşkardır ki, bu qayda A, B, C çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış olur. Şəkildən də görünür ki, A və B çoxluqları bərabər parçaların nöqtələri çoxluğu olduğundan ekvivalentdirlər. Lakin dioqonalın uzunluğu oturacaqların uzunluqlarından böyük olduğundan ilk baxışdan belə görünür ki, C çoxluğunun nöqtələri sayı digər iki çoxluqların nöqtələri sayından «çoxdur». Doğrudan da, alt və üst oturacaqları dia-qonal üzərində yerləşdirsək (şəkil 2), onda görərik ki, A və B çoxluqları C-nin düzgün hissəsidir, ona görə də C-dən fərqlidir. Ancaq yuxarıda göstərdiyimiz ψ qaydasına əsaslanaraq deyə bilə-rik ki, A, B və C çoxluqları ekviva-lentdirlər:



Шякил 2.

$$A \simeq B \simeq C .$$

Beləliklə, elə çoxluqlarla rast-laşırıq ki, onlar özünün düzgün his-səsi ilə ekvivalentdir. Təbii ki, sonlu çoxluqlar belə xassəyə malik ola bilməz. Ancaq sonsuz çoxluqlar belə «təəccüblü» xassəni daşıyır. Hələ bundan da maraqlısı odur ki, bütün sonsuz çoxluqlar bu xassəyə malikdirlər. Başqa sözlə bütün sonsuz çoxluqlardan onunla ekvivalent olan düzgün hissə (alt-çoxluq) ayırmaq olar.

Bu fakta əsaslanaraq sonsuz çoxluğa belə tərif vermək olar.

Tərif 3. Çoxluq özü ilə ekvivalent altçoxluğu özündə saxlayarsa, belə çoxluğa sonsuz çoxluq deyilir.

Göstərmək olar ki, çoxluqlar arasında ekvivalentlik münasibəti refleksivlik, simmetriklik və tranzitivlik xassəsinə malikdir. Bu mənada da sonsuz çoxluqları hesabi və qeyri hesabi kimi siniflərə ayırırlar.

§22. Hesabi və qeyri-hesabi çoxluqlar. Çoxluqların gücü

$N = \{1,2,3,4,5,...\}$ natural ədədlər çoxluğu bir çox cəhətdən diqqəti cəlb edir. Əvvəla bu sonsuz çoxluqdan danışarkən dərhal onun elementləri olan ədədlərin təbiəti, düzü-lüşü ardıcıllığı, müəyyən məqsədlər üçün istifadə imkanları, aşağıdan məhdud və yuxarıdan qeyri-məhdud olması, təbii nizamlılığı və s. yada düşür. Digər tərəfdən bir qisim sonsuz çoxluqlar vardır ki, onları natural ədədlər çoxluğu ilə müqayisə edərək müəyyən nəticələr söyləmək olur. Ona görə də deyə bilərik ki, N natural ədədlər çoxluğu bəzən müəyyən mənada «standart», «etalon» kimi qəbul olunur.

Məsələn, sonsuz çoxluqları elementlərinin «miqdarına» (tutumuna, həcmliliyinə) görə natural ədədlər çoxluğu ilə müqayisə edirlər.

Evkivalent çoxluqların tərifindən də aydındır ki, onlar sanki eyni «miqdarda» («həcmdə») elementləri özündə saxlayır. Başqa sözlə aşağıdakı tərifi qəbul edək.

Tərif 1. Əgər X və Y çoxluqları ekvivalent olarsa, onda deyirlər ki, həmin çoxluqlar eyni gücə və ya bəzən deyildiyi kimi eyni kardinal ədədə malikdirlər. X çoxluğunun kardinal ədədini $k(X)$-lə göstərək.

Tərif 2. Natural ədədlər çoxluğu ilə ekvivalent olan hər bir çoxluğa hesabi çoxluq deyilir.

Aydındır ki, bütün hesabi çoxluqlar eyni kardinal ədədə (gücə) malikdirlər.

Onu da qeyd edək ki, sonlu çoxluqların gücü onun elementlərinin sayına bərabərdir. Məsələn, «Azərbaycan» sözündəki həriflər çoxluğunu A ilə işarə etsək, onda $k(A)=10$.

Çoxluqlar nəzəriyyəsində verilmiş çoxluğun hesabi olmasını müəyyən edən kriteriya isbat edilmişdir. Belə ki, verilmiş çoxluğun hesabi olması üçün onun elementlərini natural ədədlərlə nömrələməyin mümkünlüyü zəruri və kafi şərtdir.

Hesabi çoxluğa aid misallar göstərək.

1. $M=\left\{\frac{1}{n}, n=1,2,...\right\}$ çoxluğu hesabidir.

2. Bütün kəsr ədədlər çoxluğu hesabidir.

3. $[a,b]$ parçasında yerləşən bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.

4. Bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.

5. Hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən hesabi çoxluqların birləşməsi hesabi çoxluqdur.

Tərif 3. Hesabi olmayan çoxluğa qeyri-hesabi çoxluq deyilir.

Tərifdən aydın olur ki, qeyri-hesabi çoxluğun elementlərini natural ədədlərlə nömrələmək mümkün deyil.

Misallar:

1. [0,1] parçasında yerləşən bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabidir.

2. Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabidir.

3. Bütün irrasional ədədlər çoxluğu qeyri-hesabidir.

4. Natural ədədlərdən düzəldilmiş $Q\{(n_1,n_2,n_3,...)\}$ şəklində bütün ardıcıllıqlar çoxluğu qeyri-hesabidir.

5. Müstəvi üzərində bir nöqtədən çıxan bütün düz xətlər çoxluğu qeyri-hesabi çoxluqdur.

Tərif 4. Qeyri-hesabi çoxluqlara kontinium çoxluqlar və yaxud sadəcə kontinium deyilir.

Məsələn, hesabi çoxluqların bütün hesabi altçoxluqları çoxluğu kontinium çoxluqdur.

Adətən N natural ədədlər çoxluğunu hesabi çoxluqlar üçün «etalon» qəbul etdiyimiz kimi [0,1] parçasını da qeyri-hesabi çoxluqların müqayisəsi üçün «etalon» qəbul edib qeyri-hesabi çoxluqları belə də tərif edirlər:

Əgər A çoxluğu [0,1] parçasındakı nöqtələr çoxluğu ilə ekvivalent olarsa, onda ona qeyri-hesabi və ya kontinium güclü çoxluq deyilir.

III FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. $A=\{a,b,c,d\}$ çoxluğunun bütün altçoxluqlarını yazın.

2. $A=\{21,27,45,48,51,63,72,77,83\}$ çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun elə altçoxluğunu tapın ki, onun hər bir elementini 5-ə böldükdə qalıq 3 olsun.

3. Beş elementli çoxluğun bütün mümkün olan alt-çoxluqları sayını tapın.

4. İsbat edin ki, n elementli çoxluğun bütün altçoxluq-larının sayı 2^n –ə bərabərdir.

5. $A=\{a,b,c,d,e,f\}, B=\{b,e,f,k,l,m,n\}$ çoxluqlarının kəsişməsini və birləşməsini tapın.

6. «Həndəsə» və «riyaziyyat» sözlərindəki həriflər çoxluğunun kəsişməsini və birləşməsini yazın.

7. İki üçbucaq verilmişdir. Onların çertyojlarının elə kombinasiyalarını düzəldin ki, kəsişmələri:

a) bir nöqtədən;

b) düz xətt parçasından;

c) üçbucaqdan;

d) çoxbucaqlıdan ibarət olsun.

8. *a*) Düz xətt və çevrənin;

b) parça və çevrənin;

c) iki çevrənin;

d) verilmiş bucağın tərəfləri ilə çevrənin kəsişməsindən alınan nöqtələr çoxluğunu çertyoj üzərində göstərin. Bu çoxluqlardan hansıların boş, sonlu və sonsuz olduğunu araşdırın.

9. A ilə $3x+4y=17$ tənliyinin tam həlləri çoxluğunu, B ilə $5x-2y=5$ tənliyinin tam həlləri çoxluğunu işarə edək. Bu tənliklərdən ibarət sistemin tam həllərinin C çoxluğunu tapın. $C=A\bigcap B$ və $C=A\bigcup B$ münasibətləri doğrudurmu?

10. $x>-3$ və $x>0$ bərabərsizliklərini ödəyən x həqiqi ədədlər çoxluğunun kəsişməsini və birləşməsini tapın.

11. $ABCD$ düzbucaqlısı ilə onun tərəflərinin kəsişməsi və birləşməsi hansı çoxluqları ifadə edir?

12. A bütün cüt ədədlər çoxluğu, B üçün misli olan bütün tam ədədlər çoxluğudur. A və B çoxluqlarının kəsişməsini və birləşməsini tapın.

13. X - bütün ikirəqəmli ədədlər çoxluğu,

Y - iki rəqəmli cüt ədədlər çoxluğu,

Z -dördün misli olan ikirəqəmli ədədlər çoxluğu olsun.

a) $A=X\bigcap Y\bigcap Z$ və $B=\left(X\bigcup Y\right)\bigcap Z$ çoxluqlarının elementləri hansı xarakterik xassələrə malikdirlər?

b) Hər iki A və B çoxluqlarını həndəsi göstərin.

14. A ilə romblar çoxluğunu,

B ilə üçbucaqlar çoxluğunu,

C ilə bucaqlarından biri 45^0 olan çoxbucaqlılar çoxluğunu işarə edək.

$M = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ çoxluğuna daxil olan iki fiquru çertyoj üzərində göstərin

15. A - bütün cüt natural ədədlər çoxluğu,

B - 4-ə bölünən bütün natural ədədlər çoxluğudur.

$A \setminus B$ və $B \setminus A$ fərq çoxluqlarını tapın.

16. A - dairə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlılar çoxluğu

B - dairə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlılar çoxluğu olsun.

$A \setminus B$ və $B \setminus A$ fərq çoxluqlarını göstərin.

17. Əgər X - AB düz xətti üzərindəki nöqtələr çoxluğu, Y - AB parçası üzərindəki nöqtələr çoxluğu olarsa, onda Y çoxluğunu X çoxluğuna tamamlayan çoxluğu tapın.

18. N - natrual ədədlər çoxluğu,

Z - tam ədədlər çoxluğu,

Ra - rasional ədədlər çoxluğu,

R - həqiqi ədədlər çoxluğu,

C -kompleks ədədlər çoxluğu olduqda

a) N çoxluğunun Z çoxluğuna;

b) Z çoxluğunun Ra çoxluğuna;

c) Ra çoxluğunun R çoxluğuna;

d) R çoxluğunun C çoxluğuna;

e) Z çoxluğunun R çoxluğuna tamamlayıcısını göstərin.

19. A - bütün tam ədədlər çoxluğu,

B -üçün misli olan tam ədədlər çoxluğu,

C -beşin misli olan tam ədədlər çoxluğu,

D -yeddinin misli olan tam ədədlər çoxluğu olsun.

Belə olduqda:

a) $A \setminus B \cup C$ çoxluğuna;

b) $(A \cup C) \setminus D$ çoxluğuna;

c) $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$ çoxluğuna hansı ədədlər daxildir?

20. İsbat edin ki, A və B sonlu çoxluqları kəsişmirlərsə, və $k(A) = p, k(B) = q$ isə onda

$$k(A \cup B) = p + q,\ k(A \cap B) = 0,\ k(A \setminus B) = p.$$

21. İsbat edin ki, əgər sonlu A və B çoxluqları üçün $k(A) = m,\ k(B) = n$ və $A \cap B \neq \varnothing$ isə onda

$$k(A \cup B) = m + n - k(A \cap B).$$

22. İsbat edin ki, əgər A və B çoxluqları sonlu olmaqla $A \subset B$ isə, onda $k(B \setminus A) = k(B) - k(A)$.

23. İsbat edin ki, bütün tam əmsallı n dərəcəli çoxhədlilər çoxluğu hesabidir.

25. Sadə ədədlər çoxluğunun hesabi olduğunu göstərin.

26. $[-1, 1]$ parçasında yerləşən bütün irrasional ədədlər çoxluğunun qeyri-hesabi olduğunu isbat edin.

27. İsbat edin ki, a, b, c, d həqiqi ədədlər olduqda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şəklində bütün matrislər çoxluğu qeyri-hesabidir.

IV FƏSİL.

MÜLAHİZƏLƏR HESABI.

§23. Mülahizələr məntiqinin aksiomatik qurulması üçün ilkin şərtlər

Məlumdur ki, hər bir nəzəriyyəni aksiomatik qurmaq üçün onun ilkin simvollarını və anlayışlarını müəyyən etmək lazımdır.

Quracağımız hesabın mülahizələr məntiqi hesabı olduğunu nəzərə alaraq, onun ilkin termini olaraq «mülahizə» anlayışını qəbul edək.

İlkin simvollar isə aşağıdakı uç kateqoriyadan ibarət olan işarələrdir:

1. Mulahizələri işarə etmək üçün işlədilən $A, B, C, \ldots$, $x, y, z, \ldots$ yaxud $A_1, A_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ hərfləri ilə işarə edilmiş simvollar;

2. Məntiqi əlaqələr adlanan dörd $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ məntiq əməlləri simvolları;

3. Sol və sağ mötərizə adlanan simvollar: (,).

Bu üç kateqoriyalı simvollar çoxluğunu mülahizələr hesabının əlifbası, bu çoxluğa daxil olan hər bir simvolu isə əlifbanın hərfi adlandıraq.

Tərif 1. Əlifbanın hərflərinin hər bir sonlu ardıcıllığına əlifbanın sözü deyilir. Aydındır ki, əlifbanın hər bir simvolu da onun sözüdür. Məsələn, $A(\Rightarrow B)\wedge)$, $AB \vee C$, $A(B(\Rightarrow, \rceil \Rightarrow)A \wedge$, $((A \Rightarrow B) \wedge C)$, $\rceil A$, $((A \vee B) \wedge C)$ və s. mülahizələr hesabı əlifbasının sözləridir.

Tərif 2. Mülahizələr hesabı əlifbasının bütün sözləri çoxluğuna onun dili deyilir.

Hər bir hesab formal nəzəriyyə olduğudan hesabın dilinə bəzən formalaşdırılmış dil də deyirlər.

Mülahizələr hesabı əlifbasının bütün sözləri çoxluğundan düsturlar çoxluğu adlanan aşağıdakı altçoxluq ayıraq.

1) $A, B, C, ..., x, y, z, ..., A_1, A_2, ..., z_1, z_2, ...$ hərfləri ilə işarə edilmiş hər bir mülahizə düsturdur. Bunları elementar düsturlar adlandıracağıq. Düsturları yunan əlifbasının $\alpha, \beta, \gamma, ...$ hərfləri ilə işarə edək.

2) α və β düstur olduqda $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ düsturlardır.

3) 1) və 2) şərtləri ilə təyin olunan obyektlər və ancaq onlar düsturlardır.

Tərifdən görünür ki,

$$A,\ (\neg A),\ (A \wedge B),\ ((A \wedge B) \Rightarrow (\neg B))$$

və s. mülahizələr hesabının düsturlarıdır, lakin

$$\wedge A,\ (A \wedge B) \vee C,\ A\,(B \vee C)$$

və s. sözləri bu hesabın düsturları deyildir. Aydındır ki, mülahizələr hesabının hər bir sözü düstur deyildir, tərsinə hesabın hər bir düsturu onun sözüdür. Düsturları işarə etmək üçün işlədilən $\alpha, \beta, \gamma, ...$ simvolları hesabın əlifbasına daxil deyil və ona görə də metasimvollardır (əlifbanın hərfi olmayan, lakin onun sözlərini işarə etmək üçün işlədilən simvolları biz metasimvollar adlandıracağıq).

Tərif 3. Simvolların hər bir boş altçoxluğunun doğurduğu sözə hesabın boş sözü deyilir. Mülahizələr hesabının boş sözlərini eyni bir simvolla, λ hərfi ilə işarə edəcəyik.

Mülahizələr hesabının hər bir sözünü yazmaq üçün lazım olan simvolların sayına həmin sözün uzunluğu, müxtəlif simvolların sayına isə sözün ranqı deyəcəyik. Məsələn,

$$(((A \wedge (\neg B) \Rightarrow B) \vee (\neg A))$$

sözünün uzunluğu 18-ə, ranqı isə 8-ə bərabərdir.

Aydındır ki, boş sözün uzunluğu və ranqı sıfra bərabərdir.

Qeyd. Bəzi razılaşmaları rəhbər tutaraq mülahizələr hesabı düsturlarının uzunluqlarını standart şəklə gətirmək

olar.

Məlumdur ki, mülahizələr hesabı düsturunda müəyyən hərflərlə yanaşı sol, sağ mötərizələr və habelə hesa-bın əlifbasına daxil olan $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ simvolları iştirak edir. Burada mötərizələr ədədi ifadələrin düzəldilməsində isti-fadə edilən rolu oynayır. Bu da bizə düsturlar üzərində aşa-ğıdakı kimi çevirmələr aparmağa imkan verir. Bu çevirmə-ləri məxsusi çevirmələr adlandıracağıq.

1) Xarici mötərizələrin düsturdan kənar edilməsi.

2) Elementar düsturlara tətbiq olunmuş məntiq əməlləri ilə bağlı olan mötərizələrin düsturlardan kənar edilməsi.

3) Düstura daxil olan məntiq əməllərinin aşağıdakı ardıcıllıqla yerinə yetirilməsi: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

Verilmiş düsturdan 1)-3) məxsusi çevirmələri nəticəsində alınan düstura həmin düsturun standart şəkli deyəcəyik. Məsələn,

$$(((\rceil A) \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \vee (\rceil B))))$$

düsturunun standart şəkli

$$(\rceil A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \vee \rceil B))$$

kimi olacaqdır.

Qeyd edək ki, mülahizələr hesabı düsturunun yuxarıdakı şəkildə verilmiş tərifi konstruktiv xarakter daşıyır və düsturlara biz mülahizələr hesabının simvolları ardıcıllığı kimi baxarkən bu simvollardan hansının birinci, ikinci və s. gəlməsi tamamilə müəyyən olmalıdır.

Məsələn, $((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$ sözü mülahizələr hesabının düsturudur və oraya daxil olan simvolların hansı ardıcıllıqla verilməsi tamamilə aydın göstərilimişdir.

Mülahizələr hesabının qurulmasında sonrakı addım onun düsturları içərisindən bir sıra ilkin düsturların seçilib ayrılmasıdır ki, bu düsturları biz hesabın aksiomları adlandıracağıq. Sonrakı mərhələdə isə ixtiyarımızda olan həmin bu aksiomlardan yeni düsturların alınması qaydası göstərilir. Bu qaydaları çıxarılış qaydaları adlandırmaq qəbul olunmuş-dur.

Mülahizələr hesabında aksiomlardan çıxarılış qaydalarının köməyilə yeni düsturların düzəldilməsi prosesinə aksiomlardan düsturların çıxarılması deyirlər.

İndi isə mülahizələr hesabını aksiomatik qurmaq üçün lazım olan aksomlar və orada işlədilən çıxarılış qaydaları ilə tanış olaq.

§24. Mülahizələr hesabının aksiomları və çıxarılış qaydaları

Mülahizələr hesabını qurmaq üçün müxtəlif aksiomlar sistemindən istifadə edilir. Biz burada mülahizələr hesabını P.S.Novikovun 11 aksiomu əsasında quracağıq.

Qeyd edək ki, eyni bir hesabı müxtəlif aksiomlar sisteminə görə qurmaq olar və həmin sistemlər ekvivalentdirlər. Bu fəslin sonunda mülahizələr hesabının başqa aksiomlar sistemi ilə qurulmasını da nəzərdən keçirəcəyik.

Mülahizələr hesabının aksiomları aşağıdakılardır:

I qrup aksiomlar

I $_1$. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

I $_2$. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

II qrup aksiomlar

II $_1$. $(A \wedge B) \Rightarrow A$

II $_2$. $(A \wedge B) \Rightarrow B$

II $_3$. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$.

III qrup aksiomlar

III $_1$. $A \Rightarrow (A \vee B)$

III $_2$. $B \Rightarrow (A \vee B)$

III $_3$. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$.

IV qrup aksiomlar

IV $_1$. $A \Rightarrow \overline{\overline{A}}$

IV $_2$. $\overline{\overline{A}} \Rightarrow A$

IV $_3$. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

Yuxarıdakı bölgüdən görünür ki, I qrup aksiomlar ancaq implikasiya əməli vasitəsilə verilir. II qrup aksiomlarda implikasiyaya konyunksiya əməli, III qrup aksiomlarda implikasiyaya dizyunksiya əməli və nəhayət, IV qrup aksiomlarda implikasiyaya inkar əməli qoşulur.

Mülahizələr hesabının çıxarılış qaydası iki hissədən ibarətdir.

a) əvəzləmə qaydası*; *b) tamamlama qaydası.

Bunların hər birini ayrılıqda şərh edək.

Əvəzləmə qaydasında fərz edirik ki, α düsturu A dəyişənini özündə saxlayan hər hansı düsturdur. Əgər α mülahizələr hesabının aksiomudursa, bu düsturda A-nın daxil olduğu hər yerdə onu hesabın ixtiyari β düsturu ilə əvəz etsək, yenə də hesabın aksiomu olan düstur alarıq. α düsturunda A dəyişəninin β düsturu ilə əvəz edilməsini $S_A^{\beta}(\alpha)$ kimi işarə edək.

Ümumiyyətlə, əgər mülahizələr hesabının α düsturu $A_1,...,A_n$ dəyişənlərini özündə saxlayan aksiomudursa, bu düsturda $A_i\,(i=\overline{1,n})$ dəyişənlərinin daxil olduğu hər yerdə onları $\beta_1,...,\beta_n$ düsturları ilə əvəz etdikdə alınan $S_{A_1,...,A_n}^{\beta_1,...,\beta_n}(\alpha)$ düsturu da hesabın aksiomu olacaqdır.

Qeyd edək ki, əgər α düsturu A dəyişənini özündə saxlamırsa, onda $S_A^{\beta}(\alpha)$ düsturu α ilə üst-üstə düşür. Bir də qeyd edək ki, S_A^{β} əməli $\wedge, \vee, \Rightarrow$ əməllərinə nəzərən distributiv və $\rceil$ əməlinə nəzərən kommutativdir:

$S_A^{\beta}(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ düsturu $S_A^{\beta}(\alpha_1) \wedge S_A^{\beta}(\alpha_2)$ düsturu ilə,

$S_A^{\beta}(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ düsturu $S_A^{\beta}(\alpha_1) \vee S_A^{\beta}(\alpha_2)$ düsturu ilə,

$S_A^{\beta}(\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2)$ düsturu $S_A^{\beta}(\alpha_1) \Rightarrow S_A^{\beta}(\alpha_2)$ düsturu ilə,

$S_A^{\beta}(\neg\alpha)$ düsturu $\neg S_A^{\beta}(\alpha)$ düsturu ilə üst-üstə düşür.

Mülahizələr hesabında tamamlama qaydası isə belədir: Əgər α və $\alpha \Rightarrow \beta$ mülahizələr hesabının aksiomudursa, onda β həmin hesabda aksiomdur. Bu qaydanı *modus ponens* (*MP*) qaydası adlandıracağıq. Aksiomlardan və çıxarılış qaydalarından istifadə edərək mülahizələr hesabının yeni aksiomunu qurmaq və ya verilmiş düsturun aksiom olub-olmadığını yoxlamaq olar. Bir neçə misal göstərək.

Misal 1. $\alpha : A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ düsturu mülahizələr hesabının aksiomudur.Bu düsturda A dəyişənini $B \Rightarrow (\overline{A} \wedge B)$ və B dəyişəni isə $A \Rightarrow \overline{C}$ düsturları ilə əvəz edək. Onda $S_{A,B}^{B\Rightarrow(\overline{A}\wedge B), A\Rightarrow\overline{C}}(\alpha)$ düsturu aşağıdakı kimi olar:

$$(B \Rightarrow (\overline{A} \wedge B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \overline{C}) \Rightarrow (B \Rightarrow (\overline{A} \wedge B))).$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, aldığımız bu düstur da mülahizələr hesabının aksiomudur.

Misal 2. Göstərək ki, α və β ixtiyarı düsturlar olduqda $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \alpha) \wedge \alpha))$ düsturu mülahizələr hesabının aksiomudur. Doğrudan da, II$_3$ aksiomunda $S_B^{B\Rightarrow A}$ əvəzləməsini aparsaq,

1^0. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \wedge C)))$

alarıq. I$_1$ aksiomundan və 1^0-dan *MP* qaydasına görə,

2^0. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \wedge C)))$

olduğu alınar. İndi 2^0 düsturunda S_C^A əvəzləməsini edək.

3^0. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \wedge A))$.

Sonra isə 3^0-da $S_{A,B}^{\alpha,\beta}$ əvəzləməsini aparsaq, onda alarıq:

4^0. $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \alpha) \wedge \alpha))$.

§25. Düsturların isbat olunanlığı

İndi isə mülahizələr hesabında düsturların isbat olunanlığı anlayışı ilə tanış olaq.

Tərif. Əgər mülahizələr hesabının verilmiş β düsturu üçün sonuncu həddi onunla üst-üstə düşən

$$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \qquad (25.1)$$

sonlu düsturlar ardıcıllığı varsa və β_i $(i = 1,2,...,k)$ düsturlarının hər biri ya hesabın aksiomudursa, ya da özündən əvvəlkilərdən çıxarılış qaydaları ilə alınırsa, onda β düsturu isbat olunan düstur və yaxud mülahizələr hesabının teoremi adlanır.

(25.1) düsturlar ardıcıllığına β düsturunun çıxarılışı və ya teoremin isbatı sxemi deyilir. k ədədini isbatın uzunluğu adlandırmaq qəbul olunmuşdur.

Tərifdən aydındır ki, mülahizələr hesabının hər bir aksiomu isbat olunandır. Bundan əlavə, əgər α və $\alpha \Rightarrow \beta$ mülahizələr hesabında isbat olunan düsturlardırsa, onda β həmin hesabda isbat olunandır. Həmçinin, əgər $A_1, ..., A_n$ dəyişənlərini özündə saxlayan α düsturu isbat olunandırsa və $\beta_1, ..., \beta_n$ hesabın istənilən düsturlarıdırsa, onda $S_{A_1,...,A_n}^{\beta_1,...,\beta_n}(\alpha)$ düsturu da bu hesabda isbat olunandır.

Mülahizələr hesabının α düsturu onda və ancaq onda həmin hesabda teorem olar ki, $\overline{\alpha}$ düsturu isbat edilən olmasın. Bu hesabda isbat olunan düsturları δ, isbat olunmayan düsturları λ ilə işarə edək. İndi isə mülahizələr hesabında düsturların isbat olunanlığına aid misallar göstərək.

Misal 1. α - mülahizələr hesabının istənilən düsturu olduqda $\alpha \Rightarrow \delta$ düsturu da həmin hesabın teoremidir.

Doğrudan da,

$$\beta_1 : \delta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta),$$

$$\beta_2 : \delta,$$
$$\beta_3 : \alpha \Rightarrow \delta.$$

Bu, teoremin isbat sxemidir və $k = 3$. Burada β_1 düsturu I_1 aksiomundan $S_{A,B}^{\delta,\alpha}$ əvəzləməsi nəticəsində alınmışdı, β_2 düsturu δ teoremidir və β_3 isə β_1, β_2-dən MP qaydası ilə alınmışdır.

Mülahizələr hesabının $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ şəklində olan düsturunu $\alpha \Leftrightarrow \beta$ kimi işarə edək və özünü də α, β düsturlarının ekvivalensiyası adlandıraq.

Misal 2. Göstərək ki, $\alpha \Rightarrow \alpha$ düsturu mülahizələr hesabının teoremidir.

Bunun üçün göstərmək kifayətdir ki, $\alpha \Rightarrow \alpha$ həmin he-sabda isbat olunandır. Doğrudan da,

$\beta_1 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	$S_C^A(\mathrm{I}_2)$
$\beta_2 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$	I_1 aksiomu
$\beta_3 : (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	$MP(\beta_1, \beta_2)$
$\beta_4 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	$S_B^{B \Rightarrow A}(\beta_3)$
$\beta_5 : A \Rightarrow A$	$MP(\beta_2, \beta_4)$
$\beta_6 : \alpha \Rightarrow \alpha$	$S_A^{\alpha}(\beta_5)$

$\beta_1 - \beta_6$ düsturları $\alpha \Rightarrow \alpha$ teoreminin isbatı sxemidir, isbatın uzunluğu isə $k = 6$-dır.

§26. Hipotezlərdən çıxarılış

Fərz edək ki, β — mülahizələr hesabının hər hansı düsturu, $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ isə həmin hesabın düsturlarının sonlu çoxluğudur.

Tərif. Verilmiş β düsturu üçün elə

$$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s \qquad (26.1)$$

sonlu düsturlar ardıcıllığı varsa ki, β_s düsturu β ilə üst-üstə düşür və β_i $(i = \overline{1,s})$ düsturlarının hər biri ya mülahizələr hesabının teoremidir, ya Ω çoxluğunun düsturudur, yaxud da (26.1) düsturlarının hər hansı ikisindən *MP* qaydası ilə alınır, onda β düsturu Ω düsturlarının nəticəsi adlanır. Ω çoxluğunun hər bir düsturuna hipotez deyilir. Bu halda bəzən də deyirlər ki, β düsturu Ω hipotezləri çoxluğundan çıxarılmışdır.

(26.1) ardıcıllığı çıxarılış sxemi, s isə çıxarılışın uzunluğu adlanır.

Tərifdən görünür ki, mülahizələr hesabının hər bir aksiomu və α_i $(i = \overline{1,n})$ düsturlarının hər biri Ω hipotezləri çoxluğundan çıxarılandır. β düsturunun Ω çoxluğundan çıxarılmasını $\Omega \vdash \beta$ və ya $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \vdash \beta$ kimi işarə edəcəyik. Əgər Ω çoxluğu boş çoxluq olarsa, onda $\varnothing \vdash \beta$ əvəzində $\vdash \beta$ kimi işarə edəcəyik. Bu halda belə deyirlər ki, β düsturu mülahizələr hesabının teoremidir. Bunun tərsi də doğrudur. Başqa sözlə aşağıdakı təklifi söyləmək olar.

Təklif. β düsturu onda və ancaq onda mülahizələr hesabının teoremi olar ki, o hipotezlərin boş çoxluğundan çıxarılan olsun.

Həqiqətən, β teoremdirsə, onda onun üçün düsturların boş çoxluğundan uzunluğu 1-ə bərabər olan çıxarılış sxemi qurmaq olar. Bu çıxarılış elə təkcə β düsturundan ibarət olacaqdır.

Tərsinə, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ ardıcıllığı β düsturunun hipotezlərin boş çoxluğundan çıxarılışı sxemidirsə, onda bu çıxarılışı elə β düsturunun isbatı sxemi qəbul edərək həmin düsturun isbat olunanlığını alarıq. Deməli, β-mülahizələr hesabının teoremidir. Qeyd edək ki, teoremlərin isbatında əvəzləmə qaydasından istifadə edildiyi halda bu qaydadan düsturların çıxarılışı zamanı istifadə etməyə icazə verilmir.

İndi isə çıxarılanlığa misallar göstərək.

Misal 1. İsbat edək ki, β istənilən düstur olduqda $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \alpha$.

1^0. α	hipotez
2^0. $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$	aksiom I_1
3^0. $\beta \Rightarrow \alpha$	MP $(1^0, 2^0)$

Misal 2. $\alpha \Rightarrow \gamma$, $\beta \Rightarrow \gamma$, $\alpha \vdash \gamma$ çıxarılışını quraq.

1^0. $\alpha \Rightarrow \gamma$	hipotez
2^0. $(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma)$	aksiom III_3
3^0. $(\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma)$	MP $(1^0, 2^0)$
4^0. $\beta \Rightarrow \gamma$	hipotez
5^0. $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$	MP $(3^0, 4^0)$
6^0. α	hipotez
7^0. $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$	aksiom III_1
8^0. $\alpha \vee \beta$	MP $(6^0, 7^0)$
9^0. γ	MP $(5^0, 8^0)$

Beləliklə, γ düsturu $\Omega = \{\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma, \alpha\}$ düsturları çoxluğundan çıxarılmışdır və çıxarılışın uzunluğu $s = 9$ -dur.

Misal 3. $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Rightarrow \gamma \vdash \gamma \vee \mu$ (μ—istənilən düstur-dur) çıxarılışını isbat edin.

1^0. $\alpha \wedge \beta$	hipotez
2^0. $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$	aksiom II_1
3^0. α	MP $(1^0, 2^0)$
4^0. $\alpha \Rightarrow \gamma$	hipotez
5^0. γ	MP $(3^0, 4^0)$
6^0. $\gamma \Rightarrow (\gamma \vee \mu)$	aksiom III_1

7^0. $\gamma \vee \mu$ $MP\ (5^0, 6^0)$

Deməli, $\gamma \vee \mu$ düsturu $\Omega = \{\alpha \wedge \beta, \alpha \Rightarrow \gamma\}$ çoxluğundan çıxarılmışdır və $s = 7$.

§27. Əlavə çıxarılış qaydaları

Bu fəslin 24-cü paraqrafında biz mülahizələr hesabında fəaliyyət göstərən iki çıxarılış qaydası ilə tanış olduq. Sonrakı paraqraflarda isə hesab aksiomları və həmin çıxarılış qaydalarının köməyilə yeni teoremlərin alınması prosesini öyrəndik. Orada gördük ki, son nəticə bilavasitə isbat və ya çıxarılış sxemi qurmaqla əldə edilir. Lakin aşağıda görəcəyimiz kimi düsturların çıxarılışının bir sıra xassələri vardır ki, onlardan istifadə etməklə hər dəfə belə sxem qurmadan verilmiş düsturun çıxarılanlığı haqqında fikir söyləmək olar. Bu xassələri biz əlavə çıxarılış qaydaları adlandıracağıq.

Əlavə çıxarılış qaydalarını ifadə edərkən sol tərəfdə onların adi qaydada yazılışını göstərməklə, sağ tərəfdə başqa bir yazılış formasından istifadə edəcəyik. Belə ki, axırıncı yazılışda üfüqi düz xətt çəkib onun üstündə hipotezləri, altında isə onlardan çıxan nəticəni yazacağıq.

Fərz edək ki, α, β, γ mülahizələr hesabının ixtiyari düsturlarıdır. Onda aşağıdakı çıxarılışlar doğrudur.

I. ***Silloqizm qaydası:***

$$\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma; \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}.$$

II. ***Hipotezlərin yerinin dəyişdirilməsi qaydası:***

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma); \quad \frac{\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)}{\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)}.$$

III. ***Konyunksiyanın daxil edilməsi qaydası:***

$$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta \ ; \qquad \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

IV. ***Konyunksiyanın kənar edilməsi qaydası*:**

$$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \ ; \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}.$$

$$\alpha \wedge \beta \vdash \beta \ ; \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

V. ***Dizyunksiyanın daxil edilməsi qaydası*:**

$$\alpha \vdash \alpha \vee \beta \ ; \qquad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta},$$

$$\beta \vdash \alpha \vee \beta \ ; \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

VI. ***Dizyunksiyanın kənar edilməsi qaydası*:**

$$\alpha \vee \beta, \ \neg\beta \vdash \alpha \ ; \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha},$$

$$\alpha \vee \beta, \ \neg\alpha \vdash \beta \ ; \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}.$$

VII. ***Hipotezlərin birləşdirilməsi qaydası*:**

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \vdash ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma) \ ; \qquad \frac{\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma}.$$

VIII. ***Hipotezlərin ayrılması qaydası*:**

$$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \ ; \qquad \frac{(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)}.$$

IX. ***Hipotezlərin təkrar olunması qaydası*:**

$$\alpha, \beta \vdash \beta \ ; \qquad \frac{\alpha, \beta}{\beta}.$$

X. ***İmplikasiyanın daxil edilməsi qaydası*:**

əgər $\alpha, \beta \vdash \gamma$ olarsa, onda $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \gamma$; əgər $\dfrac{\alpha, \beta}{\gamma}$ olarsa, onda $\dfrac{\alpha}{\beta \Rightarrow \gamma}$.

XI. *İmplikasiyanın kənar edilməsi qaydası*:

əgər $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \gamma$ olarsa, onda $\alpha, \beta \vdash \gamma$; əgər $\dfrac{\alpha}{\beta \Rightarrow \gamma}$ olarsa, onda $\dfrac{\alpha, \beta}{\gamma}$.

XII. *Əks mövqe qaydası*:

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha \; ; \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}.$$

XIII. *Əksini fərz etmə qaydası*:

$$\neg\alpha \Rightarrow \beta , \; \neg\alpha \Rightarrow \neg\beta \vdash \alpha \; ; \qquad \frac{\neg\alpha \Rightarrow \beta, \neg\alpha \Rightarrow \neg\beta}{\alpha}.$$

XIV. *Vəziyyətlərin araşdırılması (təhlili) qaydası*:

$$\alpha \Rightarrow \gamma , \beta \Rightarrow \gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \; ; \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \gamma , \beta \Rightarrow \gamma}{(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma}.$$

XV. *Zərifləşdirmə (incələşmə) qaydası*:

$$\lambda \vdash \alpha \; ; \qquad \frac{\lambda}{\alpha}$$

Burada λ -hesabın isbat olunmayan düsturudur.

Buna bəzən «yalandan hər şeyə» qaydası da deyirlər.

Mülahizələr hesabının aksiomlarından və çıxarılış qaydalarından istifadə edərək I — XV əlavə çıxarılış qaydalarının hər birinin doğruluğunu göstərmək olar.

Məsələn, XV çıxarılış qaydasının doğruluğunu göstərək.

IV_3 aksiomunda B-ni mülahizələr hesabının δ isbat olunan düsturu ilə, A-nı isə istənilən α düsturu ilə əvəz etsək,

$$(\alpha \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\overline{\delta} \Rightarrow \overline{\alpha})$$

olduğunu alarıq. Lakin bu fəslin 25-ci paraqrafındakı 1-ci misalın nəticəsinə görə $\alpha \Rightarrow \delta$ mülahizələr hesabında teoremdir. Ona görə də $\alpha \Rightarrow \delta$ və $(\alpha \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\overline{\delta} \Rightarrow \overline{\alpha})$ düsturlarına tamamlama qaydasını tətbiq etsək, $\vdash \overline{\delta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ olduğunu görərik. Burada α düsturunu $\overline{\alpha}$ ilə əvəz edib, həm də δ-nın $\overline{\lambda}$ olmasını nəzərə alsaq, $\vdash \overline{\overline{\lambda}} \Rightarrow \overline{\overline{\alpha}}$ teoremini alarıq. IV_2 aksiomunu tətbiq etsək, $\lambda \Rightarrow \alpha$-nın mülahizələr hesabının teoremi olması nəticəsinə gələrik.

§28. Deduksiya teoremi

Mülahizələr hesabında deduksiya teoremi adı ilə məşhur olan aşağıdakı çıxarılışın böyük əhəmiyyəti vardır.

Teorem. Əgər mülahizələr hesabının β düsturu həmin hesabın $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ hipotezləri çoxluğundan çıxarılandırsa, onda

$$\alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (\alpha_{n-1} \Rightarrow (\alpha_n \Rightarrow \beta))\cdots)) \qquad (28.1)$$

düsturu bu hesabın teoremidir.

İsbatı. Fərz edək ki, β düsturu Ω hipotezləri çoxluğundan çıxarılmışdır, yəni

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \vdash \beta \qquad (28.1')$$

və

$$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s = \beta \qquad (28.2)$$

ardıcıllığı $\Omega \vdash \beta$ çıxarılışı sxemidir.

s-ə görə riyazi induksiya metodundan istifadə edərək əvvəlcə isbat edək ki,

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta \qquad (28.3)$$

$s = 1$ olduqda (28.2) sistemi bircə dənə β_1 düsturundan ibarət olacaqdır ki, o da elə β düsturudur. Hipotezlərdən çıxarılışın tərifinə görə β_1 ya mülahizələr hesabının aksiomudur, yaxud $\Omega' = \Omega / \{\alpha_n\}$ çoxluğunun düsturlarından hər hansı biridir və yaxud da α_n düsturu ilə üst-üstə düşür. I_1 aksiomundan əvəzetmə nəticəsində alınan

$$\beta_1 \Rightarrow (\alpha_n \Rightarrow \beta_1) \qquad (28.4)$$

düsturuna baxaq. Birinci iki halda $\alpha_n \Rightarrow \beta_1$ düsturunun Ω çoxluğundan çıxarılışı (28.4)-dən *MP* qaydası ilə alınır.

β_1-in α_n-lə üst-üstə düşdüyü halda isə $\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta$ çıxarılanlığı $\vdash \alpha_n \Rightarrow \alpha_n$ olmasından aydındır. Beləliklə, $s = 1$ olduqda (28.3) çıxarılışı doğrudur.

İndi fərz edək ki, istənilən $k < s$ üçün teorem doğrudur, yəni $\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_k$ $(k < s)$ olduğunu qəbul edib, $k = s$ olduqda $\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_s$ çıxarılışını isbat edək.

β_s üçün aşağıdakı 4 haldan biri mümkündür.

1) β_s -mülahizələr hesabının aksiomudur,

2) β_s Ω' çoxluğunun hipotezlərindən biridir,

3) β_s α_n düsturu ilə üst-üstə düşür,

4) β_s β_j və β_m ($j, m < s$) düsturlarından *MP* qaydası ilə alınmışdır. Birinci 3 halda $\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_s$ çıxarılışı $s = 1$ olan haldakı kimi göstərilir. Axırıncı hala ayrıca baxaq.

Tutaq ki, β_s, β_j və β_m ($j, m < s$) düsturlarından *MP* qaydasının köməyilə alınmışdır. Bu halda induktiv mühakiməyə görə

$$\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_j, \;\; \Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_m \qquad (28.5)$$

olur.

Qeyd edək ki, β_m-in özü $\beta_j \Rightarrow \beta_s$ şəklində implikasiyadır. Bunu nəzərə alsaq (28.5)-i belə yazmaq olar:

$$\Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \beta_j, \;\; \Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow (\beta_j \Rightarrow \beta_s). \quad (28.6)$$

Digər tərəfdən I_2 aksiomundan əvəzetmə nəticəsində

$$\vdash (\alpha_n \Rightarrow (\beta_j \Rightarrow \beta_s)) \Rightarrow ((\alpha_n \Rightarrow \beta_j) \Rightarrow (\alpha_n \Rightarrow \beta_s)) \qquad (28.7)$$

alarıq. (28.6)-ya müraciət etməklə (28.7)-yə *MP* qaydasını ardıcıl olaraq iki dəfə tətbiq etsək,

$$\Omega' \vdash (\alpha_n \Rightarrow \beta_j) \Rightarrow (\alpha_n \Rightarrow \beta_s) \text{ və } \Omega' \vdash \alpha_n \Rightarrow \alpha_s$$

çıxarılışı alınar.

Beləliklə, istənilən s üçün (28.3) çıxarılışı isbat edilmiş olur.

Əgər (28.3)-ü (28.1')-ə ardıcıl olaraq n dəfə tətbiq etsək (28.1)-in doğruluğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Misal. Deduksiya teoremindən istifadə edərək

$$\vdash (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$$

(§27, II çıxarılış qaydası) olduğunu isbat edək.

Bu teoremin isbatı aşağıda göstərilən çıxarılışla eyni-güclüdür:

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma),\ \beta, \alpha \vdash \gamma . \qquad (28.8)$$

İndi (28.8) çıxarılışın sxemini quraq:

1^0.	α	hipotez
2^0.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$	hipotez
3^0.	$\beta \Rightarrow \gamma$	*MP* (1^0, 2^0)
4^0.	β	hipotez
5^0.	γ	*MP* (3^0, 4^0)

Beləliklə, $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma),\ \beta, \alpha \vdash \gamma$.

Buraya deduksiya teoremini üç dəfə tətbiq etsək,

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$$

teoremini alarıq.

§29. Mülahizələr hesabının ziddiyyətsizliyi

Bütün aksiomatik nəzəriyyələrdə olduğu kimi mülahizələr hesabında da ziddiyyətsizlik, tamlıq və asılı olmamaq problemləri əsas məsələlərdən biri kimi qarşıya çıxır. Belə məsələləri həll etmək üçün hesabın əlifbasına daxil olan simvolların və onun düsturlarının müəyyən interpretasiyasını vermək, beləliklə də formal nəzəriyyəni qeyri-formal (məzmunlu) nəzəriyyəyə çevirmək lazımdır.

Bunun üçün mülahizələr hesabı əlifbasına daxil olan birinci kateqoriyalı simvolları — sərbəst dəyişənləri mülahizələr cəbrində ancaq D və Y qiymətlər alan propozisional hərflər kimi şərh edək. Əlifbaya daxil olan ikinci kateqoriyalı $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow$ simvollarını isə mülahizələr cəbrində olduğu kimi təyin edək.

Üçüncü kateqoriyalı simvolları da mülahizələr cəbrində olduğu mənada işlədək. Bu interpretasiyada mülahizələr hesabının hər bir düsturu da mülahizələr cəbrinin düsturu kimi dəyişənlərin ixtiyari qiymətləri yığımı üçün D və Y qiymətlərindən ancaq birini alacaqdır.

Tərif. Hər hansı hesabda biri digərinin inkarı olan iki düstur eyni zamanda isbat olunan deyildirsə, belə hesaba ziddiyyətsiz hesab deyilir.

Başqa sözlə ziddiyyətsiz hesab elə hesabdır ki, onun istənilən α düsturu üçün α və $\overline{\alpha}$ düsturları hesabın aksiomlarından orada mövcud olan çıxarılış qaydalarının köməyilə eyni zamanda çıxarıla bilmir. Bunun əksinə olaraq, əgər hər hansı α düsturu özünün $\overline{\alpha}$ inkarı ilə birlikdə hesabın teoremidirsə, onda belə hesab ziddiyyətli hesab adlanır.

Buradan aydın olur ki, ziddiyyətli hesab elə hesabdır ki, bu hesabın istənilən düsturu onun teoremidir. Əgər söhbət konkret olaraq mülahizələr hesabından gedirsə, onda bu hesabın düsturlarını mülahizələr cəbrinin düsturları kimi interpretasiya etdikdə belə çıxır ki, mülahizələr cəbrində α və $\overline{\alpha}$ düsturları eyni zamanda doğru düsturlardır. Bu isə o demək olardı ki, mülahizələr cəbrinin α düsturu eyni za-manda həm tavtologiya, həm də ziddiyyətdir.

Bu faktdan mülahizələr hesabının ziddiyyətsizliyinin isbatında istifadə etmək olar. Doğrudan da baxdığımız hesabın ziddiyyətsizliyini isbat etmək üçün orada heç olmasa bir dənə çıxarılmayan düsturun varlığını göstərmək kifayətdir. Lakin mülahizələr hesabı öz interpretasiyasını mülahizələr cəbrində tapdığı üçün və bu axırıncıda isə düsturların ümumqiymətliyi və yerinə yetirənliyi məsələləri alqoritmik həll olunduğundan biz mülahizələr hesabında ziddiyyətsizlik probleminin həllinə başqa cür yanaşacağıq. Bu, aşağıdakı təkliflə müəyyən olunur.

Teorem. Mülahizələr hesabı ziddiyyətsizdir.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, mülahizələr hesabının teoremi olan hər bir düstur mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düsturdur. Doğrudan da mülahizələr hesabının aksiomları mülahizələr cəbri düsturu baxımından eyniliklə doğru düsturlardır. Buna bilavasitə doğruluq cədvəli düzəltməklə inanmaq olar. Sonra, əgər mülahizələr hesabının α və $\alpha \Rightarrow \beta$ düsturları mülahizələr cəbri düsturları baxımından eyniliklə doğru düsturlardırsa, onda onlardan MP qaydası ilə alınan β düsturu da implikasiyanın tərifinə görə eyniliklə doğru düstur olacaqdır.

Nəhayət, əgər A dəyişənini özündə saxlayan $\alpha(A)$ düsturu mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düstur, β isə ixtiyari düsturdursa, onda α düsturunda A dəyişənini β düsturu ilə əvəz etmək nəticəsində alınan $S_A^{\beta}(\alpha)$ düsturu da mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düsturdur.

Həqiqətən, $\alpha(A)$ düsturu eyniliklə doğru düstur olduğundan o, dəyişənlərin ixtiyari qiymətləri yığımı üçün yalnız D qiymət alır. Ona görə də α düsturuna daxil olan başqa dəyişənlərin aldıqları doğruluq qiymətlərindən asılı olmayaraq $\alpha(D)$ və $\alpha(Y)$ ifadələri D olacaqdır. Digər tərəfdən β düsturu da ona daxil olan dəyişənlərin hər bir qiymətləri yığımı üçün yalnız D və Y qiymətini alır. Odur ki, $S_A^{\beta}(\alpha) = \alpha(\beta)$ düsturu da həmişə D olacaqdır.

Beləliklə, göstərmiş oluruq ki, mülahizələr hesabının aksiomları və onlardan çıxarılış qaydaları ilə alınmış bütün düsturlar, o çümlədən də hesabın teoremləri mülahizələr cəbri düsturları kimi eyniliklə doğru düsturlardır.

İndi fərz edək ki, α -mülahizələr hesabının hər hansı teoremidir. Bu halda göstərək ki, $\overline{\alpha}$ həmin hesabın teoremi ola bilməz. Doğrudan da, əgər α və $\overline{\alpha}$ eyni zamanda hesabın teoremləri olsa, onda həm α və həm də $\overline{\alpha}$ mülahizələr cəbri düsturu kimi eyniliklə doğru düstur olardı. Bu isə mümkün deyildir. Teorem isbat olundu.

§30. Mülahizələr hesabının tamlığı

Ziddiyyətsizlik kimi tamlıq problemi də mülahizələr hesabının vacib məsələlərindən biridir.

Hər bir hesabda tamlıq problemi iki cür qoyulur:

I. ***Geniş mənada tamlıq.***

II. ***Məhdud mənada tamlıq.***

Bunların hər birini şərh edək.

Əvvəlki paraqrafda biz mülahizələr hesabının ziddiyyətsizliyi problemindən danışarkən hesabın hər bir düsturuna mülahizələr cəbri düsturu kimi baxaraq qeyd etdik ki, hesabda düsturun isbat olunanlığı məsələsi mülahizələr cəbrində həmin düsturun eyniliklə doğru olması məsələsinə gətirilir. Həm də belə bir nəticəyə gəldik ki, mülahizələr hesabının hər bir teoremi mülahizələr cəbri baxımından eyniliklə doğru düsturdur.

İndi belə bir tərs məsələyə baxaq. Mülahizələr cəbrinin eyniliklə doğru olan bütün düsturları mülahizələr hesabında isbat olunandırmı?

Məsələnin məhz bu şəkildə qoyuluşu mülahizələr hesabının geniş mənada tamlığı problemidir. Bu problemin həllinə müsbət cavab tamlıq teoremi adlanan aşağıdakı təklifə əsaslanır.

Teorem 1. Mülahizələr cəbrinin hər bir eyniliklə doğru düsturu mülahizələr hesabında isbat olunandır.

İsbatı. Fərz edək ki, $\alpha(A_1, A_2, ..., A_n)$ mülahizələr cəbrinin eyniliklə doğru düsturudur. II fəsil §16-da isbat etdiyimizə görə α düsturu ilə eynigüclü olan konyunktiv normal forma vardır:

$$\alpha \equiv \bigwedge_{k=1}^{s} \mathscr{E}_k, \qquad (30.1)$$

burada $\mathscr{E}_k$ $(k = \overline{1, s})$ $A_1, A_2, ..., A_n$ dəyişənlərindən asılı elementar dizyunksiyalardır. (30.1) düsturu mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru olduğundan ona daxil olan $\mathscr{E}_k$ dizyunksiyaların hər birinə müəyyən bir A_j dəyişəni öz inkarı ilə birlikdə daxildir. Başqa sözlə, $\mathscr{E}_k$ elementar dizyunksiyaları hər bir $A_j \vee \overline{A}_j$ şəklində olan eyniliklə doğru düsturu özündə saxlayır. Lakin məlumdur ki, istənilən A dəyişəni üçün $A \vee \overline{A}$ düsturu mülahizələr hesabının teoremidir. Ona görə də $\vee$ daxil edilməsi qaydasına əsasən $\mathscr{E}_k$ dizyunk-siyalarının hər biri mülahizələr hesabında teorem olacaqdır. Beləliklə də $\mathscr{E}_k$ $(k = \overline{1, s})$ dizyunksiyalarının konyunksiyaları şəklində olan α düsturu $\wedge$ daxil edilməsi qaydasına görə mülahizələr hesabının teoremi olar. Teorem isbat olundu.

Nəticə. Mülahizələr hesabının α düsturu onda və ancaq onda teorem olar ki, o, mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düstur olsun.

Tamlıq teoremindən aydın olur ki, mülahizələr hesabının indiyə kimi teorem adlandırdığımız düsturları mülahizələr cəbrinin eyniliklə doğru düsturları ilə üst-üstə düşür. Bu isə bizə mülahizələr cəbrində isbat etdiyimiz bütün eynigüclülükləri, o cümlədən də, məntiq əməllərinin xassələri adlandırdığımız eynigüclülükləri mülahizələr hesabına köçürmək imkanı verir. Xüsusi halda, mülahizələr hesabında aşağıdakı düsturlar teoremdirlər.

$$\vdash(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow(\beta\wedge\alpha),$$

$$\vdash(\alpha\vee\beta)\Rightarrow(\beta\vee\alpha),$$

$$\vdash((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)\Rightarrow(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)),$$

$$\vdash((\alpha\vee\beta)\vee\gamma)\Rightarrow(\alpha\vee(\beta\vee\gamma))$$

və s.

Mülahizələr hesabının məhdud mənada tamlığı da onun geniş mənada tamlığından az əhəmiyyət kəsb etmir. Bunu bəzən hesabın mütləq tamlığı da adlandırırlar.

Tərif. Əgər nəzəriyyənin aksiomlarına oradakı çıxarılış qaydalarını saxlamaqla onun hər hansı çıxarılmayan düsturunu qoşduqda ziddiyyətli nəzəriyyə alınarsa, onda belə nəzəriyyəyə məhdud mənada tam nəzəriyyə deyilir.

Teorem 2. Mülahizələr hesabı məhdud mənada tamdır.

İsbatı. Fərz edək ki, α-mülahizələr hesabında teorem olmayan hər hansı düsturdur. İsbat edək ki, mülahizələr hesabının aksiomları sisteminə α düsturunu yeni aksiom kimi qoşduqda alınan hesab ziddiyyətli hesaba çevrilir. α hesabın teoremi olmadığından o mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düstur deyildir. Ona görə də onun doğruluq cədvəlində hər hansı sətrlə axırıncı sütunun kəsişməsində Y qiyməti olacaqdır. Həmin bu sətrlərdən birini qeyd edək. Qeyd etdiyimiz sətr üçün α düsturuna daxil olan və D qiymət alan elementar düsturların (dəyişənlərin) əvəzinə $A\vee\overline{A}$, Y qiymət alan elementar düsturların əvəzinə isə $A\wedge\overline{A}$ yazmaqla alınan düsturu β ilə işarə edək. β düsturu α aksiomundan əvəzləmə qaydası ilə alındığından hesabın teoremi olacaqdır. Digər tərəfdən yuxarıdakı kimi əvəzləmə qaydası ilə alınan β düsturu həmişə Y qiymət alır. Odur ki, $\overline{\beta}$ düsturu mülahizələr cəbrində tavtologiyadır. Beləliklə, $\overline{\beta}$ düsturu mülahizələr hesabının teoremidir. Nəticədə alırıq ki, həm β, həm də $\overline{\beta}$ düsturları baxdığımız hesabın teoremləridir. Bu isə hesabın ziddiyyətli olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

§31. Mülahizələr hesabı aksiomlarının asılı olmaması

Bu fəslin 23-cü paraqrafında qeyd etdik ki, mülahizələr məntiqi hesabı belə bir sxem üzrə qurulur. Hesabın ilkin anlayış və simvolları, habelə düstur anlayışları daxil edilir. Bundan sonra ilkin doğru düsturlar seçilib ayrılır və onlar aksiomlar elan edilir. Sonra isə çıxarılış qaydaları adlanan elə qaydalar göstərilir ki, onların köməyilə aksiomlardan yeni doğru düsturlar düzəltmək mümkün olsun. Hər bir belə hesab üçün onun qəbul edilmiş aksiomlarının kifayət edib-etməməsi məsələsi ortaya çıxır. Aksiomlar sisteminin asılı olmaması adlanan bu problem aşağıdakı kimi qoyulur.

Hesabda fəaliyyət göstərən çıxarılış qaydalarını saxlamaqla verilmiş aksiomlar sistemindən hər hansı bir aksiomu kənar etmək olarmı?

Deməli, əgər hər hansı aksiomu bu qayda ilə kənar etmək mümkün olsa, onda onu aksiomlar sistemi siyahısından silmək olar və nəticədə alınan yeni aksiomlar bazasında qurulmuş hesab dəyişməz.

Tərif 1. Hesabın aksiomları sisteminin hər hansı bir aksiomu onun qalan aksiomlarından çıxarılış qaydalarının köməyilə alınmazsa, ona asılı olmayan aksiom deyilir.

Tərif 2. Aksiomlar sisteminin hər bir aksiomu bu sistemin başqa aksiomlarından asılı deyilsə, onda belə sistemə asılı olmayan sistem, əks halda isə asılı sistem deyilir.

Yada salaq ki, ziddiyyətsizlik və tamlıq problemlərinin həllində mülahizələr hesabının dəyişənləri və düsturlarını mülahizələr cəbrində D və Y qiymət alan dəyişən və düsturlar kimi, düstura daxil olan $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow$ əməllərini isə mülahizələr cəbrində təyin etdiyimiz mənada interpretasiya etmişdik. Həm də mülahizələr hesabının hər bir çıxarılan düsturunun ona daxil olan dəyişənlərin istənilən qiymətləri yığımı üçün yalnız D qiymət alan mülahizələr cəbri düsturu olduğunu aşkar etdik. Aksiomların asılı olmaması probleminin həllində də buna oxşar interpretasiyadan istifadə edəcəyik. Lakin burada düstura daxil olan propozisional hərfləri əvvəllərdə olduğu kimi D və Y deyil, 0, 1, 2, 3 ilə işarə olunmuş simvollara bərabər qiymətlər alan dəyişənlər kimi şərh edəcəyik, $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow$ əməllərini isə elə təyin edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin.

1) Asılı olmaması tədqiq olunan α aksiomundan başqa qalan aksiomlar dəyişənlərin bütün qiymətlərində 1-ə bərabər qiymət alsın.

2) Hesabın α aksiomunu istisna etməklə yerdə qalan aksiomlar sistemindən çıxarılan bütün düsturlar oraya daxil olan dəyişənlərin bütün qiymətləri yığımı üçün 1-ə bərabər qiymət alsın.

Bu halda aydındır ki, hər bir məntiq düsturu da oraya daxil olan dəyişənlərin ixtiyari qeyd olunmuş qiymətləri yığımı üçün 0, 1, 2, 3 simvollarından birinə bərabər qiymət alacaqdır. 0, 1, 2, 3 simvollarından hər hansı birini, məsələn, 1-i seçək.

Düstura daxil olan propozisional hərfləri {0, 1, 2, 3} çoxluğunda dəyişdikdə 1-ə bərabər qiymət alan məntiq düsturunu ayrılmış düstur adlandıraq.

3) Hesabın α aksiomu oraya daxil olan dəyişənlərin hər hansı qiymətləri yığımı üçün 1-dən fərqli qiymət alsın.

Aydındır ki, belə interpretasiyada α aksiomunun başqa aksiomlardan asılı olmaması isbat ediləcəkdir, çünki əgər α aksiomu 1-ə bərabər qiymət alsaydı, onda o, başqa aksiomlardan çıxarılan düsturlar çoxluğuna daxil olardı. Əvvəlcə məsələn, I_1 aksiomunun asılı olmadığını isbat edək. Bunun üçün hesabın aksiomları sisteminə daxil olan əməlləri aşağıdakı cədvəllərdə göstərildiyi kimi təyin edək.

A	$\rceil A$
0	1
1	0
2	3
3	2

A	B	$A\Rightarrow B$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow(B\Rightarrow A)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	2	1	0	2	1
0	3	1	0	3	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1
1	2	0	2	1	1
1	3	0	3	1	1
2	0	0	0	2	1
2	1	1	2	1	0
2	2	1	2	2	1
2	3	0	3	2	1
3	0	0	0	3	1
3	1	1	3	1	0
3	2	1	3	2	0
3	3	1	3	3	1

Cədvəldən aydın görmək olar ki, əgər $A \Rightarrow B$ və A düsturları ayrılmış düsturlardırsa, B də ayrılmış düsturdur. Həmçinin, I_1 aksiomundan başqa bütün aksiomlar və onlardan əvəzləmə nəticəsində alınan bütün düsturlar da ayrılmış düsturlardır. Lakin I_1 aksiomu göstərilən xassəni ödəmir. Doğrudan da dəyişənlərin, məsələn, $A = 2$ və $B = 1$ qiymətlərində $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ düsturu 1-ə yox, sıfra bərabər qiymət alır və ona görə də I_1 aksiomu ayrılmış düstur deyildir.

Yuxarıdakına analoji olaraq I_2 aksiomunun başqa aksiomlardan asılı olmadığını isbat etmək olar.

II qrup aksiomların asılı olmadığını isbat etmək üçün yenə də düsturlara daxil olan dəyişənləri 0, 1 qiyməti alan dəyişənlər kimi interpretasiya edək. Əgər 0-a mülahizələr cəbrində Y-nın, 1-ə isə D-nun interpretasiyası kimi baxsaq və $\rceil, \vee, \Rightarrow$ əməllərini orada olduğu kimi təyin etsək, onda II qrup aksiomlardan başqa qalan aksiomlar dəyişənlərin istənilən qiymətlərində yalnız 1-ə bərabər olar. Yalnız $\wedge$ əməlini mülahizələr cəbrində olduğundan fərqli təyin edək. II_1 aksiomu üçün $A \wedge B = B$,II_2 aksiomu üçün $A \wedge B = A$,II_3 aksiomu üçün $A \wedge B = 0$.

Aydın görmək olar ki, konyunksiya əməli məsələn, $A \wedge B = B$ kimi təyin edildikdə II_1 və II_3 aksiomları dəyişənlərin istənilən qiymətlərində 1-ə bərabər olur. II_2 aksio-mu isə $A = 1$, $B = 0$ olduqda sıfra bərabər qiymət alır. De-məli, bu interpretasiyada II_2 aksiomundan başqa bütün ak-siomlar ayrılmış düsturlardır. II_2 isə ayrılmış düstur deyildir. Əgər əvəzləmə və tamamlama qaydalarını ayrılmış düstur-lara tətbiq etsək, yenə də ayrılmış düstur alarıq. II_2 aksiomu qalan aksiomlardan asılı olsaydı, onda gərək o da ayrılmış düstur olaydı.

Beləliklə də, II_2 aksiomunun asılı olmadığı isbat edilmiş olur. Analoji olaraq II qrup aksiomların qalanlarının da asılı olmadığını isbat etmək olar.

III qrup aksiomların asılı olmadığını göstərmək üçün $\vee$ əməlindən başqa qalan əməlləri yenə də mülahizələr cəbrində olduğu kimi, dizyunksiyanı isə aşağıdakı kimi təyin edək. III_1 aksiomu üçün $A \vee B = B$, III_2 aksiomu üçün $A \vee B = A$, III_3 aksiomu üçün $A \vee B = 1$. Məsələn, III_3 aksiomunun asılı olmadığını isbat edək. Asanlıqla görmək olar ki, əməlləri yuxarıda göstərilən kimi təyin etdikdə III_3-dən başqa mülahizələr hesabının qalan aksiomları eyniliklə 1-ə bərabər olur, yəni ayrılmış düsturlardır. III_3 aksiomu isə ayrılmış düstur deyil. Misal üçün, $A = B = C = 0$ olduqda III_3 düsturu 1-ə deyil, 0-a bərabər qiymət alır. Ona görə də 0, başqa aksiomların nəticəsi ola bilməz. Bu isə III_3 aksiomunun asılı olmadığını göstərir. Analoji olaraq digər aksiomların asılı olmadığı isbat edilir.

Nəhayət, IV qrup aksiomların asılı olmadığını isbat etmək üçün yalnız $\rceil$ əməli mülahizələr cəbrində olduğundan fərqli, qalan əməlləri isə mülahizələr cəbrindəki kimi təyin edək. İnkar əməlini isə aşağıdakı kimi verək.

IV_1 aksiomu üçün $\rceil A = 0$, IV_2 aksiomu üçün $\rceil A = 1$, IV_3 aksiomu üçün $\rceil A = A$.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, inkar əməlini məsələn, $\rceil A = A$ kimi təyin etdikdə mülahizələr hesabının IV_3 aksiomundan başqa bütün aksiomları ayrılmış düsturlardır, yəni eyniliklə 1-ə bərabərdir. Lakin IV_3 aksiomu $A = 0$, $B = 1$ olduqda 0-a bərabər qiymət alır. Deməli, o başqa aksiomlardan alına bilməz.

Bu isə IV_3 aksiomunun asılı olmadığını göstərir. Analoji olaraq IV qrup aksiomlardan qalan ikisinin də asılı olmadığını isbat etmək olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, mülahizələr hesabı aksiomlarının asılı olmadığını isbat edərkən biz mülahizələr cəbrindən fərqli olaraq, düsturlara daxil olan dəyişənlərə ikidən çox sayda qiymət verirdik, Məsələn, I_1 aksiomunun asılı olmadığını isbat edərkən aksiomlara daxil olan dəyişənlər 0, 1, 2, 3 qiymətləri alırdı. Burada biz yeni bir məntiq — çoxqiymətli məntiqlə rastlaşırıq.

§32. Mülahizələr hesabında həllolunma problemi

Mülahizələr cəbrində olduğu kimi milahizələr hesabında da həll olunma problemi qarşıya çıxır. Bu problem mülahizələr hesabında da müsbət həll olunur. Başqa sözlə mülahizələr hesabı həll olunan nəzəriyyədir. Bu o deməkdir ki, hesabın hər bir düsturunun bu hesabın teoremi olub-olmadığını müəyyən edən alqoritm vardır.

Mülahizələr hesabının hər bir veriliş düsturunun teorem olub-olmaması məsələsinin həlli isə onun mülahizələr cəbri düsturu kimi eyniliklə doğru olub-olmaması məsələsinin həllinə gətirilir.

Mülahizələr cəbrində bu problem müsbət həll edildiyindən, deməli, mülahizələr hesabında da müsbət həll edilir.

Lakin mülahizələr hesabının geniş mənada tamlığı problemini həll edərkən isbat etdiyimiz teorem bu hesabın hər bir isbat olunan α düsturu üçün məsələnin həlli alqoritmini verir. Bu alqoritm α düsturu üçün isbat sxemi qurmaqdan ibarətdir. Bu da bizə imkan verir ki, mülahizələr hesabında qarşıya qoyulmuş problemi mülahizələr cəbrinə müraciət etmədən birbaşa həll edək.

Məsələn, tutaq ki, $\alpha:(A\vee(A\Rightarrow B))\wedge(B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}))$ düsturu verilmişdir. α düsturunun isbat olunanlığı alqoritmini quraq. Bunun üçün bu fəslin §27-də göstərilmiş əlavə çıxarılış qaydalarından istifadə edək.

1^0. $A\vdash A\vee(A\Rightarrow B)$	$\vee$ daxil edilməsi qaydası
2^0. $\overline{A}\vee B\vdash A\Rightarrow B$	$\Rightarrow$ daxil edilməsi qaydası
3^0. $A\Rightarrow B\vdash A\vee(A\Rightarrow B)$	$\vee$ daxil edilməsi qaydası
4^0. $\overline{A}\vee B\vdash(A\Rightarrow B)$	2^0, 3^0-dən silloqizm qaydasına görə
5^0. $A\vee(\overline{A}\vee B)\vdash A\vee(A\Rightarrow B)$	1^0, 4^0-dən $\vee$ kənar edilməsi qaydasına görə
6^0. $B\vee(A\vee\overline{B})\vdash B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B})$	5^0-ə analoji olaraq
7^0. $A\vee(B\vee\overline{B})\vdash B\vee(A\vee\overline{B})$	2^0 və hipotezlərin yerinin dəyişdirilməsi qaydasına görə
8^0. $A\vee(B\vee\overline{B})\vdash B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B})$	7^0, 6^0-dan silloqizm qaydasına görə
9^0. $\vdash(A\vee\overline{A})\vee B$	$\vdash(A\vee\overline{A})$ teoremi və $\vee$ daxil edilməsi qaydasına görə
10^0. $\vdash A\vee(B\vee\overline{B})$	$\vdash(B\vee\overline{B})$ teoremi və $\vee$ daxil edilməsi qaydasına görə
11^0. $\vdash A\vee(A\Rightarrow B)$	2^0 və 9^0-a əsasən

$12^0.\ \vdash B\vee(\overline{A}\vee\overline{B})$ 2^0 və 10^0-a əsasən

$13^0.\ (A\vee(A\Rightarrow B))\wedge(B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}))$ $\Rightarrow$ və $\wedge$ daxil edilməsi qaydalarına görə

Deməli, $\vdash(A\vee(A\Rightarrow B))\wedge(B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}))$.

Qeyd edək ki, α düsturunun mülahizələr hesabının teoremi olmasını isbat etmək üçün qurulmuş bu alqoritm hesabın əlavə çıxarılış qaydalarına əsaslanır və göründüyü kimi praktik cəhətdən o qədər də əlverişli deyildir.

Ona görə də qarşıya qoyulmuş məsələni aşağıda göstərəcəyimiz kimi daha səmərəli üsulla həll etmək olar. Bunun üçün α düsturuna mülahizələr cəbri düsturu kimi ba-xaraq, onu asanlıqla konyunktiv normal formaya gətirmək olar:

$$\alpha:(A\vee(A\Rightarrow B))\wedge(B\vee(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}))\equiv(A\vee\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee B\vee\overline{B}).$$

Aldığımız axırıncı düsturda hər bir elementar dizyunksiyaya dəyişən öz inkarı ilə daxil olduğundan onlar doğru düsturlardır və ona görə də bütün konyunktiv normal forma mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düstur olacaq. Odur ki, mülahizələr hesabının tamlıq teoreminə əsasən α düsturu bu hesabın teoremidir.

§33. İstifadə olunan aksiomlar sxeminin başqa şəkildə ifadəsi

Mülahizələr hesabını aksiomatik qurarkən gördük ki, hesabın hər bir aksiomu sonsuz sayda doğru düsturları ifadə edir. Ona görə də hər bir aksioma sonsuz sayda doğru düsturları təcəssüm etdirən aksiomlar sxemi kimi baxmaq olar. Bu isə bizə eyni bir hesabı müxtəlif sayda aksiomlar sxemi vasitəsilə qurmağa imkan verir. Qeyd edək ki, eyni bir hesabı qurmaq üçün lazım olan aksiomlar sxemi dəyişdikdə həmin hesabda fəaliyyət göstərən çıxarılış qaydaları da dəyişir.

Lakin isbat etmək olar ki, aksiomlar sxemi dəyişdikdə hesabın isbat olunan düsturları sinfi dəyişmir. Yalnız gözləmək lazımdır ki, aksiomlar sisteminin tam olması tələbi ödənilsin.

İndi isə mülahizələr hesabının qurulması üçün istifadə olunan aksiomlar sxeminin müxtəlif şəkildə ifadəsinə baxaq.

I. Biz yuxarıda mülahizələr hesabının P.S.Novikovun 11 aksiomu, əvəzləmə və tamamlama kimi iki çıxarılış qaydası ilə verildiyini gördük.

II. Yalnız $\rceil$ və $\Rightarrow$ əməllərindən və tamamlama qaydasından istifadə etməklə mülahizələr hesabını aşağıdakı 3 aksiomlar sxemi vasitəsilə də vermək olar.

1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

3) $(\rceil B \Rightarrow \rceil A) \Rightarrow ((\rceil B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.

Hesabı bu cür qurduqda $\rceil(A \Rightarrow \rceil B)$, $\rceil A \Rightarrow B$ və $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ düsturlarını uyğun olaraq $A \wedge B$, $A \vee B$ və $A \Leftrightarrow B$ kimi işarə edəcəyik. Mülahizələr hesabının bu sxemlə qurulması E.Mendelsona məxsusdur.

III. Yeganə məntiq əməli $\Rightarrow$, aşağıdakı 3 aksaomlar sxemi və yeganə *modus ponens* qaydası.

Aksiomlar

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $((A \Rightarrow 0) \Rightarrow 0) \Rightarrow A$.

Burada sıfır hesabın əlifbasına daxil olan konstantdır. Hesabı belə aksiomatik qurarkən yenə də $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$ uyğun olaraq $A \Rightarrow 0$, $\rceil(A \Rightarrow \rceil B)$, $\rceil A \Rightarrow B$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$-nın qısa yazılışı kimi başa düşəcəyik. Mülahizələr hesabının bu cür qurulması Çerç tərəfindən verilmişdir.

IV. Məntiqi əlaqələr: $\rceil$, $\vee$.

Məntiq aksiomları:

1. $(A \vee B) \Rightarrow A$

2. $A \Rightarrow (A \vee B)$
3. $(A \vee B) \Rightarrow B$
4. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$.

Burada $A \Rightarrow B$ ilə $\rceil A \vee B$-nin qısa yazılışı işarə edilmişdir.

Yeganə çıxarılış qaydası *modus ponens*-dir.

Mülahizələr hesabının bu sxemlə qurulması Hilbert və Akkermana məxsusdur.

V. Məntiqi əlaqələr: $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow$.

Məntiq aksiomları:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
4. $(A \wedge B) \Rightarrow B$
5. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
6. $A \Rightarrow (A \vee B)$
7. $B \Rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
9. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \rceil B) \Rightarrow \rceil A)$
10. $\rceil\rceil A \Rightarrow A$.

Yeganə çıxarılış qaydası *modus ponens*-dir. Hesabın belə qurulması Klini tərəfindən təklif edilmişdir.

IV FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. Aşağıdakı sözlərdən hansılar mülahizələr hesabının düsturudur

$a)\ (A(\wedge \urcorner C) \vee \wedge$; $\qquad b)\ ((A \vee B) \vee (\urcorner A))$;

$c)\ (A \vee \urcorner B)$; $\qquad d)\ \wedge (A \urcorner) \Rightarrow B$;

$e)\ ((A \wedge B) \Rightarrow (\urcorner B))$; $\qquad f)\ (A \vee B) \wedge C$

$g)\ (((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (\urcorner A))$; $\qquad h)\ ((2 \Rightarrow 3 \wedge 5)$?

2. Mülahizələr hesabının aşağıdakı sözlərinin hər birinin uzunluğunu və ranqını tapın:

$a)\ ((A \Rightarrow B) \wedge C \wedge \urcorner A$; $\qquad b)\ (A \Rightarrow \urcorner A((A \wedge B)) \vee$;

$c)\ A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n$; $\qquad d)\ (((((A \wedge B)))))$;

$e)\ \bigvee_{n=1}^{s} A_n$; $\qquad f)\ \urcorner B) \urcorner \vee \Rightarrow B) \vee A($.

3. Aşağıdakı düsturlardan mötərizələri mümkün qədər kənar edin və onu standart şəklə gətirin:

$a)\ ((((\urcorner A) \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow C)$;

$b)\ ((\urcorner A \wedge B)) \Rightarrow (\urcorner A))$;

$c)\ ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \vee ((\urcorner A) \wedge (\urcorner B)))$;

$d)\ (((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\urcorner A)) \Rightarrow (\urcorner B))$.

4. Aşağıdakı sözlərdə mötərizələri elə düzün ki, onlar mülahizələr hesabının düsturlarına çevrilsin.

$a)\ \urcorner A \vee B \wedge C \wedge \urcorner B \Rightarrow C \wedge A$;

$b)\ A \Rightarrow \urcorner B \vee C \wedge A \Rightarrow \urcorner A$;

$c)\ A \vee B \wedge \urcorner C \vee B \Rightarrow \urcorner A \Rightarrow \urcorner B$;

$d)\ A \Rightarrow B \Rightarrow \urcorner A \Rightarrow \urcorner B \Rightarrow C$.

Məsələlərin həlli birqiymətlidirmi?

5. Fərz edək ki, mülahizələr hesabının α düsturu verilmişdir.

$$\alpha : (A \wedge B) \Rightarrow ((\overline{B} \vee C) \Rightarrow \overline{A})$$

$$S_A^{A \Rightarrow (B \wedge C)}(\alpha),\ S_B^{B \Rightarrow (A \wedge C)}(\alpha),\ S_C^{C \Rightarrow (A \wedge B)}(\alpha)$$

düsturlarını qurun. Göstərin ki,

$$S_B^{B \Rightarrow (A \wedge C)}(\ S_A^{A \Rightarrow (B \wedge C)}(\alpha))$$

və

$$S_{A,B,C}^{A\Rightarrow(B\wedge C),B\Rightarrow(A\wedge C),C\Rightarrow(A\wedge B)}(\alpha)$$

düsturları üst-üstə duşür.

6. İsbat edin ki, α_1, α_2 və β-mülahizələr hesabının istənilən düsturları olduqda,

$a)$ $S_A^{\beta}(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ və $S_A^{\beta}(\alpha_1)\wedge S_A^{\beta}(\alpha_2)$

$b)$ $S_A^{\beta}(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ və $S_A^{\beta}(\alpha_1)\vee S_A^{\beta}(\alpha_2)$

$c)$ $S_A^{\beta}(\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2)$ və $S_A^{\beta}(\alpha_1)\Rightarrow S_A^{\beta}(\alpha_2)$

$d)$ $S_A^{\beta}(\urcorner\, \alpha_1)$ və $\urcorner\, S_A^{\beta}(\alpha_1)$

düsturları üst-üstə düşur.

7. İsbat edin ki, $A_1, A_2,..., A_n$ dəyişənlərindən asılı α düsturu mülahizələr hesabının teoremi, $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ isə ixtiyarı düsturlardırsa, onda $S_{A_1,A_2,...,A_n}^{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n}(\alpha)$ hesabın teoremidir.

8. İsbat edin ki, α və β mülahizələr hesabının ixtiyari düsturları olduqda

$$(\alpha \Rightarrow \beta)\Rightarrow(\alpha \Rightarrow \alpha)$$

həmin hesabın teoremidir.

9. α və β mülahizələr hesabının ixtiyari düsturları olduqda $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta \wedge \alpha$ düsturunun həmin hesabda teorem olduğunu göstərin.

10. Mülahizələr hesabında fəaliyyət göstərən *modus ponens* qaydasının ümumiləşməsi olan aşağıdakı təklifin doğruluğunu isbat edin:

Əgər $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}$ və $\alpha_1 \Rightarrow(\alpha_2 \Rightarrow(\cdots(\alpha_{n-1}\Rightarrow\alpha_n)\cdots))$

teoremidirsə, onda α_n də həmin hesabda teoremidir.

11. α,β,γ və δ mülahizələr hesabının ixtiyari düsturları olduqda aşağıdakı teoremlərin isbatı sxemlərini qurun.

$a)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \neg\beta}{\beta \Rightarrow \neg\alpha}$; $\quad b)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)}$; $\quad c)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma}{(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma}$;

$d)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$; $\quad e)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)}{\alpha \Rightarrow (\neg\gamma \Rightarrow \neg\beta)}$; $\quad f)\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \gamma \Rightarrow \delta}{(\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)}$.

12. α, β, γ və δ mülahizələr hesabının düsturları olduqda aşağıdakı çıxarılışları isbat edin.

$a)\ \alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$;

$b)\ \neg\alpha \vee \beta,\ \gamma \Rightarrow \neg\beta \vdash \alpha \Rightarrow \neg\gamma$;

$c)\ \alpha \vee \beta,\ \alpha \Rightarrow \gamma,\ \beta \Rightarrow \delta \vdash \gamma \vee \delta$;

$d)\ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma),\ \neg\delta \vee \alpha,\ \beta \vdash \delta \Rightarrow \gamma$;

$e)\ \alpha \Rightarrow \neg\beta \vdash \neg\alpha$;

$f)\ \alpha \Rightarrow \beta,\ \alpha \Rightarrow \neg\beta \vdash \neg\alpha$.

13. §27-də verilmiş I—XII əlavə çıxarılış qaydalarını isbat edin.

14. Fərz edək ki, Ω-hipotezlərin hər hansı sonlu çoxluğu, α və β isə mülahizələr hesabının düsturlarıdır. İsbat edin ki,

1) $\Omega \vdash \alpha$ olarsa, onda $\Omega, \beta \vdash \alpha$ (hipotezin daxil edilməsi) ,

2) $\Omega, \alpha \vdash \beta$ və $\Omega \vdash \alpha$ olarsa, onda $\Omega \vdash \beta$ (hipo-tezin kənar edilməsi) ,

3) $\Omega, \alpha \vdash \alpha$ (hipotezlərin təkrar edilməsi).

15. Konyunksiya daxiletmə qaydası adlanan çıxarılışı isbat edin:

$$\Omega, \alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$$

(burada Ω-hipotezlərin hər hansı sonlu çoxluğu, α və β mülahizələr hesabının düsturlarıdır).

16. Ω-hpaotezlərin hər hansı sonlu çoxluğu, α və β isə mülahizələr hesabının düsturları olduqda $\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ və $\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \beta$ (konyunksiyanın kənar edilməsi) olduğunu isbat edin.

17. Dizyunksiyanın daxil edilməsi və dizyunksiyanın kənar edilməsi qaydası adlanan aşağıdakı çıxarılışları isbat edin.

a) $\Omega,\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ və $\Omega,\beta \vdash \alpha \vee \beta$;

b) $\Omega,\alpha \vdash \gamma$ və $\Omega,\beta \vdash \gamma$ olarsa, onda $\Omega,\alpha \vee \beta \vdash \gamma$ (burada Ω- hipotezlərin hər hansı sonlu çoxluğu α,β,γ isə mülahizələr hesabının düsturlarıdır).

18. Fərz edək ki, Ω-hipotezlərin hər hansı sonlu çoxluğu, α və β isə mülahizələr hesabının düsturlarıdır. Aşağıdakı çıxarılışlar üçün isbat sxemi qurun.

1) $\Omega,\alpha \vdash \beta$ və $\Omega,\alpha \vdash \overline{\beta}$ isə onda $\Omega \vdash \overline{\alpha}$ (inkarı daxiletmə qaydası).

2) $\Omega,\overline{\overline{\alpha}} \vdash \alpha$ (inkarı kənaretmə qaydası).

19. Deduksiya teoremindən istifadə edərək

$$\vdash \alpha \Rightarrow (\rceil \alpha \Rightarrow \rceil(\alpha \Rightarrow \beta))$$

olduğunu isbat edin (burada α və β mülahizələr hesabının ixtiyari düsturlarıdır).

20. α və β mülahizələr hesabının ixtiyari düsturları olduqda $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$ düsturunun hesabın teoremi olduğunu göstərin.

21. İsbat edin ki, istənilən α,β,γ və δ düsturları üçün

a) $((\rceil\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow \gamma$;

b) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\rceil\alpha \Rightarrow \rceil\beta) \Rightarrow \gamma)$

düsturları mülahizələr cəbrində eyniliklə doğru düstur və deməli mülahizələr hesabının teoremidir.

22. P.S.Novikovun 11 aksiomu əsasında qurulmuş mülahizələr hesabının I_2, II_3, III_2 və IV_1 aksiomlarının asılı olmadığını isbat edin.

23. Mülahizələr hesabının Çerç tərəfindən verilmiş aksiomlarinin asılı olmadığını isbat edin.

24. Mülahizələr hesabının Hilbert və Akkerman tərəfindən verilmiş aksiomlar sisteminin asılı olmadığını isbat edin.

25. Mülahizələr hesabının Klini tərəfindən verilmiş aksiomlar sisteminin asılı olmadığını isbat edin.

Hilbert - Akkerman tərəfindən verilmiş aksiomlar sxemi vasitəsilə qurulmuş hesabı H nəzəriyyəsi adlandıraq.

26. H nəzəriyyəsinin aşağıdakı teoremlərini isbat edin:

$a) \vdash A \Rightarrow \neg\neg A$;

$b) \vdash \neg B \Rightarrow (\neg B \vee C)$;

$c) \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

$d) \vdash A \vee \neg A$.

27. H nəzəriyyəsində aşağıdakı çıxarışların doğruluğunu göstərin:

$a)\ A \Rightarrow B \vdash (C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)$;

$b)\ C \Rightarrow A,\ A \Rightarrow B \vdash C \Rightarrow B$;

$c)\ B \Rightarrow A,\ \neg B \Rightarrow A \vdash A$;

$d)\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C$.

28. E.Mendelson aksiomları sxemi ilə qurulmuş mülahizələr hesabı aksiomlarının asılı olmadığını isbat edin.

Mülahizələr hesabının E.Mendelson tərəfindən verilmiş aksiomlar sxemi ilə qurulmuş hesabı M nəzəriyyəsi adlandıraq.

29. M nəzəriyyəsində aşağıdakı teoremləri isbat edin:

$a) \vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$;

$b) \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;

$c) \vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$;

$d) \vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

30. M nəzəriyyəsində aşağıdakı çıxarışları göstərin:

$a)\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$;

$b)\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

$c)$ $A \Rightarrow B$, $\rceil A \Rightarrow B \vdash B$;
$d)$ $A, B \vdash A \wedge B$.

V FƏSİL.

PREDİKATLAR CƏBRİ.

§34. Predikatlar və onlar üzərində məntiq əməlləri

Bütün natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş «x ədədinin sadə ədəd olması» xassəsini nəzərdən keçirək. Bu xassəni $P(x)$-lə işarə edək. Hər bir verilmiş $x \in N$ ədədi ya P xassəsinə malik olar, ya da bu xassəyə malik olmaz. Başqa sözlə ya $P(x) = D$ və ya $P(x) = Y$ olar. Misal üçün $P(7) = D$, $P(10) = Y$. Beləliklə, P xassəsi bütün natural ədədlər çoxluğunu iki sinfə ayırır. Bu siniflərin birinə daxil olan bütün ədədlər P xassəsini ödəyər, digəri isə bu xassəni ödəməz. Göründüyü kimi, bu mülahizə forması

$$N \xrightarrow{P} \{D, Y\}$$

inikasını və ya

$$x \to P(x); \ x \in N, \ P(x) \in \{D, Y\}$$

funksiyasını təyin edir. Bu funksiya bütün natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuşdur və $B = \{D, Y\}$ çoxluğunun elementlərindən ibarət qiymətlər alır. Belə funksiya bir predmet dəyişənli məntiq funksiyası və ya biryerli predikat adlanır. N çoxluğunun P predikatını doğru mülahizəyə çevrən altçoxluğuna predikatın doğruluq oblastı deyirlər. $P(x)$ predikatının doğruluq oblastı $\{x / P(x)\}$ kimi işarə edilir.

İndi $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ çoxluqları götürək və $A \times B$ Dekart hasilində $P(x, y)$ binar münasibətini belə təyin edək.

Əgər $x \in A$ elementi $y \in B$-ni bölürsə, onda $P(x,y) = D$ və əgər x, y-i bölmürsə, onda $P(x, y) = Y$.

Beləliklə, $A \times B \xrightarrow{P} \{D, Y\}$ inikasını və ya

$$(x,y) \to P(x,y);\ (x,y) \in A \times B,\ P(x,y) \in \{D,\ Y\}$$

funksiyasını alırıq. Belə inikasa ikiyerli predikat və ya iki predmet dəyişənli məntiq funksiyası deyilir.

$P(x,y)$-in təyin edilməsindən aydın olur ki, onun doğruluq oblastı elə (x,y) cütlərindən ibarətdir ki, $(x,y) \in A \times B$ və x bölür y-i, yəni

$$\{(x,y)/P(x,y)\} = \{(1,\ 3);\ (1,\ 4);\ (1,\ 5);\ (2,\ 4)\}$$

çoxluğundan ibarətdir.

Xüsusi halda əgər $B = A$ olarsa, onda $A \times A = A^2$ Dekart hasilində təyin olunmuş ikiyerli predikatdan danışmaq olar.

Nəhayət, Z tam ədədlər çoxluğunun Z^3 Dekart qüvvətində üçyerli $P(x,y,z)$ münasibətini belə təyin edək: $(a,b,c) \in Z^3$ üçlüyü üçün $c = a + b$ olduqda $P(a,b,c) = D$, əks halda isə $P(a,b,c) = Y$.

Belə təyin edilmiş münasibət üçün, məsələn, $P(2,3,5) = D$, $P(4,-3,5) = Y$ və s.

Bu qayda ilə $Z^3 \xrightarrow{P} \{D,\ Y\}$ inikasını və ya $(x,y,z) \to P(x,y,z)$; $(x,y,z) \in Z^3$, $P(x,y,z) \in \{D,\ Y\}$ funksiyasını alırıq. Bu inikas üçyerli predikat və ya üç predmet dəyişənli məntiq funksiyası adlanır.

İndi isə n-yerli predikata tərif verək.

Tərif. M çoxluğunun $n > 0$ dərəcədən Dekart hasilinin $B = \{D, Y\}$ ikielementli çoxluğa birqiymətli inikasına M çoxluğunda təyin olunmuş n-yerli predikat və ya n predmet dəyişənli məntiq funksiyası deyilir və $M^n \xrightarrow{P} B$ yaxud

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to P(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n,$$
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{D,\ Y\}$$

kimi yazılır.

Misal. Q rasional ədədlər çoxluğu və a_i $(i=\overline{1,n})$, $b \in Q$ olduqda

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

şəklində xətti tənlik n predmet dəyişənli məntiq funksiyası və ya n-yerli predikatdır.

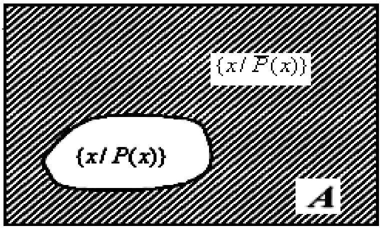
Yuxarıda gördük ki, predikatlar da mülahizələr kimi ancaq D və Y qiymətlərini alırlar. Bu isə imkan verir ki, mülahizələr üzərində təyin edilmiş məntiq əməllərini predikatlar üçün də ümumiləşdirək. Bu əməlləri biryerli predikatlar üzərində aparaq. Çoxyerli predikatlar üçün proses analojidir.

Tutaq ki, hər hansı A çoxluğunda $P(x)$ və $Q(x)$ predikatları təyin olunmuşdur. Onda bu çoxluqda

$$\overline{P}(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \vee Q(x),$$
$$P(x) \Rightarrow Q(x),\ P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

kimi yeni predikatlar təyin etmək olar.

1. $\overline{P}(x)$ predikatı ancaq və ancaq elə $x \in A$ elementləri üçün doğru mülahizəyə çevriləcək ki, həmin x-lər üçün $P(x)$ yalandır. Başqa sözlə, $\overline{P}(x)$ predikatının doğruluq oblastı $P(x)$ predikatının doğruluq oblastı olan $\{x / P(x)\}$ çoxluğunun A çoxluğuna tamamlayıcısından ibarət olacaqdır:



Шякил 3.

$$\{x / \overline{P}(x)\} = \overline{\{x / P(x)\}}\ .$$

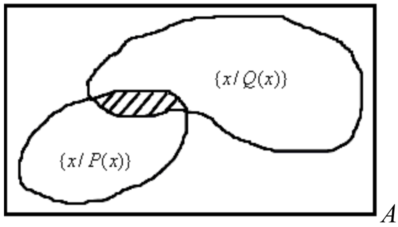
Bu həndəsi olaraq şəkil 3-dəki ştrixlənmiş sahəni ifadə edir.

2. $P(x) \wedge Q(x)$ predikatı ancaq və ancaq elə $x \in A$

elementləri üçün doğru mülahizəyə çevrilir ki, həmin x-lər uçün həm $P(x)$ və həm də $Q(x)$ doğru olsun.

Başqa sözlə $P(x) \wedge Q(x)$-in doğruluq oblastı $P(x)$-lə $Q(x)$-in doğruluq oblastlarının kəsişməsindən ibarətdir (şəkil 4).

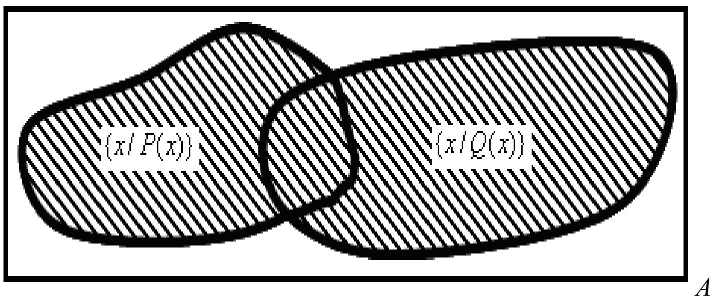
$$\{x / P(x) \wedge Q(x)\} =$$
$$= \{x / P(x)\} \bigcap \{x / Q(x)\}$$



Шякил 4.

3. $P(x) \vee Q(x)$ predikatı ancaq və ancaq elə x-lər üçün doğru mülahizəyə çevrilir ki, həmin x-lər üçün $P(x)$ və $Q(x)$ predikatlarından heç olmazsa biri doğru olsun. Yəni $P(x) \vee Q(x)$ predikatının doğruluq oblastı $P(x)$ və $Q(x)$-in doğruluq oblastlarının birləşməsindən ibarət olacaq (şəkil 5).

$$\{x / P(x) \vee Q(x)\} = \{x / P(x)\} \bigcup \{x / Q(x)\}$$



Шякил 5.

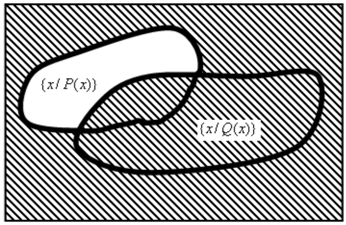
4. $P(x) \Rightarrow Q(x)$ predikatı ancaq və ancaq elə $x \in A$ qiymətlərində yalan mülahizəyə çevrilir ki, həmin x-lər üçün $P(x)$ doğru mülahizəyə, $Q(x)$ isə yalan mülahizəyə çevrilsin. Mülahizələr məntiqi cəbrində olduğu kimi

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

eynigüclülüyündən istifadə edək. Ona görə də

$$\{x/(P(x) \Rightarrow Q(x))\} = \{x/(\overline{P}(x) \vee Q(x))\} =$$
$$= \overline{\{x/P(x)\}} \cup \{x/Q(x)\}$$

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ predikatının doğruluq oblastı şəkil 6-da ştrixlənmiş sahədir.

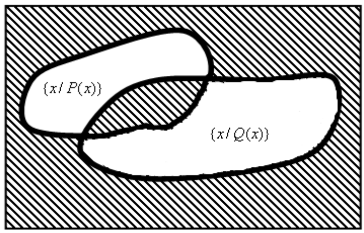


Шякил 6.

5. $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ predikatı ancaq və ancaq elə $x \in A$ elementləri üçün doğru mülahizəyə çevrilir ki, həmin x-lər üçün $P(x)$ və $Q(x)$ eyni doğruluq qiymətləri alsın.

Yenə də

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x) \equiv$$
$$\equiv (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))$$



eynigüclülüyündən istifadə etsək,

$$\{x/(P(x) \Leftrightarrow Q(x))\} =$$
$$= \{x/(P(x) \Rightarrow Q(x))\} \cap$$
$$\cap \{x/(Q(x) \Rightarrow P(x))\} =$$
$$= (\{x/\overline{P}(x)\} \cup \{x/Q(x)\}) \cap (\{x/\overline{Q}(x)\} \cup \{x/P(x)\}).$$

$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$-in doğruluq oblastı 7-ci şəkildə ştrixlənmiş sahədir.

§35. Ümumilik və varlıq kvantorları

Mülahizələr məntiqi əməlləri, predikatı yenə də predikata çevirir. İndi elə əməllərə baxaq ki, predikatı mülahizəyə çevirsin. Belə əməllərdən biri dəyişənlərin onların qiymətləri ilə əvəz olunmasıdır. Əgər $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatında $x_1, x_2,...,x_n$ predmet dəyişənlərini onun təyin olunduğu çoxluqdan götürülmüş hər hansı $a_1,a_2,...,a_n$ qiymətləri ilə əvəz etsək, $P(a_1,a_2,...,a_n)$ mülahizəsini alarıq ki, bu da $(a_1,a_2,...,a_n)$ kompleksinin verilməsindən asılı olaraq D və Y qiymətlərini ala bilər.

Yuxarıdakı əməllə yanaşı predikatlar məntiqində ümumilik və varlıq kvantorları deyilən daha iki əməl təyin etmək olar ki, onların da köməyilə predikatı başqa bir predikata və yaxud mülahizəyə çevirə bilərik. Qeyd edək ki, bu əməllər uyğun olaraq konyunksiya və dizyunksiya əməllərinin ümumiləşməsidir.

Fərz edək ki, A çoxluğunda hər hansı $P(x)$ predikatı təyin edilmişdir. Ola bilər ki, A çoxluğunun bütün elementləri P xassəsinə malik olsunlar, ya da ola bilər ki, A çoxluğunun bəzi elementləri üçün P xassəsi ödənilsin.

Birinci halda «istənilən $x \in A$ üçün P xassəsi ödənilir» mülahizəsi ikinci halda isə «elə $x \in A$ var ki, P xassəsi ödənilir» mülahizəsi doğrudur. «Bütün x-lər üçün», «istənilən x üçün», «ixtiyari x üçün» ifadələri ümumilik kvantoru adlanır və $\forall x$ kimi işarə edilir.

«Elə x var ki», «bəzi x-lər üçün» ifadələri varlıq kvantoru adlanır və $\exists x$ kimi işarə edilir.

Biryerli predikatlarda olduğu kimi çoxyerli predikatı da mülahizəyə çevirmək üçün bütün predmet dəyişənlərinin kvantorlarla əlaqələndirilməsi zəruridir.

Tutaq ki, x, y həqiqi qiymətlər alan dəyişənlər, P isə həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş «kiçikdir» bi-nar münasibətdir. Ona görə də x, y dəyişənlərini kvantor-larla əlaqələndirərək, $x < y$ predikatından aşağıdakı kimi 8 dənə mülahizə alarıq.

1^0. $(\forall x)(\forall y)(x < y)$ - istənilən x və istənilən y

üçün $x < y$.

2⁰. $(\forall y)(\forall x)(x < y)$ - istənilən y və istənilən x üçün $x < y$.

3⁰. $(\exists x)(\exists y)(x < y)$ - elə x və elə y var ki, $x < y$.

4⁰. $(\exists y)(\exists x)(x < y)$ - elə y və elə x var ki, $x < y$.

5⁰. $(\forall x)(\exists y)(x < y)$ - istənilən x üçün elə y var ki, $x < y$.

6⁰. $(\exists y)(\forall x)(x < y)$ - elə y var ki, istənilən x üçün $x < y$.

7⁰. $(\exists x)(\forall y)(x < y)$ - elə x var ki, istənilən y üçün $x < y$.

8⁰. $(\forall y)(\exists x)(x < y)$ - istənilən y üçün elə x var ki, $x < y$.

Asanlıqla görmək olar ki, 1 və 2 mülahizələri yalan mülahizə olmaqla eyni məna ifadə edir, habelə 3 və 4 mülahizələri də eyni olmaqla doğru mülahizələrdir.

Eləcə də 5 və 7 mülahizələri doğru olmaqla həqiqi ədədlər çoxluğunun aşağıdan və yuxarıdan məhdud olmadığını göstərir. 6 və 8 mülahizələri isə yalan mülahizələrdir, həm də bunların biri digərindən kvantorların yerini dəyişməklə alınır. Əgər ikiyerli $P(x,\ y)$ predikatını yalnız bir dəyişənə görə kvantorla əlaqələndirsək, onda mülahizə deyil, digər dəyişəndən asılı biryerli predikat alınar.

Ümumiyyətlə, əgər n yerli predikatda k sayda $(k \le n)$ dəyişəni kvantorlarla əlaqələndirsək, onda $n-k$ sayda dəyişəndən asılı yeni predikat alarıq. Xüsusi halda $n = k$ olarsa, sıfır yerli predikat, yəni mülahizə alınar.

§36. Predikatlar məntiqi düsturları.

Dəyişənlərin sərbəst və əlaqəli daxil olması

Hər şeydən əvvəl, predikatlar məntiqində düstur anlayışı verək. Mülahizələr cəbrində olduğu kimi predikatlar cəbrində də düsturun tərifi induktiv verilə bilər.

Tərif. 1) Bütün mülahizələr cəbri düsturları və predikatlar düsturlardır.

2) Əgər α və β predikatlar cəbri düsturlarıdırsa, onda

$$(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta), (\alpha \Leftrightarrow \beta)$$

predikatlar cəbri düsturlarıdır.

3) Əgər α predikatlar cəbri düsturudur və x dəyişənini özündə saxlayırsa, onda $(\forall x)\alpha$ və $(\exists x)\alpha$ predikatlar cəbri düsturudur.

4) Ancaq və ancaq o obyektlər predikatlar cəbri düsturlarıdır ki, onlar 1) — 3) şərtlərilə təyin edilir.

Predikatlar cəbri düsturlarına aid misallar göstərək.

Misal 1. $P(x)$ istənilən biryerli predikat, A isə mülahizə olsun. Düsturun tərifinin 1) bəndinə görə $P(x)$ və A predikatlar cəbri düsturudur. 2) və 3) bəndinə əsasən deyə bilərik ki, $(P(x) \wedge A)$, $(\forall x)(P(x) \wedge A)$ predikatlar cəbri düsturlarıdır.

Misal 2. $(\exists x)(F(x) \Rightarrow (\forall y)G(y,z))$ ifadəsi predikatlar məntiqi düsturudur.

Həqiqətən, $F(x)$ və $G(y, z)$ uyğun olaraq biryerli və ikiyerli predikatlardır, ona görə də 1) şərtinə görə düsturlardır. $(\forall y)G(y,z)$ ifadəsi 3) şərtinə görə düsturdur, eləcə də $(F(x) \Rightarrow (\forall y)G(y,z))$ 2) şərtinə görə düsturdur və nəhayət, $(\exists x)(F(x) \Rightarrow (\forall y)G(y,z))$ ifadəsi yenə də 3) şərtinə görə predikatlar cəbri düsturudur.

İndi isə dəyişənin düstura əlaqəli və sərbəst daxil olmalarını öyrənək.

Tərif. Kvantor tətbiq edilmiş dəyişənə əlaqəli dəyişən, kvantordan azad dəyişənə isə sərbəst dəyişən deyilir.

Misal üçün, $(\exists x)Q(x,\, y)$ düsturunda x əlaqəli dəyişən, y isə sərbəst dəyişəndir. Bu düstur y sərbəst dəyişənindən asılı məntiq funksiyasıdır.

Riyazi analiz kursundan bildiyimiz

$J(y)=\int\limits_0^y x^2 y\,dx$ inteqralını və $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ cəmini

nəzərdən keçirək. Burada inteqral operatoru x dəyişəninə tətbiq edilmişdir, y dəyişəni isə verilmiş düstura sərbəst daxildir. Eləcə də $S(x)$ cəmində $\sum$ operatoru n dəyi-şəninə tətbiq edilmişdir, x dəyişəni isə sərbəstdir. Buna ox-şar olaraq «elə ən kiçik y ədədi var ki, $y=x$» mülahizə formasını $P(x)$-lə işarə etsək, onda $P(x)=(\exists\, y)Q(x,\, y)$ düsturunda y dəyişəni $\exists$ operatorunun təsiri altında yerləşir, yəni varlıq kvantoru ilə əlaqələndirilib, x isə sərbəstdir.

Qeyd edək ki, hər hansı dəyişən eyni bir düstura həm sərbəst, həm də əlaqəli daxil ola bilər.

Məsələn, $F(x,\, y)\Rightarrow(\exists\, y)G(y)$ düsturunda y-in düstura birinci daxil olması sərbəst, ikinci daxil olması isə əlaqəlidir.

Bir də onu qeyd edək ki, hər hansı dəyişən verilmiş düsturun özünə əlaqəli daxil olduğu halda onun müəyyən alt düsturuna sərbəst daxil ola bilər. Məsələn, y dəyişəni

$$(\forall\, y)(F(x,y)\Rightarrow(\forall\, x)R(x))$$

düsturuna əlaqəli daxil olduğu halda onun

$$F(x,y)\Rightarrow(\forall\, x)R(x)$$

alt düsturuna sərbəst daxildir.

İndi aşağıdakı predikat cəbri düsturuna baxaq:

$$((\forall\, x)(P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z))\Rightarrow((\exists\, y)R(x,y))\vee Q(x,\, y)).$$

Burada $(\exists x)Q(x, z)$ altdüsturunda x dəyşəni $\exists$ kvantoru ilə əlaqələndirilib. Ona görə də $\forall$ kvantoru ilə əlaqələndirilmiş

$$(P(x) \wedge (\exists x)Q(x, z)) \Rightarrow ((\exists y)R(x, y) \vee Q(x, y))$$

altdüsturunda x sərbəst dəyişən olmayacaqdır. Bu axırıncı altdüsturu $(\forall x)$ kvantorunun təsir oblastı adlandıracağıq.

Qeyd edək ki, §35-də haqqında danışdığımız əvəzetmə əməli yalnız sərbəst dəyişənə tətbiq edilir. Bundan başqa əgər n-yerli predikat iştirak edən predikatlar cəbri düsturunda k $(k \le n)$ sayda dəyişən kvantorlarla əlaqələndirilmişsə, onda $n-k$ sayda sərbəst dəyişəndən asılı məntiq düsturu alınar. Əgər $n=k$ olarsa, onda verilmiş düsturda bütün dəyişənlər kvantorlarla əlaqələnmiş olur və o, mülahizəyə çevrilir. Belə düsturları qapalı düsturlar adlandıracağıq.

§37. Dəyişənlərin verilmiş qiymətlərinə görə düsturların doğruluq qiymətlərinin hesablanması

İkiyerli $P(x,y)$ predikatı götürək və $A=\{1,2,3,4\}$ çoxluğunun Dekart kvadratında onu aşağıdakı münasibət şəklində təyin edək:

$$P(x,y) = D \Leftrightarrow x < y\ .$$

$P(x,y)$ predikatında x-i $\exists$ kvantoru ilə əlaqələndirsək, onda y sərbəst dəyişənindən asılı

$$\alpha(y) = (\exists x)P(x,y)$$

predikat düsturunu alarıq. Bu düstura uyğun məntiq funksiyası aşağıdakı doğruluq cədvəli ilə verilə bilər.

y	$(\exists x)(x<y)$
1	Y
2	D

3	D
4	D

Cədvəldən görünür ki, $\alpha(y)$ düsturu $y=1$ qiymətindən başqa bütün y-lər üçün D-ə bərabər qiymət alır.

Yuxarıdakı misaldan fərqli olaraq, dəyişənlərdən heç biri kvantorlarla əlaqələndirilməmişdirsə, onda ikiyerli predikat ikidəyişənli məntiq funksiyası təyin edəcəkdir.

Məsələn, $E=\{2,3,4,5,6\}$ çoxluğunun Dekart hasilində təyin edilmiş $P(x,y)$-«x bölür y-i» predikatının doğruluq qiymətlərini aşağıdakı cədvəllə hesablayaq.

$\frac{x}{y}$	2	3	4	5	6
2	D	Y	D	Y	D
3	Y	D	Y	Y	D
4	Y	Y	D	Y	Y
5	Y	Y	Y	D	Y
6	Y	Y	Y	Y	D

Buradan aydın olur ki, yuxarıdakı kimi təyin edilmiş $P(x,y)$ predikatı E çoxluğunun Dekart kvadratını $B=\{D,Y\}$ kimi ikielementli çoxluğa çevirir.

İndi isə qarşıya qoyulmuş məsələnin ümumi şəkildə həllini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, predikatlar məntiqi cəbrinin hər hansı α düsturu verilmişdir.

α düsturunun doğruluq qiymətlərinin tapılması qaydasını aşkar etmək üçün boş olmayan elə bir E çoxluğunun verildiyini fərz edək ki, düstura daxil olan dəyişənlər həmin bu çoxluğun elementlərinə bərabər qiymətlər ala bilsin. Sonra, düstura daxil olan hər bir predikata E çoxluğunda təyin olunmuş, qiymətləri isə $B=\{D,Y\}$ çoxluğundan ibarət olan bir λ məntiq funksiyasını qarşı qoyaq.

Nəhayət, α düsturuna daxil olan hər bir sərbəst dəyişəni E çoxluğunun elementləri ilə əvəz edək.

Məhz bu göstərişlər predikatlar cəbrinin α düsturunun doğruluq qiymətlərinin hesablanması üsulunu müəyyən edəcəkdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, predikatlar məntiqi düsturunun düzəldilməsi qaydasına analoji olaraq düsturun doğruluq qiymətlərinin hesablanması üsulu da induktiv təyin edilir və aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir.

1) $P(y_1, y_2,..., y_n)$ α düsturuna daxil olan kvantorlarla əlaqələndirilməmiş sadə düsturdursa, onda $y_1, y_2,..., y_n$ dəyişənlərinə E çoxluğunun elementlərinə bərabər qiymətlər verməli. $P(y_1, y_2,..., y_n)$ sadə düsturu kvantorla əlaqaləndirildikdə isə ona qiyməti y_i dəyişənlərini E çoxluğunun d_i elementləri ilə əvəz etdikdə $P(y_1, y_2,..., y_n)$ predikatının aldığı qiymətlə üst-üstə düşən λ məntiq funksiyasını qarşı qoymalı.

2) Predikatların və sərbəst dəyişənlərin hər hansı qeyd olunmuş qiymətlərində α düsturu D qiymət alarsa, $\overline{\alpha}$ düsturu Y hesab edilir.

Eləcə də $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ düsturlarının doğruluq qiymətləri onların mülahizələr cəbrindəki doğruluq cədvəllərinə əsasən hesablanır.

3) Predikatların və sərbəst dəyişənlərin hər hansı verilmiş qiymətlərində α düsturu x-in istənilən qiymətləri üçün D qiymət alarsa, $(\forall x)\alpha$ düsturu doğru və α düsturu x-in heç olmazsa bir qiymətində Y olarsa, onda $(\forall x)\alpha$ düsturu yalan hesab edilir. Eləcə də sərbəst predmet dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətləri üçün α düsturu x-in heç olmasa bir qiymətində D olarsa, $(\exists x)\alpha$ düsturu doğru və α düsturu x-in heç bir qiymətində D-yə bərabər qiymət al-

mazsa, onda $(\exists x)\alpha$ düsturu yalan olur.

Məsələn, tutaq ki, $E=\{a, b\}$ və α düsturu isə

$$\alpha:(\forall x)((P(x)\Rightarrow Q)\vee(Q\wedge P(y))$$

kimi verilmişdir.

Yuxarıda deyildiyi kimi $P(x)$ biryerli predikatına $E=$ $=\{a, b\}$ çoxluğunda təyin edilmiş, qiymətlər oblastı $\{D, Y\}$ olan $\lambda(x)$ məntiq funksiyasını qarşı qoyaq. Q isə mülahizələr cəbrində olduğu kimi D və Y qiymətlərindən birini alacaqdır. y sərbəst dəyişən olduğundan ona $E=\{a, b\}$ çoxluğunun elementlərindən ibarət qiymətlər verəcəyik. $P(x)$ sadə düsturuna uyğun $\lambda(x)$ məntiq funksiyasını aşağıdakı cədvəllə təyin edək:

$x/\lambda(x)$	a	b
$\lambda_1(x)$	$\lambda_1(a)=D$	$\lambda_1(b)=D$
$\lambda_2(x)$	$\lambda_2(a)=D$	$\lambda_2(b)=Y$
$\lambda_3(x)$	$\lambda_3(a)=Y$	$\lambda_3(b)=D$
$\lambda_4(x)$	$\lambda_4(a)=Y$	$\lambda_4(b)=Y$

Buna uyğun olaraq α düsturunun bütün mümkün olan doğruluq qiymətlərini aşağıdakı cədvəllə vermək olar.

y	Q	$P(x)$	$P(x)\Rightarrow Q$	$(\forall x)(P(x)\Rightarrow$ $\Rightarrow Q)$	$Q\wedge P(y)$	$(\forall x)(P(x)\Rightarrow$ $\Rightarrow Q)\vee$ $\vee(Q\wedge P(y))$
a	D	$\lambda_1(x)$	D	D	D	D
b	D	$\lambda_1(x)$	D	D	D	D
a	Y	$\lambda_1(x)$	Y	Y	Y	Y
b	Y	$\lambda_1(x)$	Y	Y	Y	Y
a	D	$\lambda_2(x)$	D	D	D	D
b	D	$\lambda_2(x)$	D	D	Y	D

a	Y	$\lambda_2(x)$	Y	Y	Y	Y
b	Y	$\lambda_2(x)$	D	Y	Y	Y
a	D	$\lambda_3(x)$	D	D	Y	D
b	D	$\lambda_3(x)$	D	D	D	D
a	Y	$\lambda_3(x)$	D	Y	Y	Y
b	Y	$\lambda_3(x)$	Y	Y	Y	Y
a	D	$\lambda_4(x)$	Y	D	Y	D
b	D	$\lambda_4(x)$	D	D	Y	D
a	Y	$\lambda_4(x)$	D	D	Y	D
b	Y	$\lambda_4(x)$	D	D	Y	D

$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ sətrdən ibarət olan bu cədvəlin hər bir sətrində y, Q və $P(x)$-in altında onların həmin sətr üçün nəzərdə tutulmuş qiymətləri yazılmışdır. Məhz həmin qiymətlərə görə də düsturun özünün doğruluq qiyməti hesablanır. Məsələn, y, Q və $P(x)$-in 13-cü sətrdə verilmiş qiymətlə-rinə görə α düsturunun doğruluq qiymətinin necə hesablan-dığını müfəssəl surətdə izah edək: $y = a$, $Q = D$, $P(x) = \lambda_4(x)$ qiymətlərini α düsturunda nəzərə alsaq, onu aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$(\forall x)(\lambda_4(x) \Rightarrow D) \vee (D \wedge \lambda_4(a)).$$

Lakin $\lambda_4(a) = Y$ və $\lambda_4(b) = Y$ olduğunu nəzərə alsaq, $(\lambda_4(x) \Rightarrow D)$ implikasiyası x-in $E = \{a, b\}$ çoxluğundan götürülmüş istənilən qiymətində D olar. Ona görə də $(\forall x)(\lambda_4(x) \Rightarrow D)$ altdüsturu D-yə bərabər, $(D \wedge \lambda_4(a))$ altdüsturu isə Y-yə bərabər qiymət alacaqdır. Odur ki, bütünlükdə

$$(\forall x)(\lambda_4(x) \Rightarrow D) \vee (D \wedge \lambda_4(a))$$

düsturu D qiymət alır.

§38. Predikatlar cəbrində düsturların eynigüclülüyü. Əsas eynigüclülüklər

Mülahizələr məntiqində olduğu kimi predikatlar məntiqində də düsturların eynigüclülüyündən danışmaq olar.

Tərif 1. α və β predikat məntiqi düsturları eyni bir X çoxluğunda təyin edilmişdirsə və onların asılı olduqları sərbəst predmet dəyişənlərini X çoxluğundan götürülmüş istənilən konkret qiymətlərlə əvəz etdikdə mülahizələr cəbrinin eynigüclü düsturlarına çevrilərsə, onda α və β düsturlarına eynigüclü predikat düsturları deyilir və $\alpha \equiv \beta$ kimi işarə edilir.

Misal 1. $\alpha : (\forall x)(P(x) \vee A)$ və $\beta : (\forall x)P(x) \vee A$ düsturları eynigüclü düsturlardır. Burada $P(x)$ hər hansı çoxluqda təyin edilmiş biryerli predikat, A isə mülahizədir.

Misal 2. α və β predikatlar məntiqinin istənilən düsturları olduqda

$$\overline{\alpha \wedge \beta} \equiv \overline{\alpha} \vee \overline{\beta} \text{ və } \overline{\alpha \vee \beta} \equiv \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}$$

eynigüclülükləri doğrudur. Belə eynigüclülərin bir tərəfi digər tərəfindən de Morqan qanunları vasitəsilə alınır.

Düsturların eynigüclülüyünün tərifindən aydın olur ki, o refleksiv, simmetrik və tranzitiv münasibətdir. Ona görə də bütün predikatlar cəbri düsturları cüt-cüt kəsişməyən və boş olmayan siniflərə ayrılır. Eyni bir sinfə daxil olan is-tənilən iki düstur eynigüclüdür. Lakin iki müxtəlif sinfə da-xil olan ixtiyari iki düstur isə eynigüclü deyildir. Mülahizələr cəbrində olduğu kimi predikatlar cəbrində aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Əgər predikatlar cəbrinin α düsturu β_1 düsturunu altdüstur kimi özündə saxlayırsa və β_2 ixtiyari düstur olmaqla $\beta_1 \equiv \beta_2$ olarsa, onda $\alpha(\beta_1) \equiv \alpha(\beta_2)$.

Bu teoremin isbatını sərbəst iş kimi oxucuların öhdəsinə buraxaraq, ondan çıxan aşağıdakı əsas nəticələri qeyd edək:

$\alpha_1 \equiv \alpha_2$ və $\beta_1 \equiv \beta_2$ isə, onda

1. $\overline{\alpha}_1 \equiv \overline{\alpha}_2$

2. $\alpha_1 \vee \beta_1 \equiv \alpha_2 \vee \beta_2$

3. $\alpha_1 \wedge \beta_1 \equiv \alpha_2 \wedge \beta_2$

4. $\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \equiv \alpha_2 \Rightarrow \beta_2$

5. $(\forall x)\alpha_1(x) \equiv (\forall x)\alpha_2(x)$

6. $(\exists x)\alpha_1(x) \equiv (\exists x)\alpha_2(x)$

İndi isə bir sıra əsas eynigüclülüklərlə tanış olaq. Bu eynigüclülüklərdən verilmiş predikat məntiqi düsturlarını sadələşdirmək və daha əlverişli şəklə salmaq üçün istifadə ediləcəkdir.

Aydındır ki, mülahizələr cəbrindən məlum olan bütün eynigüclülükləri predikatlar məntiqi cəbrinə köçürmək olar.

Bundan əlavə, əgər mülahizələr cəbrinin eynigüclü düsturlarında bu düstura daxil olan dəyişənləri predikatlar məntiqi düsturları ilə əvəz etsək (eyni bir dəyişəni eyni bir düsturla əvəz etməklə) eynigüclü predikat düsturları alarıq. Misal üçün,

$$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$$

eynigüclülüklərini götürüb x dəyişənini $(\exists x)F_1(x)$, y dəyişənini isə $(\forall y)(\forall z)F_2(y,z)$ düsturları ilə əvəz etsək pedikatlar cəbrində uyğun olaraq

$$\overline{(\exists x)F_1(x) \vee (\forall y)(\forall z)F_2(y,z)} \equiv$$
$$\equiv \overline{(\exists x)F_1(x)} \wedge \overline{(\forall y)(\forall z)F_2(y,z)},$$

$$\overline{(\exists x)F_1(x) \wedge (\forall y)(\forall z)F_2(y,z)} \equiv$$
$$\equiv \overline{(\exists x)F_1(x)} \vee \overline{(\forall y)(\forall z)F_2(y,z)}$$

eynigüclülərini alarıq. Xüsusi halda $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \overline{\alpha} \vee \beta$ eynigüclülüyündən istifadə edərək hər bir predikat məntiqi düsturunu elə eynigüclü çevirmək olar ki, o, yalnız $\wedge, \vee, \rceil$ əməllərini özündə saxlasın.

Tərif 2. Yalnız $\wedge, \vee, \rceil$ məntiq əməllərini özündə saxlayan hər bir düsturda inkar əməli ancaq ya elementar predikatlara, ya da mülahizələrə aid olarsa, belə düsturlara gətirilmiş düstur deyilir.

Hər bir düstura eynigüclü olan gətirilmiş düstur vardır.

Misallar.

1) $$(\exists x)(A(x) \Rightarrow (\forall y)B(y)) \qquad (38.1)$$

düsturuna eynigüclü gətirilmiş düstur

$$(\exists x)(\overline{A}(x) \vee (\forall y)B(y))$$

şəklindədir.

2) $$(\forall x)A(x) \Rightarrow (B(z) \Rightarrow (\forall x)C(x)) \equiv$$
$$\equiv \overline{(\forall x)A(x)} \vee \overline{B}(z) \vee (\forall x)C(x) \qquad (38.2)$$

eynigüclülüyünü isbat etmək və eləcə də

3) $$((\exists x)A(x) \Rightarrow (\forall y)B(y)) \Rightarrow C(z) \qquad (38.3)$$

düsturu ilə eynigüclü olan gətirilmiş düsturu tapmaq üçün əvvəlcə kvantorları inkar əməli ilə əlaqələndirən aşağıdakı qanunu nəzərdən keçirək. «$\overline{(\forall x)\alpha(x)}$ mülahizəsi doğrudur» ifadəsi belə bir təkliflə eyngüclüdür. «$\overline{(\exists x)\alpha(x)}$ yalandır». Bu isə o deməkdir ki, «elə x var ki, $\overline{\alpha(x)}$ yalandır», və ya, «elə x var ki, $\overline{\alpha(x)}$ doğrudur» Deməli, $\overline{(\forall x)\alpha(x)}$ düsturu $(\exists x)\overline{\alpha(x)}$ düsturu ilə eynigüclüdür. Beləcə də göstərmək olar ki, $\overline{(\exists x)\alpha(x)}$ düsturu $(\forall x)\overline{\alpha(x)}$ ilə eynigüclüdür. Bu-radan belə bir qayda alırıq. Kvantoru inkar işarəsi altından çıxarmaq olar, bu şərtlə ki, həmin kvantoru ona ikili olan kvantorla əvəz etmək lazımdır. İndi yuxarıdakı (38.3) düsturuna qayıdaq. Həmin düstur

$$\overline{(\exists x)\,A(x) \Rightarrow (\forall\, y)\,B(y)} \vee C\,(z)$$

düsturu ilə eynigüclüdür və bu axırıncı düstur da öz növbəsində

$$\overline{\overline{(\exists x)\,A(x)} \vee (\forall\, y)\,B(y)} \vee C\,(z) \equiv (\exists x)\,A(x) \wedge \overline{(\forall\, y)\,B(y)} \vee C(z)$$

$$\equiv (\exists x)\,A(x) \wedge (\exists\, y)\,\overline{B(y)} \vee C(z)$$

düsturuna çevrilir.

(38.2) eynigüclülüyünü də analoji qaydada isbat etmək olar. Kvantorların yerdəyişmə xassəsi ilə əlaqədar olan aşağıdakı eynigüclülükləri də isbat etmək olar:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)\,\alpha\,(x,y) \equiv (\forall\, y)(\forall\, x)\,\alpha\,(x,y)\,,$$

$$(\exists x)(\exists\, y)\,\alpha\,(x,y) \equiv (\exists\, y)(\exists x)\,\alpha\,(x,y)\,.$$

Sonrakı eynigüclülüklər kvantorların ∧, ∨ əməlləri-nə nəzərən paylama xassələri ilə bağlıdır.

$$(\forall\, x)(\alpha_1(x) \wedge \alpha_2(x)) \equiv (\forall\, x)\alpha_1(x) \wedge (\forall\, x)\alpha_2(x)\,,$$

$$(\exists x)(\alpha_1(x) \vee \alpha_2(x)) \equiv (\exists x)\alpha_1(x) \vee (\exists x)\alpha_2(x)\,.$$

β düsturu x predmet dəyişənini özündə saxlamırsa, onda

$$(\forall\, x)\alpha\,(x) \vee \beta \equiv (\forall\, x)(\alpha\,(x) \vee \beta)\,, \qquad (38.4)$$

$$(\exists x)\alpha\,(x) \vee \beta \equiv (\exists x)(\alpha\,(x) \vee \beta)\,, \qquad (38.5)$$

$$(\forall\, x)\alpha\,(x) \wedge \beta \equiv (\forall\, x)(\alpha\,(x) \wedge \beta)\,, \qquad (38.6)$$

$$(\exists x)\alpha\,(x) \wedge \beta \equiv (\exists x)(\alpha\,(x) \wedge \beta)\,. \qquad (38.7)$$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz eynigüclülüklərdən istifadə edərək bir sıra yeni eynigüclülüklərin doğruluğunu isbat etmək olar. Məsələn,

$$(\exists x)(F_1(x) \Rightarrow F_2(x)) \equiv ((\forall\, x)\,F_1(x) \Rightarrow (\exists x)\,F_2(x))$$

eynigüclülüyünü isbat edək:

$$(\exists x)(F_1(x) \Rightarrow F_2(x)) \equiv (\exists x)((\overline{F_1(x)} \vee F_2(x)) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)(\overline{F_1(x)} \vee (\exists x)\,F_2(x)) \equiv \overline{(\forall\, x)\,F_1(x)} \vee (\exists x)\,F_2(x) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(F_1(x) \Rightarrow (\exists x) F_2(x)) .$$

§39. İlkin normal formalar

Predikatlar məntiqinin bəzi məsələlərinin qoyuluşu və həlli zamanı düsturların ilkin normal forma adlanan xüsusi bir formada göstərilməsi zərurəti qarşıya çıxır.

Tərif 1.

$$(\delta_1 x_1)(\delta_2 x_2)\cdots(\delta_k x_k)\alpha \qquad (39.1)$$

(burada δ_i-lər ümumilik və ya varlıq kvantorlarıdır, α düsturu isə kvantorları özündə saxlamır və gətirilmiş düsturdur) şəklində olan hər bir düstura ilkin normal forma deyilir. (39.1) düsturunda $\delta_i x_i$-lərə əlavə, α-ya isə düsturun matrisi deyəcəyik. Bu tərifdən aydın olur ki, düsturun ilkin normal forma şəklində yazılışında kvantorlar (əgər onlar varsa) bütün məntiq əməllərindən əvvəl gəlir. Məsələn, α düsturuna heç bir kvantor daxil deyilsə,

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

düsturu, habelə

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(F_1(x_1, x_2) \vee F_2(x_1) \wedge F_2(x_2))$$

düsturu ilkin normal formadadır.

Teorem 1. Predikatlar cəbrinin hər bir α gətirilmiş düsturu ilə eynigüclü olan ilkin normal forma vardır.

İsbatı. Mülahizə dəyişəni və eləcə də $A(x), B(x,y)$ və s. şəklində hər bir elementar predikatlardan ibarət düstur üçün teorem doğrudur. Çünki bu düsturların özləri ilkin normal forma şəklindədir. İndi tutaq ki, α_1 və α_2 düsturları üçün ilkin normal forma vardır və bunlar α_1^* və α_2^*-dur.

Fərz edək ki, məsələn, α_1^* düsturu

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\exists x_n)\beta_1(x_1, x_2, ..., x_n),$$

α_2^* isə

$$(\exists y_1)(\forall y_2)\cdots(\forall y_m)\beta_2(y_1, y_2, ..., y_m)$$

şəklindədir.

Göstərək ki, $\alpha_1 \vee \alpha_2$ düsturu üçün də onunla eynigüclü ilkin normal forma vardır. Eynigüclülüyün məlum xassəsinə görə $\alpha_1^* \vee \alpha_2^*$ düsturu da $\alpha_1 \vee \alpha_2$ düsturuna eynigüclüdür və hələ ilkin normal forma şəklində deyildir. Lakin §38-in (38.4) və (38.5) eynigüclülüklərindən istifadə edərək onları ilkin normal forma şəklinə gətirmək olar. Doğrudan da əvvəlcə $\alpha_1^* \vee \alpha_2^*$ düsturunu aşağıdakı düsturla əvəz etmək olar:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\exists x_n)\beta_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee$$
$$\vee(\exists y_1)(\forall y_2)\cdots(\forall y_n)\beta_2(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Sonra, eynigüclü çevirməni $(\forall x_1)$ kvantoru işarəsi altında apara bilərik, çünki iki eynigüclü düsturun eyni bir x_1 dəyişəninə görə kvantorla əlaqələndirilməsi nəticəsində yenə eynigüclü düsturlar alarıq. Bu səbəbə görə α_2^* düsturunu ikinci $(\forall x_2)$ kvantoru işarəsi altına keçirə bilərik və s. Tutaq ki, α_2^* düsturunu artıq α_1^* düsturunun bütün kvantorları altına salmışıq. Onda alarıq:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\exists x_n)(\beta_1(x_1, ..., x_n) \vee$$
$$\vee(\exists y_1)(\forall y_2)\cdots(\forall y_m)\beta_2(y_1, ..., y_m)).$$

Bu qayda ilə $\beta_1(x_1, ..., x_n)$ toplananını ardıcıl olaraq α_2^* düsturunda iştirak edən bütün kvantorların altına keçirə bilərik. Bunun nəticəsində $\alpha_1 \vee \alpha_2$ düsturu ilə eynigüclü olan

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\exists x_n)\,(\exists y_1)(\forall y_2)\cdots(\forall y_m)(\beta_1(x_1,...,x_n)\vee$$
$$\vee\,\beta_2(y_1,...,y_m))$$

düsturunu alarıq.

Analoji olaraq yenə də §38-dəki (38.6), (38.7) eynigüclülüklərinin köməyilə α_1 və α_2 düsturlarına eynigüclü olan α_1^*, α_2^* ilkin normal formalar məlum olduqda $\alpha_1\wedge\alpha_2$ düsturuna eynigüclü $\alpha_1^*\wedge\alpha_2^*$ ilkin normal formanı qurmaq olar.

Nəhayət, tutaq ki, $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturu ilə eynigüclü olan ilkin normal formalı α^* düsturu aşağıdakı şəkildədir:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\cdots(\forall x_n)\gamma(x_1,x_2,...,x_n)\,.$$

Aydındır ki, $\overline{\alpha}^*$ düsturu da $\overline{\alpha}$ ilə eynigüclü olar. Lakin $\overline{\alpha}^*$ düsturu

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)\cdots(\exists x_n)\overline{\gamma}(x_1,x_2,...,x_n)$$

düsturu ilə eynigüclüdür. Bu axırıncı düstur ilkin normal forma şəklindədir. Beləliklə, α düsturuna eynigüclü olan ilkin normal forma məlum olduqda $\overline{\alpha}$ ilə eynigüclü ilkin normal forma yuxarıdakı kimi qurulur. Predikatlar cəbrinin hər bir düsturu elementar düsturlardan yuxarıda şərh etdiyimiz kimi $\wedge, \vee, \rceil$ əməllərinin köməyilə düzəldiyi üçün, onda deyə bilərik ki, hər bir predikat cəbri düsturu üçün ona eynigüclü olan ilkin normal forma vardır. Bu da teoremin doğruluğunu göstərir.

Misal 1.

$$\overline{(\exists x)(A(x)\Rightarrow B(x))} \qquad (39.2)$$

düsturunu ilkin normal formaya gətirməli:

$$\overline{(\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x))} \equiv \overline{(\exists x)(\overline{A(x)} \vee B(x))} \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\overline{(\overline{A(x)} \vee B(x))} \equiv (\forall x)(A(x) \wedge \overline{B(x)}).$$

Axırıncı aldığımız düstur verilmiş düsturla eynigüclü olmaqla həm də ilkin normal formadadır, çünki düsturda iştirak edən $\forall$ kvantoru düsturdan əvvəl gəlir və inkar əməli yalnız elementar düsturlara aiddir.

Tərif 2. İlkin normal formalı düsturda bütün varlıq kvantorları ümumilik kvantorlarından əvvəl gələrsə, belə formaya ***Skolem normal forma*** deyilir.

Misal 2.

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\forall u)(\forall \upsilon)(D(x, y, z, u, \upsilon) \wedge A(x, y)) \quad (39.3)$$

düsturu Skolem normal forma şəklindədir. Bunun əksinə olaraq

$$(\forall x)(\exists y) A(x, y) \text{ və } (\exists x)(\forall y)(\exists z) A(x, y, z)$$

düsturları Skolem normal forma şəklində deyildir.

Predikatlar cəbrinin hər bir α düsturu üçün effektli şəkildə elə β Skolem normal forma qurmaq olar ki, $\alpha \equiv \beta$ olsun. Bu təklifin isbatı ümumi kursun çərçivəsindən kənara çıxdığı üçün onu isbatsız qəbul edirik.

§40. Riyazi tərif və təkliflərin yazılması, habelə əks təkliflərin qurulmasında predikatlar məntiqi vasitələrindən istifadə edilməsi

Predikatlar məntiqi simvollarından istifadə etməklə hər bir riyazi tərif və teoremi, həmçinin, əks teoremləri məntiqi dilə köçürmək, beləliklə də, onu predikatlar məntiqi düsturu şəklində yazmaq olar. Bir neçə misal göstərək.

Misal 1. «Hər bir natural ədəd sıfırdan böyükdür» təklifini götürək. Ümumilik kvantoru daxil edərək bu təklifi implikasiya şəklində belə ifadə etmək olar. «Əgər x natural ədəddirsə, onda o, sıfırdan böyükdür». Bu təklifdə iki dənə biryerli predikat iştirak edir. «x-in natural ədəd olması» xassəsi və «x-in sıfırdan böyük olması» xassəsi. Bu xassələri uyğun olaraq $N(x)$ və $B(x)$ funksional simvolları ilə göstərək. Onda yuxarıdakı təklifi belə yaza bilərik.

$$(\forall x)(x \in N \Rightarrow x > 0) \text{ və ya } (\forall x)(N(x) \Rightarrow B(x))$$

Misal 2. Predikatlar məntiqi vasitələrindən istifadə edərək ədədi ardıcıllığın limitinin tərifini yazaq. Əvvəlcə ardıcıllığın limitinin tərifini yada salaq.

Fərz edək ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı və a ədədi verilmişdir.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N natural ədədi varsa ki, $n > N$ olduqda $|a_n - a| < \varepsilon$ olsun, onda a ədədinə $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir və $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ kimi işarə edilir.

Ümumilik və varlıq kvantorları, habelə implikasiya əməlinin köməyilə bu tərifi aşağıdakı məntiq düsturu ilə ifadə etmək olar.

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon > 0)((\exists N)(\forall n)(n > N) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \quad (40.1)$$

(40.1) düsturunu inkar etməklə ardıcıllığın limitinin olmamasının tərifinin simvolik yazılışını alarıq:

$$\overline{(\forall\varepsilon)(\varepsilon > 0)((\exists N)(\forall n)(n > N) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)}\,. \quad (40.2)$$

Predikatlar məntiqinin əsas eynigüclülüklərindən istifadə edərək (40.2) düsturunu ilkin normal forma şəklinə gətirək:

$$\overline{(\forall\varepsilon)(\varepsilon > 0)((\exists N)(\forall n)(n > N) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv (\exists\varepsilon)(\varepsilon > 0)\,\overline{((\exists N)(\forall n)(n > N) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv (\exists\varepsilon)(\varepsilon > 0)\,((\forall N)(\exists n)(n \le N) \wedge \overline{|a_n - a| < \varepsilon}) \equiv$$

$$\equiv (\exists\varepsilon)(\varepsilon > 0)\,((\forall N)(\exists n)(n \le N) \wedge |a_n - a| \ge \varepsilon).$$

Axırıncı düsturdan istifadə edərək ardıcıllığın limitinin olmamasını aşağıdakı kimi söyləmək olar.

Əgər verilmiş a ədədinə görə elə $\varepsilon > 0$ ədədi tap-maq mümkündürsə ki, ixtiyari N natural ədədi üçün $n > N$ olduqda $|a_n - a| \geq \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda deyirlər ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti yoxdur.

Misal 3. Həqiqi əmsallı kvadrat tənliyin iki muxtəlif həqiqi köklərinin varlığı haqqındakı teoremi predikatlar məntiqi simvolları ilə belə vermək olar:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a,b,c \in R) \wedge (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac > 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists x_1)(\exists x_2)(x_1, x_2) \in R \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge$$
$$\wedge (a x_1^2 + b x_1 + c = 0) \wedge (a x_2^2 + b x_2 + c = 0)).$$

Əks təkliflərin qurulmasında predikatlar məntiqindən istifadə edilməsinə aid daha bir misal göstərək.

Misal 4. Fəzada düz xətlərin paralelliyinin dəqiq simvolik yazılışı belədir:

$$a \| b \equiv (\exists \alpha)((a \in \alpha \wedge b \in \alpha) \wedge (a = b \vee a \cap b = \varnothing)).$$

Aydındır ki, bu düsturun inkarı

$$\overline{a \| b} \equiv \overline{(\exists \alpha)((a \in \alpha \wedge b \in \alpha) \wedge (a = b \vee a \cap b = \varnothing))} \equiv$$
$$\equiv ((\forall \alpha)(a \notin \alpha \vee b \notin \alpha)) \vee ((a \neq b)) \wedge (a \cap b \neq \varnothing)).$$

Aldığımız düstur fəzada düz xətlərin paralelliyi təklifinin əksidir. Bu, düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətlərinin digər iki mümkün olan halını təsvir edir.

1) $\overline{\alpha \| b} \equiv (\forall \alpha)(a \notin \alpha \vee b \notin \alpha)$ - a və b düz xətləri çarpazdır.

2) $\overline{a \| b} \equiv (\forall \alpha)(a \in \alpha \wedge b \in \alpha) \wedge ((a \neq b) \wedge (a \cap b \neq \varnothing))$ -

a və b düz xətləri kəsişir.

§41. Predikatların tənliklər və bərabərsizliklər, habelə onların sistemləri həllinə tətbiqi

Predikatlar məntiqinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də onun tənlik, bərabərsizlik və onların sistemlərinin həllində istifadə edilməsidir.

Orta məktəb riyaziyyatı kursunda biz tənlik, bərabərsizlik və onların sistemlərinin bəzi növləri ilə tanış olmaqla onların həllinə və həllər çoxluğuna tərif vermişik. Məsələn, loqarifmik tənlik, triqonometrik bərabərsizlik, xətti tənliklər sistemi, ikidərəcəli bərabərsizliklər sistemi və s.

Lakin predikatların daxil edilməsi həm haqqında danışdığımız anlayışların özlərinin tərifini, həm də onlarla bağlı olan bir sıra başqa anlayışları (məsələn, həll, həllər çoxluğu, nəticə, tənlik, eynigüclü sistemlər və i. a.) dəqiqləşdirməyə imkan verir.

Hər şeydən əvvəl tənlik və bərabərsizliklərin predikatlarla əlaqələndirilməsi şərtini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, eyni bir X çoxluğunda təyin edilmiş və qiymətlər oblastı da eyni bir Y çoxluğundan ibarət

$$f : X \to Y$$

$$g : X \to Y$$

kimi birdəyişənli $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları verilmişdir. Birməchullu

$$f(x) = g(x) \qquad (41.1)$$

tənliyini $P(x)$ biryerli predikatı ilə işarə edək.

Təyin etdiyimizə görə

$$P(x) \equiv (f(x) = g(x)). \qquad (41.2)$$

Aydındır ki, x dəyişəninin X çoxluğundan götürülmüş və (41.1) tənliyinin həlli olan hər bir qiyməti $P(x)$ predikatını doğru mülahizəyə çevirəcək və tərsinə X çoxluğundan götürülmüş elə x-lər üçün $P(x)$ predikatı doğru olur ki, həmin x-lər (41.1) tənliyinin həllidir. Beləliklə, $P(x)$ predikatının doğruluq oblastı (41.1) tənliyinin həlləri çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

Əgər $\{x / P(x)\} = X$ olarsa, onda (41.1) tənliyi X çoxluğunda eyniliyə çevrilir. $\{x / P(x)\} = \varnothing$ olarsa, onda deyirlər ki, (41.1) tənliyinin X çoxluğunda həlli yoxdur.

Məsələn,

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad (41.3)$$

tənliyinə $P(x) \equiv (x^2 - 7x + 12 = 0)$ biryerli predikatını qarşı qoyaq. $P(3) = D$ və $P(4) = D$ olar. Ona görə də

$$M = \{x / x^2 - 7x + 12 = 0\} = \{3, 4\}$$

çoxluğu (41.3) tənliyinin həllər çoxluğu olacaqdır.

Lakin

$$| x - 5 | = \sqrt{(x-5)^2} \qquad (41.4)$$

tənliyinə $Q(x)$ predikatını qarşı qoysaq,

$$Q(x) = (| x - 5 | = \sqrt{(x-5)^2})$$

predikatı istənilən həqiqi x ədədi üçün doğru qiymət alar. Ona görə də $\{x / Q(x)\} = R$ olacaqdır. Deməli, (41.4) tənliyi R çoxluğunda eynilikdir. Bunun əksinə olaraq

$$x^2 + 2 = \sin x \qquad (41.5)$$

tənliyinə $S(x) \equiv (x^2 + 2 = \sin x)$ biryerli predikatını qarşı qoymuş olsaq R həqiqi ədədlər çoxluğunda $\{x / S(x)\} = \varnothing$ olacaqdır və ona görə də (41.5) tənliyinin R çoxluğunda həlli yoxdur.

Eyni ilə bu cür n dəyişəndən asılı hər bir tənliyə bir n - yerli predikat qarşı qoymaq və həmin predikatın doğruluq oblastı ilə tənliyin həllər çoxluğu arasında əlaqə yaratmaq olar.

Fərz edək ki, n dəyişənli m tənlikdən ibarət

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \qquad (41.6)$$

sistemi verilmişdir.

Ümumiliyi pozmadan fərz etmək olar ki, (41.6) sistemi tənliklərinin sol və sağ tərəfləri olan f_i və g_i $(i=\overline{1,m})$ funksiyaları eyni bir X çoxluğunda təyin edilmişdir. Hər bir

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)\ (i=\overline{1,m})$$

tənliyinə X^n Dekart hasilində təyin edilmiş bir n-yerli $P_i(x_1,x_2,...,x_n)$ predikatı qarşı qoymaq olar.

$$P_i(x_1,x_2,...,x_n)\equiv(f_i(x_1,x_2,...,x_n)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)).$$

Beləliklə, (41.6) tənliklər sistemi əvəzinə m sayda

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x_1,x_2,...,x_n)\equiv(f_1(x_1,x_2,...,x_n)=g_1(x_1,x_2,...,x_n)) \\ P_2(x_1,x_2,...,x_n)\equiv(f_2(x_1,x_2,...,x_n)=g_2(x_1,x_2,...,x_n)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_m(x_1,x_2,...,x_n)\equiv(f_m(x_1,x_2,...,x_n)=g_m(x_1,x_2,...,x_n)) \end{array}\right\}\quad(41.7)$$

predikatlarını götürə bilərik.

Aydındır ki, (41.6) sistemini X^n çoxluğundan götürülmüş elə $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ n-liyi ödəyəcək ki, o eyni zamanda (41.7) predikatlarının hər birini və ona görə də

$$P(x_1,x_2,...,x_n)=\bigwedge_{i=1}^{m}P_i(x_1,x_2,...,x_n)\qquad(41.8)$$

predikatını doğru mülahizəyə çevirsin.

Tərsinə, (41.8) predikatını doğru edən hər bir $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_n)$ n-liyi (41.6) sisteminin də həlli olacaqdır. Buradan da alınır ki, (41.6) sisteminin həllər çoxluğu (41.8) predikatının doğruluq oblastı ilə üst-üstə düşür. (41.6) sistemi onda və ancaq onda birgə olmaz ki, (41.8) predika-tının doğruluq oblastı boş çoxluq olsun, yəni

$$\{(x_1,x_2,...,x_n)/P(x_1,x_2,...,x_n)\}=\varnothing.$$

Misal. Z tam ədədlər çoxluğunun Z^2 Dekart kvadratında

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= 9 \\ x_1 x_2 &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad (41.9)$$

sisteminin həllər çoxluğunun tapılması

$$P(x_1, x_2) \equiv P_1(x_1, x_2) \wedge P_2(x_1, x_2)$$

predikatının doğruluq oblastının tapılmasına gətirilir. Burada

$$P_1(x_1, x_2) \equiv (x_1^2 - x_2^2 = 9)$$

$$P_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 \cdot x_2 = 20)$$

işarə edilmişdir. Asanlıqla görmək olar ki, Z^2 çoxluğunda $\{(x_1, x_2) / P_1(x_1, x_2)\} = \{(5, 4); (-5, 4); (5, -4); (-5, -4); (3, 0); (-3, 0)\}$,
$\{(x_1, x_2) / P_2(x_1, x_2)\} = \{(1, 20); (20, 1); (-1, -20); (-20, -1); (-4, -5);$
$(-5, -4); (4, 5); (5, 4)\}$.
$\{(x_1, x_2) / P_1(x_1, x_2) \wedge P_2(x_1, x_2)\} = \{(x_1, x_2) / P_1(x_1, x_2)\} \cap$
$\cap \{(x_1, x_2) / P_2(x_1, x_2)\} = \{(5, 4); (-5, -4)\}$.

Deməli, (41.9) sisteminin həllər çoxluğu $\{(5, 4); (-5, -4)\}$-dür. İşin sonrakı gedişində «tənlik» və «tənliklər sistemi» sözlərini «bərabərsizlik və bərabərsizliklər sistemi» sözləri ilə, həmçinin = simvolunu $<, \le, >, \ge$ simvollarından biri ilə əvəz edərək bərabərsizlik və bərabərsizliklər sistemi haqqında da danışmaq olar. Lakin təkrara yol verməmək üçün bu işi oxucuların öhdəsinə buraxırıq.

§42. Model anlayışı. Siqnatur inikas

Predikatlar məntiqinin əsas və ən çox tətbiq olunan anlayışlarından biri model anlayışıdır.

Fərz edək ki, M çoxluğu və bu çoxluqda təyin olunmuş $F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, \ldots, F_n^{(k_n)}$ predikatları verilmişdir (burada k_i, ilə F_i $(i = \overline{1, n})$ predikatının asılı olduğu predmet dəyişənlərinin sayı göstərilir).

Tərif 1. M çoxluğu və bu çoxluqda təyin olunmuş

$F_i^{(k_i)}\ (i=\overline{1,n})$ predikatları birlikdə model adlanır və

$$\mu =< M; F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, ..., F_n^{(k_n)} >$$

kimi işarə olunur.

Burada M -ə μ modelinin əsas çoxluğu, $F_i^{(k_i)}\ (i=\overline{1,n})$ predikatlarına əsas predikatlar, onların $\xi =< F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, ..., F_n^{(k_n)} >$ yığımına modelin siqnaturası, $\tau =< k_1, k_2, ..., k_n >$-ə isə onun tipi deyilir.

Misal 1. Tutaq ki, N natural ədədlər çoxluğu, $F_1^{(2)}$, $F_1^{(3)}, F_2^{(3)}$ isə bu çoxluqda təyin edilmiş uyğun olaraq bərabərlik, toplama və vurma əməllərini ifadə edən predikatlardır. Yəni

$$F_1^{(2)}(x,y) = D \Leftrightarrow x = y,$$
$$F_1^{(3)}(x,y,z) = D \Leftrightarrow x + y = z,$$
$$F_2^{(3)}(x,y,z) = D \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Aydındır ki, bu halda $\mu =< N, F_1^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} >$ modeli natural ədədlər hesabını göstərəcəkdir. Bu modelin siqnaturası $\xi =< F_1^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} >$, tipi isə $\tau =< 2,3,3 >$-dür.

Misal 2. Fərz ədək ki, $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ çoxluğu və bu çoxluqda təyin edilmiş

$$F_1^{(1)}(x) = D \Leftrightarrow \text{«}x\ \text{sadə ədəddir»};$$
$$F_1^{(2)}(x,y) = D \Leftrightarrow \text{«}x\ \text{bölür}\ y\text{-i»};$$
$$F_2^{(2)}(x,y) = D \Leftrightarrow x < y;$$
$$F_1^{(3)}(x,y,z) = D \Leftrightarrow x + y = z;$$
$$F_2^{(3)}(x,y,z) = D \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

predikatları verilmişdir.

$$\mu' =< M; F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} >$$

əsas çoxluğu $M = \{1,2,3,4,5,6\}$, siqnaturası

$$\xi =< F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} >$$

və tipi $\tau =< 1,2,2,3,3 >$ olan modeldir.

Tərif 2. Modelin əsas çoxluğu sonlu olduqda ona sonlu model, əsas çoxluğu sonsuz olduqda isə sonsuz model deyilir.

Yuxarıdakı misallardan göründüyü kimi μ modeli sonsuz, μ' modeli isə sonludur.

Tərif 3. Eyni bir ξ siqnaturalı, modellər çoxluğuna ξ siqnaturalı K_ξ modellər sinfi deyilir.

Deməli, K_ξ modellər sinfi elə modellər çoxluğudur ki, onların siqnaturası eyni olub, yalnız əsas çoxluqları ilə fərqlənir.

Yenə də fərz edək ki, $\mu =< M; F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, ..., F_n^{(k_n)} >$ və $\mu' =< M'; F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, ..., F_n^{(k_n)} >$ K_ξ sinfinin hər hansı iki modelidir.

Tərif 4. Əgər eyni bir $\xi =< F_1^{(k_1)}, F_2^{(k_2)}, ..., F_n^{(k_n)} >$ siqnaturalı μ və μ' modelləri üçün M əsas çoxluğu M' əsas çoxluğunun altçoxluğu olarsa və ixtiyari $F_s^{(k_s)}$ $(1 \le s \le n)$ predikatı və $(a_1, a_2, ..., a_{k_s}) \in M'$ karteji üçün

$$F_{s,\mu'}^{(k_s)}(a_1, a_2, ..., a_{k_s}) = F_{s,\mu}^{(k_s)}(a_1, a_2, ..., a_{k_s})$$

olarsa, onda μ modelinə μ'-in altmodeli, μ'-ə isə μ-nün genişlənməsi deyilir.

Misal 3. N və Z uyğun olaraq natural və tam ədədlər çoxluğu, $F_1^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)}$ isə misal 1-də təyin edilmiş $=$, $+$, $\cdot$ predikatları olsun.

$$\mu =< N; F_1^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} > \text{ və } \mu' =< Z; F_1^{(2)}, F_1^{(3)}, F_2^{(3)} >$$

modellərinə baxaq. Aydındır ki, $N \subset Z$ və Z-də təyin olunmuş $=$ münasibəti və həm də $+$ və $\cdot$ əməlləri N çoxluğunda

$=$ münasibəti $+$ və $\cdot$ əməllərinin davamıdır. Ona görə də μ modeli μ' modelinin altmodeli, μ' isə μ-nün genişlənməsidir.

İndi isə siqnatur inikas anlayışı verək.

Tutaq ki, predikatlar məntiqinin hər hansı α düsturu və ξ siqnaturalı μ modeli verilmişdir. α düsturuna daxil olan bütün predikatlar çoxluğunu

$$\xi_\alpha = \{R_1^{(k_1)}, R_2^{(k_2)}, ..., R_n^{(k_n)}\} \qquad (42.1)$$

ilə işarə edək.

Tərif 5. Əgər istənilən $i = 1,2,...,n$ ədədləri üçün μ modelinin ξ siqnaturası, yerlərinin sayı k_i olan heç olmazsa bir dənə predikatı özündə saxlayırsa, onda μ modelinə α düsturu üçün yol verilən model deyilir.

ξ siqnaturalı μ modeli α düsturu üçün yol verilən model olduqda bu düstura daxil olan (42.1) predikatlarının ξ siqnaturasında elə σ inikasını vermək olar ki, yerlərinin sayı k_i olan hər bir $R_i^{(k_i)}$ predikatının $\sigma R_i^{(k_i)}$ obrazı, ξ-də yerlərinin sayı yenə k_i olan predikat olsun. Hər bir belə inikası siqnatur inikas adlandıracağıq.

Əgər σ ξ_α çoxluğunun ξ-də siqnatur inikasıdırsa, onda α düsturunun hər bir $R_i^{(k_i)}$ predikatını onun $\sigma R_i^{(k_i)}$ obrazı ilə əvəz edib həmin düsturun $\sigma\alpha$ obrazını taparıq, həm də müxtəlif siqnatur inikaslar apararaq α düsturunun μ modelində müxtəlif obrazlarını alarıq. ξ_α çoxluğunun ξ-də bütün belə siqnatur inikaslarını $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ ilə, bu inikaslara uyğun α düsturunun obrazlarını $\sigma_1\alpha, \sigma_2\alpha, ..., \sigma_k\alpha$ ilə işarə edək.

α düsturu və yol verilən M əsas çoxluqlu μ modeli məlum olduqda, bu çür siqnatur inikaslar apardıqdan sonra alınan düstura daxil olan sərbəst dəyişənlərə M əsas çoxluğundan konkret qiymətlər verərək $\sigma\alpha$ düsturlarının doğruluq qiymətlərini təyin edə bilərik.

Misal 4. Tutaq ki, $\mu =< M; F_1^{(0)}, F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, F_2^{(1)}, F_2^{(2)} >$ modelinin əsas çoxluğu $M = Z$ tam ədədlər çoxluğu, predikatları isə aşağıdakı kimi verilmişdir.

$F_1^{(0)}$ — eyniliklə yalan mülahizə,

$F_1^{(1)}(x_1)$ — x_1 sadə ədəddir,

$F_2^{(1)}(x_2)$ — x_2 müsbət tam ədəddir,

$F_1^{(2)}(x_1, x_2)$ — x_1 kiçikdir x_2-dən,

$F_2^{(2)}(x_1, x_2)$ — x_1 bölür x_2-ni.

Predikatlar cəbrinin

$$\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(((R_1^{(2)}(x_1, x_2) \wedge R_2^{(2)}(x_1, x_2)) \Rightarrow R_1^{(0)}) \Rightarrow \overline{R_1^{(1)}(x_1)})$$

düsturuna baxaq.

Aydındır ki, μ modeli α düsturu üçün yol verilən modeldir. α düsturunun $\xi_\alpha = \{R_1^{(0)}, R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_2^{(2)}\}$ predkatları çoxluğunun μ modelinin $\xi\,\mu =< F_1^{(0)}, F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_2^{(2)}, F_2^{(2)} >$ siqnaturasına bütün mümkün olan siqnatur inikaslarını və α düsturunun bu inikaslardan sonra alınan obrazlarını yazaq.

I. $\sigma_1 R_1^{(0)} = F_1^{(0)}$; $\sigma_1 R_1^{(2)} = F_1^{(2)}$; $\sigma_1 R_1^{(1)} = F_1^{(1)}$; $\sigma_1 R_2^{(2)} = F_2^{(2)}$.

$$\sigma_1\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(((F_1^{(2)}(x_1, x_2) \wedge F_2^{(2)}(x_1, x_2)) \Rightarrow F_1^{(0)}) \Rightarrow \overline{F_1^{(1)}(x_1)}).$$

II. $\sigma_2 R_1^{(0)} = F_1^{(0)}$; $\sigma_2 R_1^{(2)} = F_1^{(2)}$; $\sigma_2 R_1^{(1)} = F_2^{(1)}$; $\sigma_2 R_2^{(2)} = F_2^{(2)}$.

$$\sigma_2\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(((F_1^{(2)}(x_1, x_2) \wedge F_2^{(2)}(x_1, x_2)) \Rightarrow F_1^{(0)}) \Rightarrow \overline{F_2^{(1)}(x_2)}).$$

III. $\sigma_3 R_1^{(0)} = F_1^{(0)}$; $\sigma_3 R_1^{(2)} = F_2^{(2)}$; $\sigma_3 R_1^{(1)} = F_1^{(1)}$; $\sigma_3 R_2^{(2)} = F_1^{(2)}$.

$$\sigma_3\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(((F_2^{(2)}(x_1, x_2) \wedge F_1^{(2)}(x_1, x_2)) \Rightarrow F_1^{(0)}) \Rightarrow \overline{F_1^{(1)}(x_1)}).$$

IV. $\sigma_4 R_1^{(0)} = F_1^{(0)}$; $\sigma_4 R_1^{(2)} = F_2^{(2)}$; $\sigma_4 R_1^{(1)} = F_2^{(1)}$; $\sigma_4 R_2^{(2)} = F_1^{(2)}$.

$\sigma_4\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(((F_2^{(2)}(x_1,x_2) \wedge F_2^{(2)}(x_1,x_2)) \Rightarrow F_1^{(0)}) \Rightarrow \overline{F_2^{(1)}(x_2)})$.
Buradan görünür ki, müxtəlif siqnatur inikaslara α düsturunun müxtəlif obrazları uyğun gəlir.

§43. Predikatlar məntiqində düsturların yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi. Yerinə yetirilənlik və ümumqiymətlilik arasında əlaqə

Fərz edək ki, n dənə predmet dəyişənindən asılı $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturu və bu düstur üçün yol verilən ξ siqnaturalı μ modeli verilmişdir. α düsturunun siqnaturasını ξ_α ilə işarə edək. σ isə ξ_α siqnaturasının ξ siqnaturasına hər hansı inikası olsun.

Tərif 1. Əgər μ modelinin M əsas çoxluğundan götürülmüş hər hansı $(a_1,a_2,...,a_n)$ n-liyi üçün $\sigma\alpha(a_1,a_2,...,a_n)$ mülahizəsi doğru olarsa, onda $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturuna μ modelində yerinə yetirilən düstur deyilir.

Misal 1. $\mu = < N; F_1^2, F_1^3, F_2^3 >$ modeli olaraq bu fəslin 42-ci paraqrafında haqqında danışdığımız natural ədədlər hesabını və

$$\alpha = (\forall x_1)(\forall x_2)(R_1^2(x_1,x_2) \Rightarrow R_1^3(x_1,x_2,x_3))$$

düsturunu götürək.

$$\sigma R_1^2 = F_1^2 \ , \ \sigma R_1^3 = F_1^3$$

siqnatur inikasından sonra aldığımız $\sigma\alpha$ düsturu (5, 5, 0) üçlüyü üçün doğru mülahizəyə çevrildiyindən α düsturu baxdığımız modeldə yerinə yetirilən olur.

Tərif 2. Əgər ξ_α siqnaturalı α düsturu üçün ξ siqnaturalı elə yol verilən μ modeli vardırsa ki, α düsturu həmin modeldə yerinə yetirilsin, onda α düsturuna yerinə yetirilən düstur deyilir.

Modeldə yerinə yetirilən hər bir düstur həm də yerinə yetirilən olduğundan misal 1-də göstərilən α düsturu yerinə yetiriləndir.

Tərif 3. Əgər μ modelinin M əsas çoxluğundan götürülmüş ixtiyari $(a_1, a_2, ..., a_n)$ n-liyi üçün $\sigma\alpha(a_1, a_2, ..., a_n)$ düsturu doğru mülahizəyə çevrilərsə, onda α düsturuna μ modelində doğu düstur deyilir.

Misal 2.

$$\alpha = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(R_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow R_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow R_1^2(x_2, x_3))$$

düsturu $\mu = < N; F_1^2, F_1^3, F_2^3 >$ modelində doğru düsturdur və natural ədədlər arasında bərabərliyin tranzitivlik xassəsini ifadə edir.

Tərif 4. Əgər α düsturu μ modelində yerinə yetirilən olmazsa, onda ona həmin modeldə yalan düstur deyilir.

Aydındır ki, əgər α düsturu μ modelində doğru düsturdursa, onda $\overline{\alpha}$ düsturu bu modeldə yalan düsturdur. Lakin əgər α düsturu μ modelində yerinə yetiriləndirsə, onda $\overline{\alpha}$ bu modeldə doğru düstur olmaya bilər və ola bilər ki, bu düstur μ modelində yalan, yaxud yerinə yetirilən olsun.

Misal 3. $\mu = < N; F_1^2, F_1^3, F_2^3 >$ natural ədədlər hesabı modelində belə bir düstura baxaq:

$$\alpha = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(R_2^3(x_1, x_2, x_3) \wedge$$
$$\wedge R_2^3(x_1, x_2, x_4) \Rightarrow R_1^2(x_3, x_4)).$$

Asanlıqla görmək olar ki, $\overline{\alpha}$ düsturu baxdığımız modeldə yalan düsturdur.

Tərif 5. Əgər α düsturu istənilən yol verilən modeldə doğru düstur olarsa, onda həmin düstura eyniliklə doğru düstur və ya ümumqiymətli düstur deyilir. Misal 3-də göstərilən α düsturu ümumqiymətlidir.

Tərif 6. Əgər α düsturu istənilən yol verilən modeldə yalan olarsa, onda ona eyniliklə yalan düstur və ya ziddiyyət deyilir.

Misal 4.

$$\alpha = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(R_2^3(x_1,x_2,x_3) \wedge \overline{R_1^2(x_1,x_2)} \Rightarrow R_1^3(x_1,x_2,x_3))$$

ziddiyyətdir, çünki istənilən $a_1 \neq a_2$ ünsürləri üçün

$$a_1 \cdot a_2 \neq a_1 + a_2$$

şərti ödənilir. Aydın görmək olar ki, predikatlar cəbrinin istənilən $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturu üçün

$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n) \vee \overline{\alpha(x_1,x_2,...,x_n)}$$

düsturu ümumqiymətlidir, çünki hər bir yol verilən μ modeli və σ siqnatur inikası üçün ya $\sigma\alpha$, yaxud $\sigma\overline{\alpha}$ doğru olacaqdır. Lakin predikatlar cəbrinin $\alpha(x_1,x_2,...,x_n) \wedge \overline{\alpha(x_1,x_2,...,x_n)}$ düsturu ziddiyyətdir, çünki hər bir yol verilən modeldə ya $\sigma\alpha$, yaxud da $\sigma\overline{\alpha}$ yalandır.

Qeyd edək ki, mülahizələr cəbrinin hər bir doğru düsturu istənilən modeldə predikatlar cəbrinin eyniliklə doğru düsturu olduğundan ümumqiymətlidir. Beləcə də mülahizələr cəbrində yalan olan hər bir düstur predikatlar cəbrində yerinə yetirilməyəndir.

Bir də onu qeyd edək ki, əgər mülahizələr cəbrinin $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərindən düzəldilmiş α düsturu doğru və yaxud yalan düsturdursa, onda həmin düsturda hər bir x_i dəyişənini predikatlar cəbrinin α_i düsturu ilə əvəz etsək, predikatlar cəbrinin ümumqiymətli və yaxud yerinə yetirilməyən düsturunu alarıq.

Nəhayət, əgər

$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n) \tag{43.1}$$

düsturu hər hansı μ modelində yerinə yetirilən və ya doğru düsturdursa, onda həmin modeldə

$$(\exists x_1)...(\exists x_n)\alpha(x_1,...,x_n) \qquad (43.2)$$

$$(\forall x_1)...(\forall x_n)\alpha(x_1,...,x_n) \qquad (43.3)$$

düsturları da doğrudur. Tərsinə, əgər (43.2) və (43.3) düsturları hər hansı modeldə doğrudursa, onda $\alpha(x_1,...,x_n)$ düsturu həmin modeldə yerinə yetirilən və ya doğru düsturdur.

Yuxarıda deyilənlərdən aşağıdakı iki nəticə alınır:

a) $\alpha(x_1,...,x_n)$ düsturu onda və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, $(\exists x_1)...(\exists x_n)\alpha(x_1,...,x_n)$ düsturu yerinə yetirilən olsun.

b) $\alpha(x_1,...,x_n)$ düsturu onda və ancaq onda ümumqiymətli olar ki, $(\forall x_1)...(\forall x_n)\alpha(x_1,...,x_n)$ düsturu ümumqiymətli olsun.

Qeyd edək ki, sonlu modeldə yerinə yetirilən predikatlar məntiqi düsturu həmin modelin hər bir sonsuz genişlənməsində də yerinə yetiriləndir. Lakin bunun tərsi doğru deyildir. Ola bilər ki, düstur sonsuz modeldə yerinə yetirilsin, lakin heç bir sonlu modeldə yerinə yetirilməsin. Bunu aşağıdakı misal üzərində aydınlaşdıraq.

Misal 5. Tutaq ki, sonsuz μ modelində (xatırladaq ki, model o vaxt sonsuz adlanır ki, onun əsas çoxluğu sonsuz olsun)

$$\alpha = (\forall x_1)(\exists x_2)(R_1^2(x_1,x_2) \wedge (\forall x_1)R_1^2(x_1,x_2)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(R_1^2(x_1,x_2) \wedge R_1^2(x_2,x_3) \Rightarrow R_1^2(x_1,x_3)) \qquad (43.4)$$

düsturu verilmişdir.

μ modelində $Q(x_1,x_2)$ predikatını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$Q(x_1,x_2) = (\exists y)S(x_1,y,x_2),$$

burada S natural ədədlər modelində təyin edilmiş toplama predikatıdır.

Başqa sözlə, $Q(x_1,x_2) = D \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Q-yə bəzən ciddi mənada tərtib predikatı deyirlər.

$Q(x_1, x_2)$ predikatının təyinindən aydındır ki,

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\, Q(x_1, x_2) = D\,,$$

$$(\forall x_1)\, Q(x_1, x_1) = Y$$

və

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(Q(x_1, x_2) \wedge Q(x_2, x_3) \Rightarrow Q(x_1, x_3)) = D\,.$$

Ona görə də (43.4) düsturu μ modelinin istənilən $\sigma R_1^2 = Q$ siqnatur inikasında yerinə yetiriləndir. Bununla bərabər (43.4) düsturu heç bir sonlu μ modelində yerinə yətirilən deyil.

Həqiqətən, tutaq ki, hər hansı σ siqnatur inikası üçün $\sigma\alpha = D$. Bu inikası belə təyin edək: $\sigma R_1^2 = F_1^2$, burada F_1^2 μ modelinin hər hansı predikatıdır. $\sigma\alpha = D$ olmasından alınır ki,

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\, F_1^2(x_1, x_2) = D \qquad (43.5)$$

$$(\forall x_1)\, F_1^2(x_1, x_1) = D \qquad (43.6)$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^2(x_1,x_2) \wedge F_1^2(x_2,x_3) \Rightarrow F_1^2(x_1,x_3)) = D \quad (43.7)$$

(43.5)-dən çıxır ki, elə

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots \in M \qquad (43.8)$$

elementlər ardıcıllığı var ki,

$$F_1^2(a_i, a_{i+1}) = D\,. \qquad (43.9)$$

μ modeli sonludur və ona görə də (43.8) ardıcıllığında elə a_i və a_k elementləri var ki, $k > i$ olduqda $a_i = a_i$ (43.9) olur.

$$F_1^2(a_i, a_{i+1}) = D \text{ və } F_1^2(a_{i+1}, a_{i+2}) = D$$

olduğundan (43.7)-dən alınır ki, $F_1^2(a_i, a_{i+2}) = D$. Bu düsturu tətbiq edərək (43.7)-dən belə bir nəticəyə gəlirik ki,

$$F_1^2(a_i, a_k) = D\,.$$

(43.9) şərtinə görə $F_1^2(a_i, a_i) = D \quad (i = 1,2,...)$.

Bu axırıncı bərabərlik isə (43.6)-ya görə mümkün deyildir. Belə ziddiyyət onu göstərir ki, (43.4) düsturu heç bir sonlu modeldə yerinə yetirilən deyildir.

§44. Predikatlar məntiqində düsturların yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi üçün həllolunma problemi

Mülahizələr cəbrində olduğu kimi predikatlar cəbrində də düsturların yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi problemi qarşıya çıxır. Elə bir alqoritm vardırmı ki, onun köməyilə istənilən α düsturunun yerinə yetirilən, habelə ümumqiymətli olub-olmadığı müəyyən edilsin?

Mülahizələr cəbrində hər bir verilmiş düsturun yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi üçün bu problem müsbət həll olunur. Predikatlar cəbrində isə bu problemin həlli bir qədər mürəkkəbdir. Amerika riyaziyyatçısı Çerç tərəfindən isbat edilmişdir ki, ümumi şəkildə predikatlar cəbrində düsturların yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi ilə əlaqədar «həllolunma» problemi açıq qalır. Yəni bu problem həll olunmamışdır, başqa sözlə uyğun alqoritm yoxdur. Ona görə də riyaziyyatçılar xüsusi hallarda verilmiş bəzi düsturlar üçün konkret modellərdə həllolunma problemi ilə məşğul olmuşlar. Bunlardan bəzilərinə baxaq.

I. Düsturların ümumqiymətliliyi və yerinə yetirilənliyi problemi istənilən sonlu modeldə həll olunandır.

Doğrudan da tutaq ki, μ əsas çoxluğu M olan və istənilən α düsturu üçün yol verilən sonlu modeldir. α düsturunun bu modeldə ümumqiymətli və ya yerinə yetirilən olub-olmadığını aydınlaşdırmaq tələb olunur. μ modeli sonlu siqnaturaya malik olduğundan α düsturu siqnaturasını μ modeli siqnaturasına inikas etdirən ancaq sonlu sayda siqnatur inikaslar vardır.

M çoxluğu sonlu olduğu üçün hər bir qeyd olunmuş siqnatur inikasında α düsturuna daxil olan predmet dəyişənləri üçün yalnız sonlu sayda qiymətlər yığımı götürmək lazımdır. Deməli, bilavasitə sonlu sayda siqnatur inikası aparmaqla, dəyişənlərin sonlu sayda qiymətlər yığımı üçün doğruluq qiyməti hesablayaraq sonlu addımdan sonra α düsturunun μ modelində ümumqiymətli və ya yerinə yetirilən olub-olmadığını yoxlamaq olar.

Bununla birlikdə sonlu modeldə predikatlar cəbri düsturlarının ümumqiymətliliyi və ya yerinə yetirilənliyi məsələsi mülahizələr cəbrində düsturların eyniliklə doğruluğu və ya yerinə yetirilənliyi məsələsinə gətirilir.

Həqiqətən, fərz edək ki, α düsturu və $M = \{a_1, ..., a_n\}$ çoxluğu verilmişdir. Onda α düsturuna mülahizələr cəbrinin elə α' düsturunu qarşı qoymaq olar ki, α' düsturunun yerinə yetirilənliyindən əsas çoxluğu M olan elə bir μ modelinin varlığı nəticəsi çıxır ki, bu modeldə α düsturunun yerinə yetirilənliyi alınır.

Verilmiş α düsturuna uyğun α' düsturunun necə qurulması metodunu aşağıdakı konkret misal üzərində aydınlaşdıraq.

Misal 1. Tutaq ki, predikatlar cəbrinin

$$\alpha = (\exists x_1)(\forall x_2)(R_1^2(x_1, x_2) \wedge R_1^2(x_1, x_1) \vee R_2^2(x_1, x_2))$$

düsturu verilmişdir. $M = \{a_1, a_2\}$ olsun.

α düsturu $R_1^{(2)}$ və $R_2^{(2)}$ kimi iki predikat dəyişənini özündə saxlayır. Ona görə də μ modelinə F_1^2 və F_2^2 kimi iki predikat daxil edək.

Aşağıdakı inikasları siqnatur inikas hesab edə bilərik:

$$\sigma R_1^2 = F_1^2 \ , \ \ \sigma R_2^2 = F_2^2 .$$

Onda $\sigma\alpha = (\exists x_1)(\forall x_2)(F_1^2(x_1, x_2) \wedge F_1^2(x_1, x_1) \vee F_2^2(x_1, x_2))$ olar.

$$\beta(x_1, x_2) = (\forall x_2)(F_1^2(x_1, x_2) \wedge F_1^2(x_1, x_1) \vee F_2^2(x_1, x_2))$$

olsun.

$\exists$ kvantorunun tərifinə görə $\sigma\alpha = (\exists x_1)\beta(x_1, x_2)$ düsturu μ modelində onda və yalnız onda yerinə yetirilən olar ki, $\beta(a_1, x_2) \vee \beta(a_2, x_2)$ düsturu həmin modeldə yerinə yetirilən olsun. Bu axırıncı düsturun yerinə yetirilənliyi isə öz növbəsində

$$\gamma(x_2) = (\forall x_2)(F_1^2(a_1, x_2) \wedge F_1^2(a_1, a_1) \vee F_2^2(a_1, x_2)) \vee$$
$$\vee (\forall x_2)(F_1^2(a_2, x_2) \wedge F_1^2(a_2, a_2) \vee F_2^2(a_2, x_2))$$

düsturunun yerinə yetirilən olması ilə eynigüclüdür. Digər tərəfdən $\forall$ kvantorunun tərifinə görə axırıncı düstur onda və yalnız onda yerinə yetirilən olar ki,

$$(F_1^2(a_1, a_1) \wedge F_1^2(a_1, a_1) \vee F_2^2(a_1, a_1)) \wedge$$
$$\wedge (F_1^2(a_1, a_2) \wedge F_1^2(a_1, a_1) \vee F_2^2(a_1, a_2)) \vee$$
$$\vee (F_1^2(a_2, a_1) \wedge F_1^2(a_2, a_2) \vee F_2^2(a_2, a_1)) \wedge$$
$$\wedge (F_1^2(a_2, a_2) \wedge F_1^2(a_2, a_2) \vee F_2^2(a_2, a_2)) \qquad (44.1)$$

düsturu yerinə yetirilən olsun.

(44.1) düsturuna daxil olan hər bir elementar düstur bir mülahizə ifadə edir, həm də predmet dəyişənlərinin M çoxluğundan götürülmüş eyni qiymətləri yığımına eyni bir mülahizə uyğundur.

Bunu nəzərə alsaq, (44.1) düsturu ilə eynigüclü

$$\alpha' = (y_1 \wedge y_1 \vee y_2) \wedge (y_3 \wedge y_1 \vee y_4) \vee (y_5 \wedge y_6 \vee y_7) \wedge (y_6 \wedge y_6 \vee y_8)$$

mülahizələr cəbri düsturu alarıq. Əgər burada

$$y_1 = y_3 = D \;;\; y_2 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = Y$$

qəbul etsək, $\alpha' = D$ olar. Buna uyğun olaraq F_1^2 və F_2^2 predikatları μ modelində belə təyin ediləcəkdir:

$$F_1^2(a_1, a_1) = F_1^2(a_1, a_2) = D,$$

$$F_1^2(a_2, a_1) = F_1^2(a_2, a_2) = F_2^2(a_1, a_1) =$$
$$= F_2^2(a_1, a_2) = F_2^2(a_2, a_1) = F_2^2(a_2, a_2) = Y.$$

Bu halda $\sigma\alpha = D$ olur və deməli, α düsturu μ modelində yerinə yetiriləndir.

Əgər α' düsturu eyniliklə doğru olarsa, onda α düsturu da μ modelində eyniliklə doğru olar.

II. Yuxarıda göstərdik ki, bəzi xüsusi hallarda düsturların ümumqiymətliliyi və yerinə yetirilənliliyi problemi həll olunandır.

Bu problem ancaq unar predikatları özündə saxlayan düsturlar üçün həll edilmişdir. Bu faktın isbatı aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem 1. Əgər ancaq unar predikatları özündə saxlayan predikatlar cəbri düsturu yerinə yetiriləndirsə, onda 2^n-dən çox olmayan sayda elementi özündə saxlayan sonlu modeldə də yerinə yetiriləndir.

Burada n - düstura daxil olan müxtəlif predikatların sayıdır.

Əvvəlcə şərtləşək ki, biz burada Y və D simvolları əvəzinə uyğun olaraq 0 və 1 simvollarından istifadə edəcəyik.

İsbatı. Tutaq ki, α ancaq

$$P_1, P_2, ..., P_n \qquad (44.2)$$

unar predikatları özündə saxlayan gətirilmiş ilkin normal formalı qapalı düsturdur (predikatlar cəbri düsturu heç bir sərbəst predmet dəyişənini özündə saxlamazsa, ona qapalı düstur deyirlər).

(44.2) predikatlarının asılı olduqları predmet dəyişənlərini uyğun olaraq

$$x_1, x_2, ..., x_n \qquad (44.3)$$

ilə işarə edək. Onda α düsturunu belə yaza bilərik:

$$\alpha : (\delta_1 x_1)(\delta_2 x_2)\cdots(\delta_n x_n)\beta(P_1(x_1), ..., P_n(x_n)). \quad (44.4)$$

Burada δ_i-lər ümumilik və ya varlıq kvantorları, β isə α düsturunun matrisidir.

İndi tutaq ki, α düsturu hər hansı μ modelində yerinə yetiriləndir. Bu o deməkdir ki, μ modelinin elə $F_1, F_2, ..., F_n$ unar predikatları, həmçinin elə σ siqnatur inikas var ki, $\sigma P_i = F_i$ $(i = \overline{1, n})$ və $\sigma\alpha = 1$-dir. ε_i-lərin hər biri sıfır və ya vahidə bərabər olmaqla

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \tag{44.5}$$

ardıcıllığı düzəldək. μ modelinin M əsas çoxluğundan elə a elementlərini seçək ki, $F_i(a) = \varepsilon_i$ $(i = 1,2,...,n)$ olsun. Bütün belə $a \in M$ elementlərinin altçoxluğunu K_s (s-ikilik sistemində verilmiş $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ ədədinin onluq sistemdə yazılışıdır) ilə işarə edək. Aydındır ki, (44.5) şəklində olan bütün mümkün ardıcıllıqların sayı 2^n-dir. Müxtəlif s ədədləri üçün K_s altçoxluqlarının ortaq elementləri yoxdur, lakin ola bilər ki, onlardan bəziləri boş olsun. Ona görə də boş olmayan K_s altçoxluqlarının m sayı 2^n-dən çox ola bilməz. Bütün bu boş olmayan K_s altçoxluqları çoxluğunu M'-lə işarə edək və M' çoxluğunda

$$F_1', F_2', ..., F_n' \tag{44.6}$$

predikatlarını belə təyin edək: $F_i'(K_s) = \varepsilon_i'$, onda və yalnız onda ki, $a \in M$ və $a \in K_s$ elementi üçün $F_i(a) = \varepsilon_i$ olsun.

$$\mu' = < M'; F_1', F_2', ..., F_n' >$$

modelinə baxaq. Əgər σ' siqnatur inikas elədirsə ki, $\sigma' P_i = F_i'$, $(i = \overline{1, n})$, onda aşağıda göstərəcəyimiz kimi $\sigma'\alpha = 1$ olar və deməli, α düsturu əsas çoxluğunun elementləri sayı 2^n-i aşmayan μ' modelində yerinə yetiriləndir. Axırıncı təklifin isbatını isə (44.4) düsturunda kvantorlar sayına görə induksiya metodu ilə aparaq.

1) Əvvəlcə göstərək ki, əgər α düsturunun əlavə-

sinin uzunluğu sıfra bərabər olarsa, onda o, μ' modelində yerinə yetiriləndir. (44.6) predikatlarının təyinindən belə çıxır ki, $\overline{F_i(a_i)}=1$ $(i=\overline{1,n})$ və ya

$$F_i(a_i)\vee F_j(a_j)=1$$

və yaxud da

$$F_i(a_i)\wedge F_j(a_j)=1$$

və $a_i\in K_{s_i}$, $a_j\in K_{s_j}$ isə onda uyğun olaraq $F_i'(K_{s_i})=1$,

$$F_i'(K_{s_i})\vee F_j'(K_{s_j})=1,\quad F_i'(K_{s_i})\wedge F_j'(K_{s_j})=1.$$

α düsturu μ modelində yerinə yetirilən olduğundan elə $a_1,a_2,...,a_n\in M$ elementləri var ki,

$$\sigma\alpha=\beta(F_1(a_1),...,F_n(a_n))=1\text{-dir.}$$

Ona görə də $a_i\in K_{s_i}$ $(i=1,...,n)$ olduqda $K_{s_1},...,K_{s_n}$ elementləri üçün

$$\sigma'\alpha=\beta(F_1'(K_{s_1}),...,F_n'(K_{s_n}))=1$$

olar. Baxılan hal üçün teorem isbat edilir.

2) Fərz edək ki, əlavəsinin uzunluğu n-dən kiçik olan hər bir α düsturunun μ modelində yerinə yetirilənli-yindən onun μ' modelində yerinə yetirilənliyi alınır.

Əlavəsinin uzunluğu n olan (44.4) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\alpha=(\delta_1x_1)\gamma(x_1),$$

harada ki,

$$\gamma(x_1)=(\delta_2x_2)...(\delta_nx_n)\beta(P_1(x_1)...P_n(x_n)).$$

Burada iki hal mümkündür: *a*) $\delta_1x_1=\forall x_1$, *b*) $\delta_1x_1=\exists x_1$.

α düsturunun $\sigma\alpha=\sigma(\delta_1x_1)\gamma(x_1)$ siqnatur inikası μ modelində yerinə yetirilən olduğundan $\sigma\gamma(a)=1$ olar. Bu axırıncı bərabərlik *a*) halında istənilən $a\in M$ elementi üçün, *b*) halında isə heç olmasa bir dənə $a\in M$ elementi üçün ödəniləcəkdir. Lakin γ düsturu əlavəsinin uzunluğu n-dən kiçikdir və induktiv fərziyyəyə görə $\sigma'\gamma(K_s)=1$ bərabərliyi *a*) halında istənilən $K_s \in M'$ elementi üçün, *b*) halında isə heç olmasa bir dənə $K_s \in M'$ elementi üçün ödəniləcək. Bu isə o deməkdir ki, α düsturu σ' siqnatur inikaslı μ' modelində yerinə yetiriləndir. Bununla teorem isbat olunur.

Teorem 2. Əgər yalnız unar predikatlar daxil olan α düsturu 2^n (burada n, α düsturuna daxil olan predikatların sayıdır) sayda elementi özündə saxlayan bütün yol verilən modellərdə eyniliklə doğrudursa, onda bu düstur ümumqiymətlidir.

İsbatı. Əksini fərz etmə metodu ilə aparaq. Tutaq ki, yalnız unar predikatları özündə saxlayan α düsturu əsas çoxluğunun elementləri sayı 2^n-i aşmayan hər bir μ modelində eyniliklə doğrudur, lakin ümumqiymətli deyildir. Bu halda α düsturu hər hansı modeldə yerinə yetirilən olar. Onda elementləri sayı 2^n-dən çox olmayan elə μ modeli tapmaq olar ki, teorem 1-ə görə $\overline{\alpha}$ düsturu həmin modeldə yerinə yetirilən olar. Buradan belə bir nəticə çıxır ki, α düsturu μ modelində eyniliklə doğru olmaz, çünki α düsturunun bu modeldə eyniliklə doğru olması üçün $\overline{\alpha}$ orada eyniliklə yalan olmalıdır. Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Alınan ziddiyyət əks fərziyyəmizin doğru olmadığını sübut edir. Deməli, α düsturu istənilən modeldə eyniliklə doğrudur.

Bu teoremdən aydın olur ki, predikatlar cəbrində yalnız biryerli predikatlardan asılı α düsturunun ümumqiymətli olub-olmadığını müəyyən etmək üçün onun əsas çoxluğunun elementləri sayı 2^n-dən çox olmayan hər hansı sonlu modeldə eyniliklə doğru olub-olmadığını yoxlamaq kifayətdir.

Beləliklə, ancaq biryerli predikat dəyişənlərini özündə saxlayan düsturların ümumqiymətliliyi məsələsi bu düsturun sonlu modellərdə eyniliklə doğruluğu məsələsinə gətirilir. Lakin istənilən predikatlar cəbri düsturunun eyniliklə doğruluğu problemi sonlu modellərdə həll olunduğundan ancaq unar predikatları özündə saxlayan predikatlar məntiqi düsturları üçün də ümumqiymətlilik problemi həll olunandır.

V FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. «x sadə ədəddir» xassəsini $S(x)$,
«x tək ədəddir» xassəsini $T(x)$,
«x cüt ədəddir» xassəsini $C(x)$,
«x müsbət ədəddir» xassəsini $M(x)$,
«x rasional ədəddir» xassəsini $R(x)$,
«x həqiqi ədəddir» xassəsini $H(x)$-lə işarə edək.

Aşağıdakı yazılışların hər birini Azərbaycan dilində ifadə edin. Alınan mülahizələrdən hansının doğru və hansının yalan olduğunu aydınlaşdırın.

$a)$ $S(5), S(9), S(4), S(12), S(19)$;

$b)$ $T(2), T(7), T(27), T(56)$;

$c)$ $C(4), C(11), C(17), C(22)$;

$d)$ $M(14), M(0), M(-5), M(\pi)$;

$e)$ $R\left(\frac{1}{2}\right), R(-8), R(\sqrt{2}), R\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$f)$ $H\left(\frac{3}{4}\right), H(\sqrt{2}-1), H(\pi), H(\pi^{\pi})$;

$h)$ $S(5)\wedge T(5), S(4)\vee C(17), M(0)\Rightarrow R(\sqrt{2})$.

2. Z tam ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş «x bərabərdir y-ə» mülahizə formasını $E(x,y)$, «x bölür y-i» mülahizə formasını $B(x,y)$, «x kiçikdir y-dən və ya bərabərdir y-ə» mülahizə formasını $K(x,y)$ ilə işarə edək.

$E(x,y)$, $B(x,y)$, $K(x,y)$ ikiyerli predikatlarından və kvantorlardan istifadə edərək Azərbaycan dilində yazılmış aşağıdakı mülahizələri predikatlar məntiqi dilində (düstur şəklində) yazın:

$a)$ hər bir ədəd özü-özünə bərabərdir.

$b)$ hər bir ədəd özü-özünü bölür.

$c)$ hər bir ədəd özü-özündən kiçik və ya bərabərdir.

$d)$ x ədədi y-ə bərabərdirsə, onda y ədədi də x-ə bərabərdir.

$e)$ x ədədi y-i bölürsə, onda y ədədi də x-i bölür.

$f)$ x ədədi y-i bölürsə və y ədədi də x-i bölürsə, onda x və y ədədləri bərabərdir.

$g)$ 1 istənilən ədədi bölür.

$h)$ istənilən ədəd 0 ədədini bölür.

$i)$ x ədədi y ədədindən kiçik və ya ona bərabərdirsə və tərsinə y ədədi də x-dən kiçik və ya ona bərabərdirsə, onda x və y ədədləri bərabərdir.

$j)$ vahiddən fərqli heç bir ədəd 1 ədədini bölmür.

$l)$ heç bir müsbət ədəd sıfırdan kiçik və ya ona bərabər deyil.

3. $M=\{a_1,a_2\}$ çoxluğunda $Q(x_1,x_2)$ predikatı özünün aşağıdakı doğruluq cədvəli ilə verilir.

x_1	x_2	$Q(x_1,x_2)$
a_1	a_1	D
a_1	a_2	Y

a_2	a_1	Y
a_2	a_2	D

Aşağıdakı düsturların hər birinin doğruluq qiymətini təyin edin:

$a)$ $(\exists x_1)Q(x_1,a_1)$; $(\forall x_2)Q(a_2,x_2)$; $(\forall x_1)Q(x_1,a_1)$.

$b)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)Q(x_1,x_2)$; $(\forall x_2)(\forall x_1)Q(x_1,x_2)$; $(\forall x_2)(\exists x_1)Q(x_1,x_2)$.

$c)$ $(\exists x_1)(\exists x_2)Q(x_1,x_2)$; $(\exists x_2)(\exists x_1)Q(x_1,x_2)$; $(\forall x_1)(\exists x_2)Q(x_1,x_2)$.

4. Z tam ədədlər çoxluğunda $T(x_1,x_2,x_3)$ və $V(x_1,x_2,x_3)$ üçyerli predikatlarını uyğun olaraq «toplama» və «vurma» predikatları adlandıraq və aşağıdakı kimi təyin edək:

$$T(x_1,x_2,x_3)=D \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2 \ ;$$

$$V(x_1,x_2,x_3)=D \Leftrightarrow x_3 = x_1 \cdot x_2 \ .$$

Aşağıdakı düsturların hər birinin tam ədədlər çoxluğunda hansı xassəni ifadə etdiyini aydınlaşdırın və verilən çoxluqda onun doğru olub-olmadığını izah edin.

$a)$ $(\exists x_2)(\forall x_1)T(x_1,x_2,x_1)$;

$b)$ $(\exists x_2)(\forall x_3)V(x_3,x_2,x_3)$;

$c)$ $(\forall x_1)(\forall x_3)(\exists x_2)T(x_1,x_2,x_3)$;

$d)$ $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)V(x_1,x_2,x_3)$;

$e)$ $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)T(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow V(x_1,x_2,x_3)$.

5. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ çoxluğunun A^2 Dekart hasilində $E(x,y)$ və $B(x,y)$ predikatlarını çalışma 2-də olduğu kimi təyin edək.

$a)$ $E(x,y)$; $B(x,y)$; $\overline{E(x,y)}$; $\overline{B(x,y)}$;

$b)$ $E(x,y) \vee B(x,y)$; $E(x,y) \wedge B(x,y)$;

$c)$ $E(x,y) \Rightarrow B(x,y)$; $B(x,y) \Rightarrow E(x,y)$

predikatlarının doğruluq oblastlarını tapın.

6. Aşağıdakı düsturların hər birinə dəyişənlərin sərbəst və ya əlaqəli daxil olmalarını göstərin.

$a)$ $(\forall x)\,A(x,y)$;

$b)$ $(\exists y)\,B(x,y)$;

$c)$ $A(x,y) \Rightarrow (\exists x)\,B(x,y)$;

$d)$ $(\forall x) A(x,y) \vee (\exists y)\,B(x,y)$;

$e)$ $(\exists x)(A(x,y) \wedge B(x,y))$;

$f)$ $(\forall x)(\exists y)(A(x,y) \Rightarrow B(z,y))$.

7. Bilavasitə predikatın və predikatlar üzərində əməllərin tərifindən istifadə edərək bu fəslin 38-ci paraqrafında verilmiş (38.4) - (38.7) eynigüclülüklərini isbat edin.

8. İsbat edin ki, predikatlar məntiqinin istənilən düsturunda eyni adlı iki yanaşı kvantorun yerini dəyişmək olar, lakin müxtəlif adlı kvantorların yerini həmişə dəyişmək olmaz.

9. İsbat edin ki, mülahizələr cəbrində fəaliyyət göstərən de Morqan qanunları predikatlar cəbrində də öz qüvvəsində qalır.

10. Göstərin ki, əgər predikatlar cəbrinin $\alpha(x)$ düsturu z dəyişənini özündə saxlamırsa, β isə ixtiyari düsturdursa, onda

$$(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall z)\beta(z) \equiv (\forall x)(\forall z)(\alpha(x) \vee \beta(z))$$

$$(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists z)\beta(z) \equiv (\exists x)(\exists z)(\alpha(x) \wedge \beta(z))$$

eynigüclülükləri doğrudur.

11. Əvvəlcə $\overline{(\exists x)\alpha(x)} \equiv (\forall x)\overline{\alpha(x)}$ eynigüclülüyünü misallarla əsaslandırın, sonra isə isbat edin.

12. Aşağıdakı predikatlar məntiqi düsturlarını ilkin normal formaya gətirin.

$a)$ $(\forall x)(\exists y)(A(x,y) \Rightarrow \overline{(\exists z)(B(x,z) \wedge C(y,z))}$;

$b)$ $\overline{(\exists x)(\exists y) A(x,y,z) \vee B(x,y)} \Rightarrow \overline{(\forall z) C(x) \wedge (\forall y) D(y)}$;

c) $(\forall x)(\forall y)(A(x,y,u,v) \Rightarrow (\forall u)B(u,v)) \Rightarrow (\exists v)C(x,y,v)$.

13. Predikatlar məntiqi simvollarından istifadə edərək:

a) Ədədi ardıcıllığın limitinin tərifini;

b) Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifini;

c) Sadə ədədin tərifini;

d) İki tam ədədin ƏBOB-nun tərifini;

e) Düz xətt və müstəvinin paralelliyinin tərifini;

f) Paralellik aksiomunu

predikatlar məntiqi düsturu şəklində yazın.

14. Aşağıdakı təklifləri predikatlar məntiqi dilində yazın və onlara əks olan təklifləri qurun:

a) $[a,b]$ parçasında diferensiallanan $f(x)$ funksiyası həmin parçada kəsilməyəndir.

b) Əgər düz xətt müstəvi üzərində iki kəsişən düz xəttə perpendikulyardırsa, onda həmin düz xətt müstəviyə də perpendikulyardır.

c) Verilmiş a tam ədədi onda və ancaq onda 3-ə bölünər ki, onun rəqəmlərinin cəmi 3-ə bölünsün.

15. $x^2 - 25 = 0$ və $x^4 - 25 = 0$ tənliklərinə uyğun olaraq $P(x)$ və $Q(x)$ predikatlarını qarşı qoyaq. İsbat edin ki, $P(x)$ və $Q(x)$ predikatları R həqiqi ədədlər çoxluğunda eynigüclüdür, lakin C kompleks ədədlər çoxluğunda eynigüclü deyildir.

Fərz edək ki, $P(x,y)$ və $Q(x,y)$ predikatları C kompleks ədədlər çoxluğunda aşağıdakı tənliklər şəklində verilmişdir:

$$P(x,y) \equiv D \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5,$$

$$Q(x,y) \equiv D \Leftrightarrow x \cdot y = 2.$$

$P(x,y) \wedge Q(x,y)$ və $P(x,y) \vee Q(x,y)$ predikatlarının doğruluq oblastlarını tapın.

17. Həqiqi ədədlər çoxluğunda verilmiş $P(x)$ biryerli predikatını $P(x) \equiv (\sin x + \cos x = \sqrt{2})$ şəklində təyin edək.

$P(x)$ predikatının doğruluq oblastını tapın.

18. R həqiqi ədədlər çoxluğunun R^2 Dekart hasilində təyin edilmiş $P(x,y)$ və $Q(x,y)$ predikaları uyğun olaraq aşağıdakı bərabərsizliklərlə verilmişdir:

$$P(x,y) \equiv (x^2 + y^2 \leq 2),$$

$$Q(x,y) \equiv (x + y > 2)$$

a) İsbat edin ki, $\{(x,y)/P(x,y) \wedge Q(x,y)\} = \varnothing$

b) $\{(x,y)/P(x,y) \vee Q(x,y)\}$ çoxluğunu həndəsi göstərin.

19. Tutaq ki, ν natural ədədlər hesabı və

$$\alpha = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P_1^2(x,y) \wedge P_1^3(x,y,z) \Rightarrow \overline{P_2^3(x,y,z)})$$

düsturu verilmişdir.

α düsturu siqnaturasının ν modeli siqnaturasına inikaslarını və hər bir siqnatur inikasda α düsturunun obrazını tapın.

20. Fərz edək ki, μ modelinin əsas çoxluğu $M = \{1,2,3,4,5\}$, əsas predikatları isə

$$F_1^1(x) = D \Leftrightarrow x \text{ — sadə ədəddir;}$$

$$F_2^1(x) = D \Leftrightarrow x \text{ — tam ədəddir;}$$

$$F_1^2(x,y) = D \Leftrightarrow x = y;$$

$$F_2^2(x,y) = D \Leftrightarrow x^2 = y$$

kimi verilmişdir. Onda

a) μ modelinin

$$\alpha = (\forall x)(P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)) \wedge (\exists y)P_1^2(x,y)$$

düsturu üçün yol verilən olduğunu göstərin;

b) α düsturu siqnaturasının μ modeli siqnaturasına bütün mümkün olan inikaslarını və bu inikaslarda α düsturunun obrazını tapın;

c) Elə bir siqnatur inikas göstərin ki, α düsturunun obrazı doğru mülahizəyə çevrilsin.

21. Tutaq ki, Z, Q, R uyğun olaraq tam rasional və həqiqi ədədlər çoxluğu, $B(x,y)$, $T(x,y,z)$, $V(x,y,z)$ isə uyğun olaraq bərabərlik, toplama və vurma predikatlarıdır.

Göstərin ki, $\zeta =< Z;B,T,V >$ modeli $\chi =< Q;B,T,V >$ modelinin altmodeli, χ isə öz növbəsində $\rho =< R;B,T,V >$ modelinin altmodelidir.

22. Göstərin ki,

$$\alpha = (\forall u)(\forall v)(T(x,u,v) \Rightarrow T(y,u,v))$$

düsturu yuxarıdakı misalda qurulmuş ζ, χ və ρ modellərində onda və ancaq onda doğru olar ki, $x = y$ olsun.

23. Bir dənə x sərbəst dəyişənindən asılı elə düstur yazın ki, Z tam ədədlər hesabı modelində ancaq və ancaq $x = 1$ olduqda doğru olsun.

24. İki x və y sərbəst dəyişənlərindən asılı elə düstur düzəldin ki, o, ρ (həqiqi ədədlər hesabı) modelində onda və ancaq onda doğru olsun ki, $x \le y$ şərti ödənsin.

25. İsbat edin ki, $P(x)$ və $Q(y)$ ixtiyari biryerli predikatlar olduqda $P(x) \Rightarrow (Q(y) \Rightarrow P(x))$ düsturu istənilən modeldə eyniliklə doğrudur.

26. İsbat edin ki, $P(x,y)$ və $Q(x,y)$ predikatları üçün

$$(P(x,y) \wedge \overline{P(x,y)}) \Rightarrow (Q(x,y) \Rightarrow \overline{Q(x,y)})$$

düsturu ümumqiymətlidir.

27. İsbat edin ki, kvantorlardan azad hər bir predikatlar məntiqi düsturu onda və ancaq onda ümumqiymətli olar ki, o, mülahizələr cəbrinin eyniliklə doğru düsturundan əvəzetmə nəticəsində alınmış olsun.

28. Göstərin ki, predikatlar məntiqinin

$$(\forall x)P(x) \wedge \overline{(\exists y)P(y)}$$

düsturu yerinə yetirilən deyil.

29. $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge \overline{P(x,y)})$ düsturunun eyniliklə yalan olduğunu isbat edin.

30. Tutaq ki, N natural ədədlər çoxluğu, $R(x,y)$ isə bu çoxluqda $R(x,y) = D \Leftrightarrow x \leq y$ kimi təyin edilmiş ikiyerli predikatdır. İsbat edin ki,

$$(\exists x)(\forall y)R(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R(x,y)$$

düsturu $v =< N, R >$ modelində eyniliklə doğru,

$$(\forall x)(\exists y)R(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)R(x,y)$$

düsturu isə eyniliklə yalandır.

31. $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge B(x,y))$ düsturunun $\mu =< \{1,2\}$; «x sadə ədəddir», $x = y >$ modelində doğru və ya yalan olduğunu aydınlaşdırın.

32. İsbat edin ki,

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)((F(x_2,x_3) \Rightarrow F(x_1,x_3)) \Rightarrow (F(x_1,x_1) \Rightarrow F(x_2,x_1)))$$

düsturu istənilən sonlu modeldə ümumqiymətlidir, lakin heç bir sonsuz modeldə ümumiqiymətli deyil.

33. Göstərin ki,

$$((\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) \wedge (\forall x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2)) \Rightarrow \overline{P(x_1,x_2)} \wedge$$
$$\wedge (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(P(x_1,x_2) \Rightarrow (P(x_2,x_3)) \Rightarrow P(x_1,x_3)))$$

düsturu hər hansı sonsuz modeldə yerinə yetiriləndir, lakin heç bir sonlu modeldə yerinə yetirilən deyil.

VI FƏSİL.

BİRİNCİ TƏRTİB NƏZƏRİYYƏLƏR.

§45. Nəzəriyyənin dili

Hər bir riyazi nəzəriyyə qurularkən müəyyən simvollardan istifadə edilir ki, onları da ümumi halda həriflər adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Məsələn, tam ədədlər hesabını qurduqda onun simvolları olaraq 0,1,…,9 kimi işarə olunan rəqəmlər, $+, -, \cdot$ kimi əməl işarələri, habelə (-sol və)-sağ mötərizələrdən istifadə edirik. Verilmiş nəzəriyyə üçün qəbul edilmiş həmin bu simvollardan müxtəlif ifadələr (bir sətirdə soldan sağa yazılmış sonlu simvollar ardıcıllığı) düzəldilir. Bu ifadələri nəzəriyyənin sözləri adlandırırlar. Məsələn, (0+2)—3, (5+9)·3 + 4 və s. tam ədədlər hesabının sözləridir.

Bundan sonra quracağımız nəzəriyyənin dilini müəyyən etmək zərurəti qarşıya çıxır. Bu dil formallaşdırılmış dil və ya sintaksis adlanır.

Tərif 1. Müxtəlif $a, b, c, \ldots$ simvollarının sonlu $M = \{a,b,c,\ldots\}$ çoxluğu əlifba, oraya daxil olan simvollar isə bu əlifbanın hərfləri adlanır.

Tərif 2. M əlifbasının hərflərinin hər bir sonlu ardıcıllığına əlifbanın sözü deyilir.

Tərif 3. Verilmiş M əlifbasının bütün sözlərinin S_M çoxluğuna M əlifbası üzərində formallaşdırılmış dil və ya birinci tərtib dil deyilir.

Quracağımız birinci tərtib nəzəriyyəni K nəzəriyyəsi adlandıraq və onun əlifbasına $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kimi işarə edilmiş predmet dəyişənlərini, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ kimi predmet konstantlarını, $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_k^j$ kimi predikat hərflərini, $f_1^1, f_2^2, \ldots, f_l^r$ kimi funksional hərfləri, $\rceil, \Rightarrow$ kimi propozisional əlaqələri (-sol və)-sağ mötərizələri, habelə $\forall$ kvantorunu daxil edək.

Qeyd edək ki, predikat və funksional hərflərin yuxarı indeksləri uyğun olaraq onların yerlərini və ya asılı olduqları arqumentlərin sayını göstərir. Aşağı indekslər isə eyni sayda yerdən və ya arqumentdən asılı predikat və funksional hərfləri fərqləndirmək üçündür.

Bu nəzəriyyədə $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \Leftrightarrow y)$ kimi yazılışlardan tez-tez istifadə edəcəyik. Ancaq burada təsadüf etdiyimiz $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ simvollarını biz nəzəriyyənin əlifbasının əsas simvolları siyahısına daxil etməmişik. Eləcə də bəzi hallarda latın əlifbasının birinci tərtib nəzəriyyənin əlifbasına daxil olmayan başqa hərflərindən də istifadə edəcəyik.

Qeyd edək ki, $(x \wedge y), (x \vee y), (x \Leftrightarrow y)$ ifadələrini uyğun olaraq

$$\rceil(x \Rightarrow \rceil y),\ (\rceil x \Rightarrow y),\ (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$$

sözlərinin qısa yazılışı kimi nəzərdə tutacağıq. Həmçinin, $\exists$ simvolunu nəzəriyyənin əlifbasına daxil etmədiyimizə görə, məsələn, $(\exists x)A_1^1(x)$ yazılışını $\rceil((\forall x)(\rceil A_1^1(x))$-in qısa yazı-lışı kimi başa düşəcəyik.

Bir də onu qeyd edək ki, zəruri olduğu halda biz nəzəriyyədə başqa əlifbanın hərflərindən və sözlərindən istifadə edəcəyik ki, bunlara da metahərf və metasözlər de-yirlər. Məsələn, α hərfi Azərbaycan dili əlifbası üçün meta-hərf, «ëj» sözü isə bu əlifba üzərində dil üçün metasözdür.

§46. Nəzəriyyədə term və düstur anlayışı

Birinci tərtib nəzəriyyədə və habelə bu nəzəriyyəni daxilinə alan hər bir riyazi nəzəriyyədə predmet dəyişənləri, predmet konstantları və onlara tətbiq olunmuş funksional hərfləri ümumi bir term adı altında birləşdirirlər.

Daha dəqiq desək:

a) Bütü predmet dəyişənləri və predmet konstantları termlərdir.

b) Əgər f_i^n $(i,n \geq 1)$ funksional hərf, $t_1,t_2,...,t_n$ termlərdirsə, onda $f_i^n(t_1,t_2,...,t_n)$ da termdir.
c) Ancaq və ancaq o ifadələr termlərdir ki, onlar *a*) və *b*) şərtlərini ödəyirlər.

Tərifdən aydındır ki, məsələn, x_2 və a_1 termlərdir. Bu termlərdən f_1^1 və f_1^2 funksional hərflərin tətbiqi vasitə-silə alınan $f_1^1(x_2)$ və $f_1^2(f_1^1(x_2),a_1)$ də termlərdir.

A_i^n predikat hərflərinin termlərə tətbiqi elementar düsturlar doğurur.

Başqa sözlə, əgər A_i^n predikat hərfi $t_1,t_2,...,t_n$ isə termlərdirsə, onda $A_i^n(t_1,t_2,...,t_n)$ elementar düstur adlanır.

Birinci tərtib nəzəriyyədə düstur ümumi şəkildə aşağıdakı kimi təyin edilir.

a) bütün elementar düsturlar birinci tərtib nəzəriyyənin düsturlarıdır. Düsturları biz $\alpha, \beta, \gamma,...$ hərfləri ilə işarə edəcəyik.

b) α və β düsturlardırsa, onda $\rceil\alpha$ və $(\alpha \Rightarrow \beta)$ düsturdur.

c) y, α düsturuna daxil olan predmet dəyişəni olarsa, onda $(\forall y)\alpha$ düsturdur.

d) Ancaq və ancaq o obyektlər birinci tərtib nəzəriyyənin düsturlarıdır ki, onlar *a*) — *c*) qaydaları ilə alınır.

Tərifə görə, məsələn, A_1^2 ikiyerli predikatın x_1 və $f_1^2(a_1,x_2)$ termlərinə tətbiqi nəticəsində alınan $A_1^2(x_1,f_1^2(a_1,x_2))$ ifadəsi *a*) bəndinə görə birinci tərtib nəzəriyyənin düsturudur. $(\forall x_2)A_1^2(x_1,f_1^2(a_1,x_2))$ də *c*) bəndinə görə nəzəriyyənin düsturudur. $A_2^2(x_2,x_3)$ yenə də *a*) bəndinə görə düsturdur.

$$\rceil(A_2^2(x_2,x_3) \Rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_2,f_1^2(a_1,x_2)))$$

ifadəsi düsturun tərifindəki *b*) bəndinə görə bu nəzəriyyənin düsturudur və s.

Beləliklə, nəzəriyyənin istənilən sözünün düstur olub-olmaması tamamilə müəyyən olur. Qeyd etmək lazım-dır ki, hər bir konkret nəzəriyyədə predikat hərflərinin, funksional hərflərin, predmet dəyişənlərinin və konstantların bir və ya bir neçəsi iştirak etməyə bilər.

Deməli, müxtəlif birinci tərtib nəzəriyyələr bir-birindən onun əlifbasına daxil olan simvolların tərkibi ilə də fərqlənə bilər. Buradan aydın olur ki, xüsusi nəzəriyyələrin term və düsturlarının qurulmasında ancaq o simvollar iştirak edəcəkdir ki, onlar nəzəriyyənin əlifbasına daxil olsunlar. Əgər işin sonrakı gedişində hər hansı məqsəd üçün (məsələn, işarələmələr, sadələşdirmələr və s.) başqa əlifbanın simvollarından, yaxud sözlərindən istifadə ediriksə, bu yeni daxil edilmiş simvollar və sözlər məhz yuxarıda haqqında danışdığımız metasimvollar və metasözlərdir.

Bu paraqrafın sonunda daha bir mühüm anlayış, t terminin α düsturunda y dəyişəni üçün sərbəst term olması anlayışını verək.

Fərz edək ki, t termi y dəyişənini özündə saxlayır, x dəyişəni isə α düsturuna daxildir. Əgər x dəyişəninin α düsturuna heç bir sərbəst daxil olması $\forall y$ kvantorunun təsir oblastında yerləşmirsə, onda t terminə α düsturunda x dəyişəni üçün sərbəst term deyilir. Başqa sözlə t termi x dəyişəni üçün α düsturunda yalnız o halda sərbəst term hesab edilir ki, bu dəyişənin α düsturuna bütün daxil olmaları t terminin asılı olduğu dəyişənlərin əlaqələndiyi kvantorların təsir oblastına düşməsin. Misal üçün, $A_1^2(x,y)$ düsturunda y termi x dəyişəni üçün sərbəstdir, lakin həmin term $(\forall y)A_1^2(x,y)$ düsturunda x dəyişəni üçün sərbəst deyildir.

§47. Nəzəriyyənin məntiqi və xüsusi aksiomları

İstənilən birinci tərtib nəzəriyyənin qurulmasında istifadə edilən aksiomlar iki qrupa bölünür: *məntiqi və xüsusi aksiomlar.*

I. *Məntiqi aksiomlar.* $\alpha, \beta, \gamma, ...$ birinci tərtib nəzəriyyənin istənilən düsturları olduqda aşağıdakı şəkildə qurulmuş düsturlar K nəzəriyyəsinin məntiqi aksiomları adlanır. Burada və bundan sonra sadəlik üçün xarici mötərizələri atacağıq.

(1). $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(2). $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

(3). $(\rceil\beta \Rightarrow \rceil\alpha) \Rightarrow ((\rceil\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta)$

(4). $(\forall x_1)\alpha(x_1) \Rightarrow \alpha(t_1)$.

Burada $\alpha(x_1)$ K nəzəriyyəsinin hər hansı düsturu, t isə $\alpha(x_1)$ düsturunda x_1 dəyişəni üçün sərbəst termdir. Xüsusi halda x_1 dəyişəni t ilə üst-üstə düşə bilər və onda

(4′). $(\forall x_1)\alpha(x_1) \Rightarrow \alpha(x_1)$

aksiomunu alarıq

(5). Əgər x_1 α-ya sərbəst predmet dəyişəni kimi daxil deyilsə, onda

$$(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\forall x_1)\beta).$$

II. *Xüsusi* (*qeyri-məntiqi*) *aksiomlardır* ki, onları ümumi halda ifadə etmək olmur, çünki onlar bir nəzəriyyədən başqa nəzəriyyəyə keçərkən dəyişir. Başqa sözlə hər bir konkret nəzəriyyənin özünün xüsusi aksiomları vardır.

Heç bir xüsusi aksioma malik olmayan birinci tərtib nəzəriyyəyə predikatlar hesabı deyirlər. Buradan aydın olur ki, predikatlar hesabı birinci tərtib nəzəriyyələrdən biridir.

Ona görə də predikatlar məntiqinin aksiomatik qurulmasına ayrıca yer vermədən ona birinci tərtib nəzəriyyələrin xüsusi halı kimi baxacağıq. Həm də istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə çıxarılan nəticələr və isbat edilən faktlar birinci tərtib predikatlar hesabına da aid ediləcəkdir.

§48. Birinci tərtib nəzəriyyədə əsas və əlavə çıxarılış qaydaları

Bütün birinci tərtib nəzəriyyələrin iki əsas çıxarılış qaydası vardır.

I. ***Modus ponens qaydası.*** α və $\alpha \Rightarrow \beta$-dan β alınır.

II. ***Ümumiləşmə qaydası.*** α -dan alınır ki, $(\forall x_i)\alpha$.

Birinci qaydanın təsir mexanizmi artıq mülahizələr hesabından bizə məlumdur.

İkinci qayda isə göstərir ki, əgər müəyyən bir mülahizə α düsturu üçün doğrudursa, onda o, $(\forall x_i)\alpha$ düsturu üçün də doğrudur. Göründüyü kimi bu qayda α düsturunu $\forall$ kvantoru ilə əlaqələndirir. Ona görə də bu qaydaya bəzən ümumilik kvantoru ilə əlaqələndirmə və ya ümumiləşmə qaydası da deyilir. Bir çox hallarda ona *Gen* (ingiliscə *Generalization* - ümumiləşmə sözünün ixtisarla yazılışıdır) qaydası da deyirlər.

Beləliklə, birinci tərtib nəzəriyyələrdə iki əsas çıxarılış qaydası fəaliyyət göstərir: *MP* və *Gen*.

İndi isə birinci tərtib nəzəriyyənin (predikatlar hesabının) bəzi əlavə çıxarılış qaydalarını qeyd edək.

Bu qaydalar əsas çıxarılış qaydaları kimi nəzəriyyədə yeni doğru düsturların düzəldilməsi, habelə formal isbatların və çıxarılışların qurulmasında mühüm rol oynayır. Belə əlavə çıxarılış qaydaları ilə biz mülahizələr hesabında tanış olmuşuq. Həmin qaydalar istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə saxlanılmaqla, burada biz $\forall$ və $\exists$ kvantorları ilə əlaqədar bəzi yeni çıxarılış qaydalarını göstərəcəyik.

III. *Fərdiləşmə qaydası.* Əgər t, $\alpha(x)$ düsturunda x dəyişəni üçün sərbəst termdirsə, onda

$$\frac{(\forall x)\alpha(x)}{\alpha(t)}.$$

IV. *Varlıq kvantoru ilə əlaqələndirmə qaydası.* t, $\alpha(x)$ düsturunda x dəyişəni üçün sərbəst termdirsə, onda

$$\frac{\alpha(t)}{(\exists x)\alpha(x)}.$$

Bu qaydaları gələcəkdə uyğun olaraq $\forall$ və $\exists$ qaydaları adlandıracağıq. Onların doğruluğunu göstərək.

$\forall$ qaydasının doğruluğu $(\forall x)\alpha(x)$ və $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(t)$ aksiomundan *MP* qaydasını tətbiq etməklə alınır.

$\exists$ qaydasının doğruluğunu isbat etmək üçün 4-cü aksiomun xüsusi halı olan

$$(\forall x)\rceil\alpha(x) \Rightarrow \rceil\alpha(t) \qquad (48.1)$$

düstundan isifadə edək. Bu düstura mülahizələr hesabından məlum olan $(A \Rightarrow \rceil B) \Rightarrow (B \Rightarrow \rceil A)$ tavtologiyasını tətbiq etsək,

$$((\forall x)\rceil\alpha(x) \Rightarrow \rceil\alpha(t)) \Rightarrow (\alpha(t) \Rightarrow \rceil(\forall x)\rceil\alpha(x)) \qquad (48.2)$$

olduğunu alarıq.

(48.1) və (48.2)-dən *MP* qaydasına görə

$$\alpha(t) \Rightarrow \rceil(\forall x)\rceil\alpha(x)$$

doğru düsturunu və buradan da $\rceil(\forall x)\rceil\alpha(x)$-i $(\exists x)\alpha(x)$-lə əvəz etməklə

$$\vdash \alpha(t) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$$

teoremini alarıq. Bu isə $\dfrac{\alpha(t)}{(\exists x)\alpha(x)}$ qaydasının doğru olduğunu göstərir.

V. *Seçmə qaydası.* Bu qayda $(\exists x)\alpha(x)$-dən $\alpha(a)$-ya keçmək imkanı yaradır.

Fərz edək ki, $(\exists x)\alpha(x)$ düsturunun doğruluğunu yəqin etmişik. Onda biz aşağıdakı kimi mühakimə edirik: tutaq ki, a elə obyektdir ki, $\alpha(a)$ düsturu doğrudur. Bu halda mühakiməni davam etdirərək elə bir düsturun doğruluğu nəticəsinə gəlirik ki, o ixtiyari seçilmiş a elementini özündə saxlayır. Onda $(\exists x)\alpha(x)$-in doğruluğundan $\alpha(a)$-nın doğruluğuna keçmiş oluruq. Bu cür təyin edilən qayda C qaydası adlanır (ingilis sözü olan *choice* — seçmə sözünün qısa yazılı-şıdır). Bu qaydaların geniş tətbiqi ilə biz sonrakı paraqraf-larda ətraflı tanış olacağıq.

§49. Birinci tərtib nəzəriyyələrə cəbrdən, riyazi analizdən və həndəsədən misallar

I. *Qrup nəzəriyyəsi.* Tutaq ki, K_1 nəzəriyyəsi bir dənə A_1^2 predikat hərfinə, bir dənə f_1^2 funksional hərfə və bir dənə a_1 predmet konstantına malikdir. Yəni $s=t$ ikiyerli predikatını $A_1^2(s,t)$ ilə, iki predmet dəyişənli $s+t$ funksiyasını $f_1^2(s,t)$ ilə və 0 (sıfır) xüsusi elementini a_1 predmet konstantı ilə işarə edək.

Aşağıdakı düsturları K_1 nəzəriyyəsinin xüsusi aksiomları olaraq qəbul edək.

a) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3),f_1^2(x_1,f_1^2(x_2,x_3)))$ — toplama əməlinin assosiativliyi.

b) $(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1,a_1),x_1)$ — sıfır ünsürünün varlığı.

c) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)$ — əks ünsürün varlığı.

d) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow A_1^2(x_2,x_1))$ — bərabərliyin simmet-rikliyi.

e) $(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_1)$ — bərabərliyin refleksivliyi.

f) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_2,x_3)\Rightarrow(A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_1,x_3)))$ —

bəra-bərliyin əvəz edilməsi.

$g)\ (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow(A_1^2(x_2,x_3)\Rightarrow(A_1^2(x_2,x_3)\Rightarrow A_1^2(x_1,x_3)))$ — bərabərliyin tranzitivliyi.

(49.1) — (49.5) məntiqi aksiomlarla birlikdə $a)$ — $g)$ xüsusi aksiomların təsvir etdiyi nəzəriyyənin hər bir modeli additiv qrupdur.

$f_1^2(s,t)=s+t$ toplama funksiyası əvəzinə $f_2^2(s,t)=s\cdot t$ vurma əməlini və 0 (sıfır) xüsusi elementi əvəzinə 1 elementini götürsək, multiplikativ qrup nəzəriyyəsi alırıq.

II. *Qismən nizamlama nəzəriyyəsi.* Tutaq ki, birinci tərtib K_2 nəzəriyyəsi yeganə A_1^2 predikatını özündə saxlayır və heç bir funksional hərfə və predmet konstantına malik deyildir. $A_1^2(x,y)$ predikatı olaraq $x<y$ münasibətini götürək. Onda aydındır ki, $\urcorner A_1^2(x,y)$ predikatı $x\not< y$ münasibətindən ibarət olacaqdır. Aşağıdakı düsturları nəzəriyyənin xüsusi aksomları olaraq qəbul edək:

$a)\ (\forall x_1)\ \urcorner A_1^2(x_1,x_1)$ — irrefleksivlik

$b)\ (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow(A_1^2(x_2,x_3)\Rightarrow A_1^2(x_1,x_3)))$ — tranzitivlik.

Aydın görmək olar ki, qurduğumuz nəzəriyyənin hər bir modeli qismən nizamlanmış strukturdur.

III. *İnikas nəzəriyyəsi.* Fərz edək ki, K_3 nəzəriyyəsinin əlifbasına daxil olan predmet hərfləri hər hansı S çoxluğunun $x_1,x_2,...$ altçoxluqlarından ibarətdir. Belə altçoxluqlar çoxluğunu $P(S)$-lə işarə edək. $P(S)$ çoxluğunda f_1^1 funksiyasını həmin çoxluğun özünə inikası kimi təyin edək.

Əlifbaya A_1^2 və A_2^2 kimi iki dənə ikiyerli predikat daxil edək.

f_1^1 funksiyası yuxarıda deyildiyi kimi $P(S)$ çoxluğunun x_1 elementini həmin çoxluğun x_2 elementinə çevirir. Bunu $x_2 = f_1^1(x_1)$ kimi göstərməyi şərtləşək. Yəni x_2 elementi x_1-in obrazıdır. A_1^2 və A_2^2 predikatları isə aşağıdakı şərtlərlə təyin edilsin.

$A_1^2(x_1,x_2)=D$ onda və ancaq onda ki, $x_1,x_2 \in P(S)$,

$A_2^2(x_1,x_2)=D$ onda və ancaq onda ki, $x_2 \subseteq x_1$.

Aşağıdakı düsturları K_3 nəzəriyyəsinin xüsusi aksiomları olaraq qəbul edək.

(a). $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_2, f_1^1(x_1))$

(b). $(\forall x_1)A_2^2(f_1^1(x_1), x_2)$

(c). $(\forall x_1)A_2^2((f_1^1(f_1^1(x_1)), f_1^1(x_1))$

(d). $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(x_2,x_1) \Rightarrow A_2^2(f_1^1(x_2), f_1^1(x_1)))$.

Bu cür qurulmuş nəzəriyyənin istənilən modeli inikas adlanır.

§50. Birinci tərtib nəzəriyyədə isbat və hipotezlərdən çıxarılış

Birinci tərtib nəzəriyyədə isbat bu nəzəriyyənin qurulması üçün istifadə olunan aksiomlara və orada fəaliyyət göstərən çıxarılış qaydalarına əsaslanır. Nəzəriyyədə β düsturunun isbat olunanlığının tərifi mülahizələr hesabında olduğu kimidir. Bunun kimi də β düsturunun $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ hipotezlərdən çıxarılan olması anlayışı yenə də orada olduğu kimi saxlanılır. Bundan əlavə əgər $\forall$ və $\exists$ qaydaları $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ düsturlarına sərbəst daxil olan heç bir predmet dəyişəninə tətbiq olunmursa, onda deyəcəyik ki, β düsturunun çıxarılışı zamanı $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ düsturlarının bütün sərbəst dəyişənləri qeyd olunmuş halda qalır.

β düsturunun $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ düsturları çoxluğundan elə çıxarılışı varsa ki, bu çıxarılışda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ düsturları-nın bütün sərbəst dəyişilənləri qeyd olunmuş halda qalır, onda deyəcəyik ki, β düsturu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ düsturlarından çıxarılıb və $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \vdash \beta$ kimi işarə edəcəyik. Buradan aydın olur ki, mülahizələr hesabı üçün isbat nəzəriyyəsində çıxarılan nəticələrin böyük əksəriyyətini avtomatik olaraq birinci tərtib nəzəriyyəyə, o cümlədən də, predikatlar hesabına köçürə bilərik. Məsələn, mülahizələr hesabında qurulmuş və ya doğruluğu aşkar edilmiş bütün isbat və çıxarılışlar predikatlar hesabında da doğrudur. Xüsusi halda, əgər β teoremi mülahizələr hesabında varsa, onda β istə-nilən birinci tərtib nəzəriyyədə də teoremdir. O cümlədən $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \vdash \beta$ çıxarılışı mülahizələr hesabında doğrudur-sa, onda birinci tərtib nəzəriyyədə də həmin çıxarılış doğrudur. Lakin əgər $\alpha \vdash \beta$ olarsa, onda $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ təklifi mülahizələr hesabında doğru olduğu halda deyə bilmərik ki, bu mülahizə istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə də doğru-dur. Başqa sözlə, mülahizələr hesabından bildiyimiz deduk-siya teoremini heç bir əlavə şərt qoymadan birinci tərtib nəzəriyyəyə köçürmək olmaz. Lakin bundan sonrakı paraq-rafda görəcəyik ki, həmin teoremi bir qədər zəif formada birinci tərtib nəzəriyyədə də isbat etmək olar.

İndi isə birinci tərtib nəzəriyyədə çıxarılışa aid misal göstərək.

Misal 1. $(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta), (\forall x_1)\alpha \vdash (\forall x_1)\beta$ olduğunu göstərək.

$\beta_1:$	$(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta)$,	hipotez
$\beta_2:$	$(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$	(4) aksiomlar sxemi
$\beta_3:$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$MP(\beta_1, \beta_2)$

$$
\begin{array}{lll}
\beta_4: & (\forall x_1)\alpha & \text{hipotez} \\
\beta_5: & (\forall x_1)\alpha \Rightarrow \alpha & \text{(4) aksiomlar sxemi} \\
\beta_6: & \alpha & MP(\beta_4,\beta_5) \\
\beta_7: & \beta & MP(\beta_3,\beta_6) \\
\beta_8: & (\forall x_1)\beta & Gen(\beta_7)
\end{array}
$$

$\beta_1 - \beta_8$ düsturlarından göründüyü kimi $(\forall x_1)\beta$ çıxarılışı qurulduqda *Gen* qaydasını tətbiq edərkən $(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta)$ və $(\forall x_1)\alpha$ düsturlarına sərbəst daxil olan heç bir dəyişən $\forall$ kvantoru ilə əlaqələndirilməmişdir. Ona görə də çıxarılış sxemi düzəldilərkən həmin dəylşənlər qeyd olunmuş halda qalırlar. Odur ki, $(\forall x_1)(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\forall x_1)\alpha \vdash (\forall x_1)\beta$ olur.

Çıxarılışa aid daha bir misal göstərək.

Misal 2. $(\forall x)(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)), (\forall x)\beta \vdash (\forall x)(\alpha \Rightarrow \gamma)$ olduğunu isbat edək.

$$
\begin{array}{lll}
\beta_1: & (\forall x)(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) & \text{hipotez} \\
\beta_2: & (\forall x)(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) & \text{(4) aksiomlar sxemi} \\
\beta_3: & (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) & MP(\beta_1,\beta_2) \\
\beta_4: & (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)) & \text{(2) aksiomlar sxemi} \\
\beta_5: & (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) & MP(\beta_3,\beta_4) \\
\beta_6: & (\forall x)\beta & \text{hipotez} \\
\beta_7: & (\forall x)\beta \Rightarrow \beta & \text{(4) aksiomlar sxemi} \\
\beta_8: & \beta & MP(\beta_6,\beta_7) \\
\beta_9: & \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) & \text{(1) aksiomlar sxemi} \\
\beta_{10} & \alpha \Rightarrow \beta & MP(\beta_8,\beta_9) \\
\beta_{11} & \alpha \Rightarrow \gamma & MP(\beta_5,\beta_{10}) \\
\beta_{12} & (\forall x)(\alpha \Rightarrow \gamma) & Gen(\beta_{11})
\end{array}
$$

§51. Deduksiya teoremi

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi mülahizələr hesabında isbat etdiyimiz deduksiya teoremini istənilən birinci tərtib nəzəriyyəyə mexaniki şəkildə köçürmək bəzən səhv nəticə-yə gətirə bilər. Məsələn, K nəzəriyyəsində istənilən α düs-turu üçün $\alpha \vdash (\forall x)\alpha(x)$ çıxarılışı doğru olduğu halda $\alpha \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$ bu nəzəriyyənin teoremi deyildir. Həqiqətən, tutaq ki, α düsturu heç olmasa iki elementi özündə saxlayan $D = \{a,b\}$ oblastında təyin edilmiş $F_1^1(x_1)$ predikatından ibarətdir. Fərz edək ki, $F_1^1(x_1)$ biryerli predikatı ancaq a elementi üçün doğru mülahizəyə çevrilən hər hansı xassəni ifadə edir. Bu halda aydındır ki, $F_1^1(a)$ mülahizəsi doğru, lakin $(\forall x_1)F_1^1(x_1)$ düsturu yalan olar. Ona görə də

$$\alpha(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)\alpha(x_1)$$

düsturu baxılan oblastda məntiqi ümumqiymətli olmaz.

Deməli,

$$\alpha(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)\alpha(x_1)$$

düsturu birinci tərtib nəzə-riyyənin teoremi deyildir.

Ancaq istənilən riyazi nəzəriyyələr üçün vacib olan və nəzəriyyənin çıxarılan düsturlarının alınmasında xüsusi əhəmiyyət kəsb edən bu teoremi əlavə şərtlər qoymaqla bu-rada da isbat etmək olar.

Bu əlavə şərt isə ondan ibarətdir ki, əgər $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ və α düsturlarından β düsturunun çıxarılması zamanı $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ və α düsturlarına sərbəst daxil olan bütün dəyi-şənlər qeyd olunmuş halda qalırsa, onda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha \vdash \beta$ çıxarılışından $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ çıxarılışına keçmək olar. Xüsusi halda, buradan belə bir nəticə çıxır ki, əgər β düs-turunun $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, α hipotezləri çoxluğundan çıxarılışı sxemi qurularkən ümumiləşmə qaydası tətbiq olunmamışdırsa, onda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ çıxarılışı doğrudur. Deməli, deduksiya teoremini mülahizələr hesabından istənilən birinci tərtib nəzəriyyəyə keçirərkən tələb olunan əlavə şərt *Gen* qaydasının tətbiqi nəticəsində meydana çıxır və bunu məhz teoremin ifadəsində nəzərə almaq lazım gəlir.

Deduksiya teoremi. Əgər $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \ \alpha \vdash \beta$ və $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \alpha\}$ çoxluğundan β düsturunun elə çıxarılışı vardırsa ki, bu çıxarılışda α düsturundan asılı olan bütün düsturlara ümumiləşmə qaydasını tətbiq edərkən α düsturuna sərbəst daxil olan bütün dəyişənlər qeyd olunmuş halda qalırlar, onda

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \vdash \alpha \Rightarrow \beta .$$

Teoremin isbatına keçməzdən əvvəl onun ifadəsində təsadüf etdiyimiz bir məsələni aydınlaşdıraq. «$\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_p, \alpha$ düsturlarından β düsturunun çıxarılışında β_i düsturu α düsturundan asılıdır» dedikdə nəzərdə tutacağıq ki,

(*a*) β_i α düsturu ilə üst-üstə düşür,

(*b*) β_i düsturu bu çıxarılışda heç olmasa biri α-dan asılı olan əvvəlki düsturlardan *MP* və ya *Gen* qaydalarının bilavasitə tətbiqi nəticəsində alınır.

Misal. α, $(\forall x_1)\alpha \Rightarrow \beta \vdash (\forall x_1)\beta$ çıxarılışını quraq.

$\beta_1:$	α	hipotez
$\beta_2:$	$(\forall x_1)\alpha$	$Gen(\beta_1)$
$\beta_3:$	$(\forall x_1)\alpha \Rightarrow \beta$	hipotez
$\beta_4:$	β	$MP(\beta_2, \beta_3)$
$\beta_5:$	$(\forall x_1)\beta$	$Gen(\beta_4)$

Burada β_1 düsturu (*a*)-ya görə α-dan asılıdır, β_2 düsturu (*b*)-yə görə α-dan asılıdır, β_3 düsturu yenə də (*a*) şərtinə görə $(\forall x_1)\alpha \Rightarrow \beta$-dan asılıdır, β_4 və β_5 düsturları (*b*) şərtinə görə α -dan və $(\forall x_1)\alpha \Rightarrow \beta$ -dan asılıdır.

İndi isə teoremin isbatına keçək.

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$ işarə edək və fərz edək ki, $S, \alpha \vdash \beta$. Tutaq ki, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m = \beta$ düsturları β -nın $\{S, \alpha\}$ düsturları çoxluğundan elə çıxarılışıdır ki, α düsturundan asılı olan bütün düsturlara *Gen* qaydasını tətbiq edərkən α -ya sərbəst daxil olan bütün dəyişənlər qeyd olunmuş halda qalır.

Göstərək ki, $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_m$.

Çıxarılışın uzunluğu olan m ədədinə görə riyazi induksiya metodunu tətbiq edək.

$m = 1$ olduqda göstərək ki, $S, \alpha \vdash \beta$ olmasından $S \vdash$ $\vdash \alpha \Rightarrow \beta_m$ alınır.

β_1 — çıxarılış sxeminin birinci düsturu olduğundan o, ya aksiomdur, yaxud da, S -ə daxil olan hipotezlərdən biridir və yaxud da elə α -nın özüdür. Birinci iki halda (51.1) aksiomlar sxeminə əsasən $\vdash \beta_1 \Rightarrow (\beta \Rightarrow \beta_1)$. Bu teoremdən və β_1 -dən *MP* qaydasına görə $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_1$ olduğunu alarıq.

β_1 düsturu α ilə üst-üstə düşdükdə $\vdash \alpha \Rightarrow \alpha$ teoreminə görə yenə də $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_1$ olduğunu alarıq.

Beləliklə, $m = 1$ olduqda teoremin isbatı aydındır.

İndi fərz edək ki, m -dən kiçik olan bütün natural ədədlər üçün teorem doğrudur. m ədədi üçün teoremin doğruluğunu isbat edək. Yəni göstərək ki,

$$S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_m. \qquad (51.1)$$

$\beta_m = \beta$ çıxarılışın axırıncı düsturu olduğundan ancaq aşağıdakı iki haldan biri mümkündür.

Birinci hal. Əgər β_m hər hansı iki β_i və β_j $(i, j < m)$ çıxarılış düsturlarından *MP* qaydası ilə alınmışdırsa və β_j

düsturu $\beta_i \Rightarrow \beta_m$ şəklindədirsə, bu halda induktiv fərziyyəmizə görə

$$S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_i \qquad (51.2)$$

və

$$S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_j \; . \qquad (51.3)$$

Lakin β_j düsturu $\beta_i \Rightarrow \beta_m$ şəklində olduğundan (51.3) çı-xarılışı

$$S \vdash \alpha \Rightarrow (\beta_i \Rightarrow \beta_m) \qquad (51.4)$$

şəklində olar.

Digər tərəfdən (51.2) aksiomlar sxeminə görə

$$\vdash \alpha \Rightarrow ((\beta_i \Rightarrow \beta_m) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta_m))). \qquad (51.5)$$

(51.4) və (51.5)-dən *MP* qaydasına əsasən alarıq:

$$S \vdash ((\alpha \Rightarrow \beta_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta_m)). \qquad (51.6)$$

Yenidən *MP* qaydasını (51.2) və (51.6)-ya tətbiq etsək,

$$S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_m \qquad (51.7)$$

olar.

İkinci hal. β_m düsturu çıxarılış sxeminin hər hansı β_r $(r < m)$ düsturundan *Gen* qaydası ilə alınmışdır. Fərz edək ki, β_m düsturu hər hansı β_r $(r < m)$ çıxarılış düsturuna $(\forall x_n)$ kvantorunu tətbiq etməklə alınır.

Yəni β_m düsturu $(\forall x_n)\beta_r$ şəklindədir. İnduktiv fərziyyəmizə görə $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_r$ və teoremin şərtinə görə β_r düsturu α-dan asılı deyil, yaxud da əgər asılıdırsa, onda x_n dəyişəni α-ya sərbəst daxil deyil. Bu halda β_r α düsturundan asılı deyilsə, onda hipotezlərin təkrar edilməsi qaydasına görə $S \vdash \beta_r$. Buraya *Gen* qaydasını tətbiq etsək, $S \vdash (\forall x_n)\beta_r$ və ya

$$S \vdash \beta_m \qquad (51.8)$$

olduğunu alarıq. Digər tərəfdən (51.1) aksiomlar sxeminə görə $\beta_m \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta_m)$ teoremdir. Bu teoremə və (51.8) çıxarılışına *MP* qaydasını tətbiq etsək, $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_m$ olar. Nəhayət, əgər x_n α düsturuna sərbəst dəyişən kimi daxil deyilsə, onda (51.5) aksiomlar sxeminə əsasən

$$(\forall x_n)(\alpha \Rightarrow \beta_r) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\forall x_n)\beta_r) \qquad (51.9)$$

düsturu birinci tərtib nəzəriyyənin teoremidir. Eyni zamanda $S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_r$ çıxarılışına *Gen* qaydasını tətbiq etməklə

$$S \vdash (\forall x_n)(\alpha \Rightarrow \beta_r) \qquad (51.10)$$

alarıq. (51.9) və (51.10)-dan *MP* qaydasına görə

$$S \vdash \alpha \Rightarrow (\forall x_n)\beta_r$$

və ya

$$S \vdash \alpha \Rightarrow \beta_m$$

alınır ki, bununla da teoremin isbatı başa çatır.

Misal. Deduksiya teoremindən istifadə edərək

$$\vdash (\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\forall x)(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x)\beta)$$

olduğunu isbat edək.

Əvvəlcə göstərək ki,

$$(\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta),\ (\forall x)(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\forall x)\beta$$

β_1:	$(\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta)$	hipotez
β_2:	$(\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$	(4) aksiomlar sxemi
β_3:	$\alpha \Rightarrow \beta$	$MP(\beta_1, \beta_2)$
β_4:	$(\forall x)(\neg\alpha \Rightarrow \beta)$	hipotez
β_5:	$(\forall x)(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta)$	(4) aksiomlar sxemi
β_6:	$\neg\alpha \Rightarrow \beta$	$MP(\beta_4, \beta_5)$
β_7:	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	tavtologiya
β_8:	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	$MP(\beta_3, \beta_7)$
β_9:	$(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha)$	tavtologiya

$\beta_{10}:$	$\rceil\beta \Rightarrow \rceil\rceil\alpha$	$MP(\beta_6, \beta_9)$
$\beta_{11}:$	$(\rceil\beta \Rightarrow \rceil\rceil\alpha) \Rightarrow ((\rceil\beta \Rightarrow \rceil\alpha) \Rightarrow \beta)$	(3) aksiomlar sxemi
$\beta_{12}:$	$(\rceil\beta \Rightarrow \rceil\alpha) \Rightarrow \beta$	$MP(\beta_{10}, \beta_{11})$
$\beta_{13}:$	β	$MP(\beta_8, \beta_{12})$
$\beta_{14}:$	$(\forall x)\beta$	$Gen(\beta_{13})$

Beləliklə, $(\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\forall x)(\rceil\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\forall x)\beta$. Deduksiya teoremini iki dəfə tətbiq etsək,

$$\vdash (\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\forall x)(\rceil\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x)\beta)$$

alarıq.

§52. Birinci tərtib nəzəriyyədə interpretasiya və interpretasiyada düsturların doğruluq qiymətləri

Nəzəriyyənin hər bir düsturunun yalnız onda mənası olar ki, oraya daxil olan simvollar müəyyən cür interpretasiya (şərh) olunsun.

Nəzəriyyənin düsturunun interpretasiyası dedikdə:

1) İnterpretasiya oblastı adlanan və boş olmayan elə M çoxluğunun verildiyini nəzərdə tutacağıq ki, düstura daxil olan predmet dəyişənləri həmin çoxluğun ünsürlərinə bərabər qiymətlər ala bilsin;

2) Düstura daxil olan a_i predmet konstantları M çoxluğunun hər hansı xüsusi elementləri kimi şərh edilsinlər;

3) Düstura daxil olan hər bir A_i^n predikat hərfi M çoxluğunda təyin edilmiş müəyyən bir n-yerli münasibət kimi;

4) Hər bir f_i^n funksional hərf M çoxluğunda verilmiş n-yerli əməl kimi şərh edilsin;

5) Düstura daxil olan $\rceil, \Rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists$ simvollarını predikatlar cəbrindən bildiyimiz mənada şərh edək.

Misal. Birinci tərtib nəzəriyyənin belə bir düsturuna baxaq:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\rceil A_1^2(x_3, a_1) \wedge A_2^2(x_3, x_1) \wedge$$
$$\wedge A_2^2(x_3, x_2)) \Rightarrow A_2^2(x_3, f_1^2(x_1, x_2)) . \qquad (52.1)$$

Bu düsturu aşağıdakı kimi interpretasiya edək:

1) Düsturun interpretasiya oblastı olaraq bütün tam ədədlər çoxluğunu götürək, yəni $M = Z$;

2) $A_1^2(u, v)$ predikatını $u = v$ münasibəti kimi və $A_2^2(u, v)$ predikatını u / v münasibəti kimi;

3) $f_1^2(x, y)$ funksiyasını $x + y$ binar əməli kimi;

4) a_1 predmet konstantını «sıfır» ədədi kimi;

5) $\rceil, \Rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists$ simvollarını isə predikatlar məntiqindən bildiyimiz mənada şərh edək.

Onda (52.1) qapalı düsturu ədədlər nəzəriyəsindən məlum olan və cəmin bölünmə əlaməti adlanan belə bir doğru mülahizə ifadə edəcəkdir: «Əgər ixtiyari x və y tam ədədləri üçün elə $z \neq 0$ ədədi varsa ki, bu ədədlərin hər birini bölür, onda z ədədi onların cəmini də bölür».

Ümumiyyətlə, birinci tərtib nəzəriyyənin düsturlarını interpretasiya edərkən sərbəst dəyişənsiz hər bir düstura (bəzən deyildiyi kimi qapalı düstura) doğru və ya yalan mülahizə kimi baxacağıq. Sərbəst dəyişənləri olan düstur isə M interpretasiya oblastında təyin edilmiş hər hansı münasibət təsvir edəcəkdir. Bu münasibət interpretasiya oblastından götürülmüş bəzi qiymətlər üçün doğru və bəzi qiymətlər üçün yalan ola bilər. Misal üçün, M interpretasiya oblastı olaraq R həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək. Bu çoxluqda $f_1^2(u, v)$ və $f_2^2(u, v)$ funksiyalarını uyğun olaraq e^{u+v} və $e^u \cdot e^v$ kimi şərh edək. A_1^2 bərabərlik predikatı, a_1 predmet konstantı isə 2 həqiqi ədədi olsun. Belə interpretasiyada

$$(\forall x_1)(A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),\ f_2^2(x_1,a_1)) \Rightarrow A_1^2(x_2,a_1))$$

düsturu həqiqi ədədlər çoxluğunda $x_2 = a_1$ münasibətini ifadə edəcəkdir ki, bu münasibət də $x_2 = 2$ qiymətində doğru mülahizə, $x_2 \neq 2$ qiymətlərində isə yalan mülahizəyə çevrilir.

İndi isə verilmiş interpretasiyada düsturların doğruluq qiymətləri və yerinə yetirilənliyi məsələsi ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, M oblastlı hər hansı interpretasiya verilmişdir. M çoxluğunun elementlərindən düzəldilmiş bütün hesabı ardıcıllıqlar çoxluğunu P ilə işarə edək.

Verilmiş interpretasiyada P-dən götürülmüş hər hansı $S = (b_1, b_2, \ldots)$ ardıcıllığında α düsturunun yerinə yetirilən olmasının nə demək olduğunu aydınlaşdıraq. Bunun üçün əvvəlcə qiymətləri M oblastından olan və bütün termlər çoxluğunda təyin olunmuş φ biryerli funksiyasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$a)$ t termi x_i dəyişənidirsə, onda $\varphi(t) = b_i$;

$b)$ t termi predmet konstantıdırsa, onda $\varphi(t)$ funksiyası bu konstantın M-dəki interpretsiyası ilə üst-üstə düşür;

$c)$ Əgər f_j^n M-də ψ əməli kimi interpretasiya olunursa və $t_1, t_2, \ldots, t_n$ isə termlərdirsə, onda

$$\varphi(f_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \psi(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n)).$$

Beləliklə φ, $S = (b_1, b_2, \ldots)$ ardıcıllığı ilə müəyyən olunan və bütün termlər çoxluğunu M çoxluğuna (və ya onun hissəsinə) inikas etdirən funksiyadır.

Məzmunlu desək, istənilən S ardıcıllığı və t termi üçün $\varphi(t)$ M çoxluğunun elə elementidir ki, bu element hər bir i üçün x_i dəyişənlərini t terminə daxil olduğu hər yerdə b_i-lərlə əvəz edib, sonra isə onlar üzərində bu termin asılı olduğu funksional hərflərin interpretasiya olunduğu bütün əməlləri aparmaq nəticəsində alınır.

Məsələn, əgər t termi $f_1^2(x_5, f_2^2(x_3, a_1))$ şəklində, interpretasiya oblastı Q rasional ədədlər çoxluğu, f_1^2, f_2^2 funksional hərfləri adi toplama və vurma əməlləri kimi, a_1 predmet konstantı isə 3 tam ədədi kimi interpretasiya olunursa, onda rasional ədədlərin hər bir

$$S = \left(\frac{n}{n+1}\right)_1^\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$$

ardıcıllığı üçün $\varphi(t)$ inikası

$$\varphi \,:\, f_1^2(x_5, f_2^2(x_3, a_1)) = f_1^2(b_5, f_2^2(b_3, a_1)) =$$

$$= f_1^2\left(\frac{5}{6}, f_2^2\left(\frac{3}{4}, 3\right)\right) = f_1^2\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{4}\cdot 3\right) = \frac{5}{6} + \frac{9}{4} = \frac{37}{12}$$

rasional ədədini təsvir edəcəkdir.

İndi isə birinci tərtib nəzəriyyədə düsturların yerinə yetirilənliyi və ümumqiymətliliyi üçün əlamətlər müəyyən edək.

1) Əgər α $A_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ elementar düsturundan ibarətdirsə, B_j^n isə verilmiş interpretasiyada ona uyğun münasibətdirsə, onda α düsturu S ardıcıllığında onda və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, $B_j^n(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n))$ münasibəti həmin ardıcıllıqda doğru olsun.

2) $\overline{\alpha}$ düsturu S ardıcıllığında onda və yalnız onda yerinə yetirilən olar ki, α düsturu S-də yerinə yetirilməyən olsun.

3) $\alpha \Rightarrow \beta$ düsturu S ardıcıllığında onda və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, α düsturu həmin ardıcıllıqda ye-

rinə yetirilməyən, yaxud β düsturu yerinə yetirilən olsun.

4) $(\forall x_i)\alpha$ düsturu S ardıcıllığında ancaq və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, α düsturu P-dən götürülmüş və S-dən ən çoxu i-ci komponenti ilə fərqlənən ixtiyari ardıcıllıqda yerinə yetirilən olsun.

Tərif 1. Əgər α düsturu verilmiş interpretasiyada P çoxluğundan götürülmüş istənilən ardıcıllıqda yerinə yetirilən olarsa, onda α düsturuna bu interpretasiyada doğru düstur deyilir.

Tərif 2. Əgər α düsturu P-dən götürülmüş istənilən ardıcıllıqda yerinə yetirilməyəndirsə, onda ona yalan düstur deyilir.

Düsturların yerinə yetirilənliyinin və ümumqiymətliliyinin tərifindən çıxan aşağıdakı nəticələri qeyd edək.

Nəticə 1. Heç bir düstur eyni bir interpretasiyada həm doğru həm də yalan ola bilməz.

Nəticə 2. α və $\overline{\alpha}$ düsturları verilmiş interpretasiyada eyni zamanda doğru ola bilməz.

Nəticə 3. Əgər verilmiş interpretasiyada α və $\alpha \Rightarrow \beta$ düsturları doğru olarsa, onda β düsturu doğru olar.

Nəticə 4. $\alpha \Rightarrow \beta$ düsturu verilmiş interpretasiyada onda və ancaq onda yalan olar ki, həmin interpretasiyada α doğru, β isə yalan olsun.

Nəticə 5. α düsturu verilmiş interpretasiyada onda və ancaq onda doğru olar ki, $(\forall x)\alpha$ düsturu həmin interpretasiyada doğru olsun.

Nəticə 6. Əgər α qapalı düsturdursa, onda ixtiyari interpretasiyada ya α yaxud da $\overline{\alpha}$ doğru düsturdur.

Qapalı olmayan düsturlar (yəni sərbəst dəyişənlər daxil olan düsturlar) ola bilər ki, bəzi interpretasiyalarda nə yalan, nə də doğru olsun. Məsələn, α düsturu $A_1^2(x_1, x_2)$ şəklində olsun. Oblastı bütün tam ədədlər çoxluğu olan hər hansı interpretasiyaya baxaq. Bu interpretasiyada $A_1^2(x_1, x_2)$ predikatını $x_1 < x_2$ münasibəti kimi qəbul edək.

Aydındır ki, α düsturu yalnız $b_1 < b_2$ şərtini ödəyən $S=(b_1,b_2,...)$ ardıcıllığında yerinə yetirilən olar. Deməli, baxdığımız interpretasiyada α düsturu nə doğru, nə də yalan düsturdur.

Tərif 3. Verilmiş birinci tərtib K nəzəriyyəsinin bütün aksiomlarının doğru olduğu hər bir interpretasiyaya onun modeli deyilir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz 3-cü və 5-ci nəticələrə əsasən deyə bilərik ki, əgər *MP* və *Gen* qaydalarını verilmiş interpretasiyada doğru olan düsturlara tətbiq etsək, yenə də həmin interpretasiyada doğru olan düsturlar alarıq. Bu o deməkdir ki, K nəzəriyyəsinin hər bir teoremi də onun istənilən modelində doğru olacaqdır.

§53. Birinci tərtib nəzəriyyədə ziddiyyətsizlik, tamlıq və həllolunma problemləri

İstənilən birinci tərtib nəzəriyyənin, o cümlədən də, predikatlar hesabının ziddiyyətsizliyi məsələsi müsbət həll olunur. Burada da ziddiyyətsizlik məsələsinin qoyuluşu mülahizələr hesabında olduğu kimidir.

Nəzəriyyədə biri digərinin inkarı olan iki düstur eyni zamanda isbat olunandırmı?

Tərif 1. Əgər nəzəriyyədə biri digərinin inkarı olan iki düstur eyni zamanda nəzəriyyənin teoremi olmazsa, onda belə nəzəriyyəyə ziddiyyətsiz nəzəriyyə, əks halda isə ziddiyyətli nəzəriyyə deyilir. Tərifdən aydın olur ki, ziddiyyətli nəzəriyyədə hər bir düsturun teorem olduğunu təsdiq etmək olar.

Doğrudan da, fərz edək ki, nəzəriyyənin α və $\overline{\alpha}$ düsturlarını onun aksiomlardan və çıxarılış qaydalarından istifadə etməklə isbat etmişik. β isə bu nəzəriyyənin ixtiyari düsturu olsun. Göstərək ki, β nəzəriyyənin teoremidir.

Bilirik ki, mülahizələr hesabı ziddiyyətsizdir. Ona görə də bu hesabın istənilən γ və δ düsturları üçün $(\gamma\wedge\overline{\gamma})\Rightarrow\delta$ hesabın teoremi olduğundan istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə teoremdir. Əgər bu düsturda γ-nı birinci tərtib nəzəriyyənin ixtiyari α düsturu ilə əvəz etsək, $(\alpha\wedge\overline{\alpha})\Rightarrow\delta$ teoremi alınar. Tamamlama qaydasını bu düstura tətbiq etsək, alarıq ki, δ nəzəriyyənin teoremidir. İndi δ hərfini birinci tərtib nəzəriyyənin ixtiyari β düsturu ilə əvəz etsək, $(\alpha\wedge\overline{\alpha})\Rightarrow\beta$ teoremi alınar. Yenə də tamamlama qaydasının tətbiqi nəticəsində alarıq ki, β da nəzəriyyənin teoremidir. Beləliklə, istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə hər hansı isbat olunmayan düsturun aşkar edilməsi onun ziddiyyətsizliyini sübut edir.

Aşağıdakı teorem predikatlar hesabı bazasında qurulmuş istənilən birinci tərtib nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyini isbat edir.

Teorem 1. İstənilən birinci tərtib nəzəriyyə ziddiyyətsizdir.

İsbatı. Birinci tərtib nəzəriyyənin bütün düsturları çoxluğunu mülahizələr hesabının düsturları çoxluğuna aşağıdakı kimi inikas etdirək.

Əgər α mülahizələr hesabının düsturudursa, onda ona α düsturunun özünü qarşı qoyaq.

Əgər α düsturunda kvantorlar və termlər iştirak edirsə, onda ona həmin düsturda kvantorları və termləri (əlbəttə, onlar üçün işlədilmiş mötərizə və vergüllərlə birlikdə) atdıqdan sonra alınan ifadəni qarşı qoyaq.

Aydındır ki, 2) çevrilməsindən sonra alınan ifadə mülahizələr hesabının düsturu olacaqdır. Məsələn, α düsturu $(\forall x)(\rceil A_1^2(x,y)\Rightarrow(\exists y)A_1^1(y))$ şəklində olarsa, 2) çevrilməsindən sonra ona mülahizələr hesabının $\rceil A_1^2 \Rightarrow A_1^1$ düsturu qarşı qoyulacaqdır. Belə inikas zamanı α düsturunun obrazını $\pi(\alpha)$ ilə işarə edək və özünü də α düsturunun proyeksiyası adlandıraq. Asanlıqla yəqin etmək olar ki,

$$\pi(\rceil\alpha) = \rceil\pi(\alpha), \pi(\alpha \Rightarrow \beta) = \pi(\alpha) \Rightarrow \pi(\beta).$$

π inikasının təyinindən göründüyü kimi o, birinci tərtib nəzəriyyənin (1) — (3) aksiomlarını dəyişmir, lakin (4) və (5) aksiomlarını uyğun olaraq mülahizələr hesabından məlum olan $(A \Rightarrow A)$ və $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ tavtologiyalarına çevirir. Digər tərəfdən $\pi(\alpha \Rightarrow \beta) = \pi(\alpha) \Rightarrow \pi(\beta)$ və $\pi(\alpha)$, $\pi(\beta)$ mülahizələr hesbının düsturları olduğundan $\pi(\alpha)$ və $\pi(\alpha \Rightarrow \beta)$ tavtologiyalarından $\pi(\beta)$-nın da tavtologiya olduğunu alırıq. Nəhayət, $\pi(\alpha)$ və $\pi((\forall x_i)\alpha)$ düsturları üst-üstə düşdüyündən birincinin tavtologiya olmasından ikincinin də tavtologiya olması nəticəsinə gəlirik. Buradan aydın olur ki, əgər α birinci tərtib nəzəriyyənin teoremidirsə, onda $\pi(\alpha)$ mülahizələr cəbrində tavtologiyadır. İndi göstərək ki, birinci tərtib nəzəriyyədə α və $\rceil\alpha$ düsturları eyni zamanda nəzəriyyənin teoremi ola bilməz. Tutaq ki, α və $\rceil\alpha$ birinci tər-tib nəzəriyyənin teoremidir. Bu halda α və $\rceil\alpha$ düsturları mülahizələr cəbrində tavtologiya olar. Onda mülahzələr hesabında isbat etdiyimiz tamlıq teoreminə görə $\pi(\alpha)$ və $\rceil\pi(\alpha)$ bu hesabın teoremləri olardı ki, bu da mümkün deyildir. Teorem isbat olundu.

İndi isə birinci tərtib nəzəriyyənin tamlığı məsələsini nəzərdən keçirək. Burada da mülahizələr hesabında olduğu kimi tamlıq problemi iki cür qoyulur.

Məhdud mənada tamlıq və geniş mənada tamlıq. Lakin mülahizələr hesabından fərqli olaraq istənilən birinci tərtib nəzəriyyənin məhdud mənada tamlığı problemi mənfi həll olunur. Əvvəlcə məhdud mənada tamlığın tərifini yada salaq.

Tərif 2. Birinci tərtib nəzəriyyənin mövcud çıxarılış qaydalarını saxlamaqla onun aksiomları sisteminə bu nəzəriyyənin çıxarılmayan düsturunu qoşsaq ziddiyyətli nəzəriyyə alınarsa, onda o, məhdud mənada tam nəzəriyyə adlanır.

Teorem 2. Birinci tərtib riyazi nəzəriyyələr məhdud mənada tam deyildir.

İsbatı. Əvvəlki paraqraflardan bilirik ki,

$$(\exists x)\, A_1^1(x) \Rightarrow (\forall x)\, A_1^1(x) \qquad (53.1)$$

düsturu birinci tərtib nəzəriyyədə isbat olunmayandır.

Göstərək ki, nəzəriyyənin aksiomları sisteminə bu nəzəriyyədə isbat olunmayan (53.1) düsturunu qoşsaq ziddiyyətsiz nəzəriyyə alarıq. Bu faktı isbat etmək üçün predikatlar məntiqi düsturlarını mülahizələr məntiqi düsturlarına bu paraqrafdakı teorem 1-in isbatında olduğu kimi inikas etdirək. Aşkardır ki, belə inikasda birinci tərtib nəzəriyyənin bütün düsturları mülahizələr hesabının düsturlarına çevriləcəkdir. Bundan əlavə birinci tərtib nəzəriyyənin bütün aksiomları mülahizələr hesabının doğru düsturları olacaq ki, bunlar da mülahizələr hesabının məhdud mənada tamlığına əsasən isbat olunandır. Həmçinin birinci tərtib nəzəriyyədə çıxarılış qaydalarının köməyilə alınan düstur-ların obrazları mülahizələr hesabında isbat olunacaqlar. Belə inikasda (53.1) düsturunun obrazı $A_1^1 \Rightarrow A_1^1$ şəklində teoremə çevriləcəkdir.

Beləliklə, (53.1) düsturu birinci tərtib nəzəriyyənin aksiomları sisteminə daxil edilərsə, nəzəriyyənin bütün aksiomları isbat edildiyi halda (53.1) düsturu isbat edilməyəndir və bununla belə alınan nəzəriyyə ziddiyyətsizdir. Buradan aydın olur ki, birinci tərtib nəzəriyyəyə həmin nəzəriyyədə isbat olunmayan düsturu aksiom kimi daxil etdik və ziddiyyətsiz nəzəriyyə alındı. Bu isə nəzəriyyənin məhdud mənada tam olmadığını göstərir.

İndi isə birinci tərtib nəzəriyyənin geniş mənada tamlığı məsələsi üzərində dayanaq.

Birinci tərtib nəzəriyyənin geniş mənada tamlığı problemi belə qoyulur:

Nəzəriyyənin hər bir isbat olunan düsturu məntiqi ümumqiymətlidirmi? Bu problem istənilən birinci tərtib nəzəriyyə üçün müsbət həll edilir. Başqa sözlə, aşağıdakı təklif doğrudur.

Teorem 3. İstənilən birinci tərtib nəzəriyyənin hər bir teoremi məntiqi ümumqiymətlidir.

İsbatı. (1) — (3) aksiomları və həmçinin, nəzəriyyənin xüsusi aksiomları tavtologiyaların xüsusi halı olduğundan istənilən interpretasiyada doğru düsturlardır. Sonra, hər hansı modeldə $(\forall x_i)\alpha(x_i)$ düsturu yerinə yetiriləndirsə və t nəzəriyyənin α düsturunda x_i dəyişəni üçün sərbəst term olduqda $\alpha(t)$ də həmin nəzəriyyədə yerinə yetiriləndir. Ona görə də $(\forall x_i)\alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(t)$ düsturu həmin modeldə doğrudur. Beləcə də əgər α düsturu x_i dəyişənini sərbəst dəyişən kimi özündə saxlamırsa, onda

$$(\forall x_i)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\forall x_i \beta))$$

düsturu həmin modeldə eyniliklə doğru olacaqdır. Buradan da (4) və (5) aksiomlarının istənilən interpretasiyada ümumqiymətli olması alınır. Bundan başqa əgər hər hansı interpretasiyada α və $\alpha \Rightarrow \beta$ doğrudursa, onda həmin interpretasiyada β düsturu da doğrudur. Nəhayət, α düsturu istənilən interpretasiyada onda və ancaq onda doğru olar ki, $(\forall x_i)\alpha$ düsturu doğru olsun. Bu isə o deməkdir ki, *MP* və *Gen* çıxarılış qaydaları düsturların ümumqiymətliliyi xassəsini saxlayır. Beləliklə, birinci tərtib nəzəriyyənin hər bir teoreminin məntiqi ümumqiymətli olması aydın olur.

İstənilən birinci tərtib nəzəriyyədə həllolunma probleminin qoyuluşu mülahizələr məntiqində bu problemin qoyuluşuna analojidir. Həllolunma problemi burada aşağıdakı kimi qoyulur.

Birinci tərtib nəzəriyyənin ixtiyari verilmiş düsturunun ümumqiymətli və ya yerinə yetirilən olub-olmamasını müəyyən etmək üçün effektli üsul vardırmı?

Nəzəriyyənin hər bir düsturunun yerinə yetirilənliyi məsələsini həll etməyi bacarmaqla biz onun eyniliklə doğru olub-olmamasını müəyyən edə bilərik.

Həqiqətən, əgər α hər hansı interpretasiyada nəzəriyyənin eyniliklə doğru düsturudursa, onda $\overline{\alpha}$ həmin interpretasiyada yerinə yetirilməyəndir və tərsinə. Ona görə də $\overline{\alpha}$ düsturunun yerinə yetirilən və ya yerinə yetirilməyən olmasını isbat etməklə biz eyni zamanda α düsturunun eyniliklə doğru olub-olmadığını isbat etmiş olarıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, birinci tərtib nəzəriyyələrdə həllolunma problemi mülahizələr məntiqi üçün həllolunma probleminin bir qədər güclü formasıdır. Ancaq mülahizələr məntiqində bu problemin həlli heç bir çətinlik törətmədiyi halda birinci tərtib nəzəriyyədə onun həlli bir sıra ciddi çətinliklər doğurur və mənfi istiqamətdə həll olunur. Başqa sözlə, birinci tərtib nəzəriyyənin qarşıya çıxan ixtiyari düsturunun yerinə yetirilən olub-olmadığını müəyyən etmək üçün heç bir konstruktiv qayda, effektli üsul göstərmək mümkün deyildir.

Yalnız bir sıra xüsusi tip düsturlar və sonlu modellər üçün bu problemin müsbət həll olunduğu V fəsil §42-də göstərilmişdir*.

§54. Birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyələr

Fərz edək ki, K $A_1^2(t_1,t_2)=D \Leftrightarrow t_1=t_2$ ikiyerli predikatı özündə saxlayan hər hansı nəzəriyyədir.

K nəzəriyyəsi aşağıdakı iki şərti ödədikdə ona birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə deyəcəyik.

* Йада салаг ки, щеч бир хцсуси аксиома малик олмайан биринъи тяртиб нязя-риййя предикатлар щесабы иля уст-цстя дцшцр.

1) K birinci tərtib nəzəriyyə olsun.

2) Aşağıdakı düsturlar K nəzəriyyəsinin teoremləri olsun.

(I) $(\forall x_1)(x_1 = x_1)$

(II) $(x_1 = x_2) \Rightarrow (\alpha(x_1, x_1) \Rightarrow \alpha(x_1, x_2))$.

Burada x_1 və x_2 predmet dəyişənləri, $\alpha(x_1, x_2)$ K nəzəriyyəsinin ixtiyari düsturu, $\alpha(x_1, x_1)$ isə $\alpha(x_1, x_2)$ düsturunda x_1-in hər hansı sərbəst daxil olmasını (vacib deyildir ki, hamısını) x_2 ilə əvəz etmək nəticəsində alınan düsturdur. Lakin gözləmək lazımdır ki, x_1-in x_2 ilə əvəz olunduğu hər yerdə x_2 dəyişəni sərbəst olsun. Beləliklə, ola bilər ki, bir halda $\alpha(x_1, x_2)$ düsturu sərbəst dəyişən kimi x_1-i özündə saxlasın, başqa halda isə x_1 həmin düstura sərbəst daxil olmasın. Misal üçün $\alpha(x_1, x_2)$ düsturu

$$A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_3) A_1^3(x_3, x_1, x_2)$$

şəklində olarsa, onda ola bilər ki, x_1-i x_2 ilə əvəz etdikdən sonra bir halda $\alpha(x_1, x_2)$ düsturu

$$A_1^2(x_2, x_2) \Rightarrow (\forall x_3) A_1^3(x_3, x_1, x_2)$$

şəklində, başqa halda isə

$$A_1^2(x_2, x_2) \Rightarrow (\forall x_3) A_1^3(x_3, x_2, x_1)$$

şəklində olsun.

$\urcorner A_1^2(x_1, x_2)$ predikatını $x_1 \neq x_2$ kimi işarə etməyi şərtləşək. Göründüyü kimi birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə, ümumiyyətlə, birinci tərtib nəzəriyyələrin məntiqi aksiomlarına (I) və (II) düsturlarını aksiom kimi daxil etmək nəticəsində alınır.

Misal 1. Tutaq ki, birinci tərtib K nəzəriyyəsinin əlifbasına heç bir funksional hərf və predmet konstantı daxil deyil və yalnız bircə dənə bərabərlik predikatı daxildir. Aşağıdakı düsturları nəzəriyyənin xüsusi aksiomları qəbul edək:

1) $(\forall x)(x = x)$

2) $(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$

3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))$.

Asanlıqla göstərmək olar ki, bu nəzəriyyə birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir. Onu bərabərliyin elementar nəzəriyyəsi adlandırırlar.

Ümumiyyətlə, hər bir birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədə aşağıdakı teoremlərin doğruluğunu göstərmək olar. İstənilən x_1, x_2, x_3 və t termləri üçün:

$\vdash t = t$

$\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$

$\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$.

Bu teoremlərin isbatını sərbəst çalışma kimi oxucuların ixtiyarına veririk.

Bu teoremlərdən aydın olur ki, birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyənin hər bir modeli üçün bərabərlik (=) predikatına uyğun münasibət ekvivalentlik münasibətdir. Əgər hər hansı modelin interpretasiya oblastında bərabərlik münasibəti eynilik münasibətinə çevrilərsə, belə modelə normal model deyilir.

İstənilən birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyənin normal modelinin varlığı aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem 1. Birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyənin hər bir modelini onun normal modelinə çevirmək olar.

İsbatı. Tutaq ki, J birinci tərtib bərabərlikli K nəzəriyyəsinin M oblastlı hər hansı interpretasiyasıdır. Göstərək ki, J interpretasiyasını elə J' interpretasiyası ilə əvəz etmək olar ki, o, normal olsun. Bu yeni quracağımız interpretasiyanın oblastını M'-lə işarə edək. M çoxluğundan M' çoxluğuna keçmək üçün M çoxluğunda ρ ekvivaletlik münasibətinin təyin edildiyini fərz edək. Aydındır ki, bu münasibət M oblastını ekvivalentlik siniflərinə ayıracaqdır. Həmin bu ekvivalentlik siniflərini M' çoxluğunun elementləri olaraq götürək. Bundan sonra J interpretasiyasında R_j^n münasibəti kimi şərh olunan A_j^n predikat hərflərinin J' interpretasiyasında şərhini Q_j^n kimi işarə edib özünü də aşağıdakı şərtlə təyin edək:

M çoxluğundan götürülmüş $a_1, a_2, ..., a_n$ elementləri ilə müəyyən olunan $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ ekvivalentlik sinifləri üçün Q_j^n-i onda və ancaq onda yerinə yetirilən hesab edəcəyik ki, R_j^n münasibəti $a_1, a_2, ..., a_n$ elementləri üçun yerinə yetirilən olsun.

Q_j^n-in bu cür təyin edilməsi ekvivalentlik siniflərindən nümayəndələrin seçilməsindən asılı deyildir və R_j^n-in verilməsi ilə tam xarakterizə olunur. Doğrudan da əgər ekvivalentlik siniflərindən başqa $b_i \in \overline{a}_i$ $(i = 1,2,...,n)$ nümayəndələrini seçmiş olsaq (II) aksiomunu n dəfə ardıcıl tətbiq etdikdən sonra

$$\vdash a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A_j^n(a_1, a_2, ..., a_n) \Rightarrow A_j^n(b_1, b_2, ..., b_n))$$

teoremini alarıq.

Analoji olaraq f_j^n funksional hərflərinin J və J' interperetasyalarında şərhlərini uyğun olaraq φ_j^n və ψ_j^n kimi işarə edərək, ψ_j^n əməlini φ_j^n-in vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\psi_j^n(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}) = \overline{\varphi_j^n(a_1, a_2, ..., a_n)}.$$

Yenə də (II) aksiomuna əsasən deyə bilərik ki, belə təyin edilmiş ψ_j^n əməli siniflərdə nümayəndələrin seçilməsindən asılı deyildir.

Nəhayət, J interpretasiyasında M çoxluğunun a_i elementi kimi şərh olunan hər bir c_i predmet konstantı J' interpretasiyasında $\overline{a}_i$ sinfi kimi şərh ediləcəkdir. Aydındır ki, bu halda J' interpretasiyasında bərabərlik predikatına uyğun ρ' münasibəti M' çoxluğunda eynilik münasibəti olacaqdır. Yəni $\rho(a_i, a_j)$ münasibəti onda və ancaq onda doğru olacaq ki, $\rho'(\overline{a}_i, \overline{a}_j)$ münasibəti ödənilsin, başqa sözlə $\overline{a}_i = \overline{a}_j$ olsun.

Verilmiş J interpretasiyasına görə J' interpretasiyasının qurulmasından görünür ki, əgər $S = (a_1, a_2, ...)$ M çoxluğunun elementlərindən düzəldilmiş hər hansı hesabi ardıcıllıq, $S' = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...)$ a_i elementlərinin doğurduğu ekvivalentlik sinifləri ardıcıllığı olarsa, onda α düsturu J interpretasiyasında S ardıcıllığı üzərində onda və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, həmin düstur J' interpretasiyasında S' ardıcıllığı üzərində yerinə yetirilsin. Buradan da aydın olur ki, α düsturu J interpretasiyasında onda və ancaq onda doğru olar ki, o, J' interpretasiyasında doğru olsun. Lakin yuxarıda gördük ki, J' interpretasiyasının M' çoxluğunda bərabərlik münasibəti eynilik münasibətidir və ona görə də bu interpretasiya verilmiş birinci tərtib nəzəriyyə üçün normal modeldir. Həm də yuxarıdakı konstruksiyadan aydındır ki, M' çoxluğunun güçü M çoxluğunun gücündən çox ola bilməz. Odur ki, interpretasiya oblastı qeyri-hesabi çoxluq olan modellərdə yerinə yetirilənlik məsələsi, oblastı hesabi çoxluq olan modellərdə və bəzi hallarda hətta sonlu modellərdə yerinə yetirilənliyə gətirilir. Bu haqda K.Hödel 1930-cu ildə aşağıdakı təklifi isbat etmişdir.

Teorem 2. İstənilən ziddiyyətsiz birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə üçün sonlu və ya hesabi normal model vardır.

Misal 2. Fərz edək ki, K bir dənə A_1^2 predikat hərfinə, f_1^2, f_2^2 kimi iki dənə funksional hərfə və a_1, a_2 kimi iki dənə predmet konstantlarına malik birinci tərtib nəzəriyyədir. A_1^2 hərfini bərabərlik (=) predikatı, f_1^2, f_2^2 hərflərini uyğun olaraq toplama (+) və vurma (·) funksiyaları, nəhayət, a_1, a_2 hərflərini 0 (sıfır) və 1 (vahid) konstantları kimi interpretasiya edək.

Aşağıdakı düsturlar isə nəzəriyyənin xüsusi aksiomları olsun.

1. $(\forall x_1)(x_1 = x_1)$
2. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)((x_1 + (x_2 + x_3)) \Rightarrow ((x_1 + x_2) + x_3))$
3. $(\forall x_1)(x_1 + 0 = x_1)$
4. $(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 + x_2 = 0)$
5. $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$
6. $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$
7. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$
8. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_3)$
9. $(\forall x_1)(x_1 \cdot 1 = x_1)$
10. $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1)$
11. $(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 \neq 0 \Rightarrow (x_1 \cdot x_2 = 1))$
12. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$
13. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)$
14. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3)$

Aydın görmək olar ki, K birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə olub onun hər bir normal modeli meydanın elementar nəzəriyyəsindən başqa bir şey deyildir.

§55. Birinci tərtib nəzəriyyədə izomorfizm və

kateqoriyalılıq problemləri

Əvvəlcə birinci tərtib nəzəriyyənin interpretasiyalarının izomorfluğu anlayışını verək. Fərz edək ki, birinci tərtib hər hansı bərabərlikli nəzəriyyənin oblastları uyğun olaraq M_1 və M_2 olan iki J_1 və J_2 interpretasiyaları veril-mişdir. Tutaq ki, J_1 və J_2 interpretasiyalarına A_i^n predikat hərfləri uyğun olaraq R_i^n və Q_i^n münasibətləri kimi, f_j^n funksional hərfləri φ_j^n və ψ_j^n əməlləri kimi, c_i predmet konstatları isə c_i' və c_i'', kimi şərh olunur.

Tərif 1. Əgər M_1 çoxluğunun M_2 çoxluğunda elə h inyektiv inikası verilmişdirsə ki, o ixtiyari $(a_1,a_2,...,a_n)\in M_1^n$ n-liyi üçün aşağıdakı şərtləri ödəsin, onda J_1 və J_2 interpretasiyalarına izomorf interpretasiyalar deyilir.

1) $R_i^n(a_1,a_2,...,a_n)$ münasibəti $Q_i^n(h(a_1),h(a_2),...,h(a_n))$ münasibəti doğru olduqda və yalnız onda doğru olsun.

2) $\varphi_j^n(a_1,a_2,...,a_n)=\psi_j^n(h(a_1),h(a_2),...,h(a_n))$ bərabərliyi doğru olsun.

3) $c_i''=h(c_i')$ bərabərliyi doğru olsun.

Tərifdən aydındır ki, J_1 və J_2 interpretasiyaları izomorf olduqda onların M_1 və M_2 interpretasiya oblastları eyni gücə malik olur. Asanlıqla göstərmək olar ki, nəzəriyyənin interpretasiyaları arasında izomorfluq münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitivdir, yəni bu münasibət ekvivalentlik münasibətidir.

İndi isə izomorf interpretasiyalara aid bir misal göstərək.

Misal 1. Tutaq ki, nəzəriyyənin qurulmasında bir A_1^2 predikat hərfi və bir f_1^2 funksional hərfi iştirak edir. Nəzəriyyənin J_1 interpretasiyasının oblastı $M_1 = \{1,2,4,8,16,32\}$ çoxluğu, J_2 interpretasiyasının oblastı $M_2 = \{0,1,2,3,4,5\}$ olsun. A_1^2 predikatını hər iki interpretasiyada < münasibəti kimi şərh edək, yəni $A_1^2(x,y)$ münasibəti $x<y$ olduqda və ancaq onda doğru olsun.

$f_1^2(u,v)$ funksiyası J_1 interpretasiyasında vurma əməli kimi, J_2 interpretasiyasında isə 2^{u+v} əməli kimi şərh olunsun.

$$\varphi_1^2(u,v) = u \cdot v \ , \ \psi_1^2(u,v) = 2^{u+v} .$$

M_1 çoxluğunun M_2 çoxluğuna h inikasını isə $x \xrightarrow{h} \log_2 x$ kimi verək. Asanlıqla görmək olar ki, belə inikas qarşılıqlı birqiymətlidir və hər iki interpretasiyada A_1^2 predikat və f_1^2 funksional hərflərin şərh olunduğu münasibət və əməllərdə də saxlanılır. Doğrudan da $(x,y) \in M_1^2$ ixtiyari cüt olduqda $x<y$ münasibəti onda və ancaq onda ödənər ki, $\log_2 x < \log_2 y$ olsun. Həmçinin də, $\varphi_1^2(x,y) = \psi_1^2(h(x),h(y))$ bərabərliyinin doğru olduğunu göstərək:

$$\psi_1^2(h(x),h(y)) = 2^{h(x)+h(y)} = 2^{\log_2 x + \log_2 y} =$$
$$= 2^{\log_2 x} \cdot 2^{\log_2 y} = x \cdot y = \varphi_1^2(x,y) .$$

Deməli, J_1 və J_2 interpretasiyaları izomorfdur.

Teorem. Əgər h J_1 interpretasiyasının J_2 interpretasiyasına izomofizmidirsə, onda birinci tərtib nəzəriyyənin ixtiyari α düsturu J_1 interpretasiya oblastından götürülmüş hər hansı $S = (a_1, a_2, ...)$ ardıcıllığında onda və ancaq onda yerinə yetirilən olar ki, o, $h(S) = (h(a_1), h(a_2), ...)$ ardıcıllığında yerinə yetirilsin.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, α $A(t_1, t_2, ..., t_n)$ şəklində elementar düsturdur. $A(t_1, t_2, ..., t_n)$ predikatının J_1 və J_2 interpretasiyalarındakı şərhlərini uyğun olaraq $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ və $Q(h(t_1), h(t_2), ..., h(t_n))$ ilə işarə edək. h M_1 çoxluğunun M_2 çoxluğuna inyektiv inikası olduğundan və J_1, J_2 interpretasiyalarının izomorfluğuna əsasən $R(a_1, a_2, ..., a_n)$ və $Q(h(a_1),\ h(a_2), ..., h(a_n))$ münasibətləri ya eyni zamanda doğru, yaxud yalan olar. Bu isə o deməkdir ki, $A(t_1, t_2, ..., t_n)$ elementar düsturu $S = (a_1, a_2, ...)$ və $h(S) = (h(a_1), h(a_2), ...)$ ardıcıllıqlarında ya eyni zamanda yerinə yetiriləndir, yaxud da eyni zamanda yerinə yetirilən deyildir. Teoremin isbatını başa çatdırmaq üçün birinci tərtib nəzəriyyənin düsturlarının elementar düsturlardan necə törəndiyini yada salmaq kifayətdir (teoremin bu hissəsinin isbatı sərbəst iş kimi oxuculara həvalə olurnur).

Nəticə. Birinci tərtib nəzəriyyənin J_1 və J_2 interpretasiyaları izomorfdursa, onda nəzəriyyənin verilmiş α düsturu J_1 interpretasiyasında onda və ancaq onda eyniliklə doğru olar ki o, J_2 interpretasiyasında eyniliklə doğru olsun.

Doğrudan da, nəzəriyyənin hər bir verilmiş α düsturu M_1 interpretasiya oblastının ixtiyari $S = (b_1, b_2, ...)$ ardıcıllığında yalnız və yalnız onda yerinə yetirilən olar ki o, M_2 interpretasiya oblastının $h(S) = (h(b_1), h(b_2), ...)$ ardıcıllığında yerinə yetirilsin. Deməli, α düsturunun J_1 və J_2 interpretasiyasında eyniliklə doğru olması eyni zamanda ödənməlidir.

Yuxarıdakı teorem və nəticədən aydın olur ki, başqa riyazi nəzəriyyələr (məsələn, halqa nəzəriyyəsi, vektor fəzalar və s.) kimi birinci tərtib nəzəriyyələrdə də biz izomorf interpretasiyalara eyni strukturlar kimi baxacağıq.

İndi isə nəzəriyyənin kateqoriyalılığı məsələsi üzərində dayanaq.

Tərif 2. Verilmiş nəzəriyyənin istənilən iki modeli izomorf olarsa, ona kateqoriyalı nəzəriyyə deyilir.

Tərifdən aydındır ki, hər bir sonlu modelə malik birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə kateqoriyalıdır. Tərsinə, birinci tərtib nəzəriyyə kateqoriyalıdırsa, onda onun modeli sonlu gücə malikdir. Lakin bunu sonsuz gücə malik birinci tərtib nəzəriyyələr üçün demək olmaz. Məsələn, modeli $v = < N, S, \Pi, E >$ olan və

1. $x+1 \neq 0$;
2. $x+0 = x$;
3. $x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$;
4. $x+(y+z) = (x+y)+z$;
5. $x \cdot 0 = 0$;
6. $x(y+1) = x \cdot y + x$;
7. $\alpha(0) \wedge (\forall x)((\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x+1)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$

aksiomlar sxemi ilə qurulmuş natural ədədlər nəzəriyyəsinin (bu haqda sonrakı paraqrafda ətraflı danışılacaqdır) aksiomlarına yeni

8. $(\forall x)(x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = n)$

aksiomunu qoşmaqla alınan nəzəriyyəni v^* ilə işarə edək. Aydındır ki, bu nəzəriyyənin də modelinin əsas çoxluğu natural ədədlər çoxluğu olacaqdır. Lakin v və v^* nəzəriyyələri izomorf deyildir.

İndi fərz edək ki, m kardinal ədəd, K isə birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir.

Tərif 3. Aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, onda K nəzəriyyəsinə m kateqoriyalı nəzəriyyə deyilir.

1) K nəzəriyyəsi, gücü m-ə bərabər olan heç olmazsa bir dənə normal modelə malik olsun;

2) K nəzəriyyəsinin gücü m-ə bərabər olan istənilən iki normal modeli izomorf olsun.

Misal 2. Tutaq ki, K yeganə bərabərlik predikat hərfini özündə saxlayan, heç bir funksional hərfə və predmet konstantına malik olmayan, aşağıdakı xüsusi aksiomlarla xarakterizə olunan birinci tərtib nəzəriyyədir.

$a)\ (\forall x_1)(x_1 = x_1)$

$b)\ (\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$

$c)\ (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$

K nəzəriyyəsinin aksiomlarına

$$d)\ (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge$$
$$\wedge (\forall x_4)(x_4 = x_1 \vee x_4 = x_2 \vee x_4 = x_3))$$

aksiomunu birləşdirməklə alınan nəzəriyyəni K_3-lə işarə edək. K_3 nəzəriyyəsinin istənilən normal modelinin əsas çoxluğu dəqiq olaraq 3 elementə malikdir. Deməli, K_3 nəzəriyyəsi 3 kateqoriyalı nəzəriyyədir.

Ümumiyyətlə, K nəzəriyyəsinə

$$d')\ (\exists x_1)\cdots(\exists x_n)(\bigwedge_{i,j\le n,\, i\neq j} x_i \neq x_j \wedge (\forall x_{n+1})(x_{n+1} =$$
$$= x_1 \vee \cdots \vee x_{n+1} = x_n))$$

aksiomunu qoşmaqla alınan K_n nəzəriyyəsi n kateqoriyalı olmaqla onun bütün normal modellərinin əsas çoxluğu dəqiq olaraq n dənə elementi özündə saxlayır.

VI FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. Tutaq ki, f_1^1 biryerli f_1^2, f_2^2 ikiyerli və f_1^3 üçyerli funksional hərflər, x_1, x_2, x_3 predmet dəyişənləri, c_1, c_2 predmet konstantlarıdır. Birinci tərtib nəzəriyyənin aşağıdakı sözləri termlərdirmi?

a) $f_1^2(f_1^1(x_2),c_1)$;

b) $f_2^2(f_1^1(x_1),f_1^2(x_2\,c_2))$;

c) $f_1^3(f_1^2(x_1,x_2),f_1^1(c_1),x_3)$;

d) $f_1^2(f_2^2(x_1,x_2),f_1^3(f_1^1(x_1),f_1^2(x_2,c_1)),f_2^2(c_2,x_1)))$;

e) $f_1^3(f_2^2(x_1,c_1),f_1^2(c_1,c_2),f_1^1(x_3))$.

2. $f_1^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3$, x_1,x_2,x_3, c_1,c_2 simvolları çalışma 1-də verilmiş funkisonal hərflər, predmet dəyişənləri və predmet konstantları, R_1^2 və R_1^3 isə uyğun olaraq ikiyerli və üçyerli predikatlar olduqda aşağıdakı sözlər birinci tərtib nəzəriyyənin düsturlarıdırmı?

a) $R_1^2(x_1,f_1^3(x_1,c_1,x_3))$;

b) $R_1^2(c_2,f_2^2(x_2,f_1^1(x_2))$;

c) $R_1^3(f_1^2(x_2,c_1),x_3,R_1^2(x_1,x_2))$;

d) $R_1^2(f_1^3(x_1,c_2,x_3),f_2^2(x_1,x_2))\Rightarrow R_1^3(x_1,c_1,c_2))$;

e) $R_1^3(x_2,f_1^2(c_1,c_2),f_2^2(x_3,x_2)\Rightarrow f_1^1(x_2))$.

3. Birinci tərtib nəzəriyyənin əlifbasına bir dənə x_1 predmet dəyişəni, bir dənə f_1 funksional hərf və bir dənə biryerli R_1 predikat hərfi daxildir. Bu nəzəriyyənin bütün termləri və elementar düsturları çoxluğunu yazın.

4. İsbat edin ki, kommutativ halqa nəzəriyyəsi birinci tərtib nəzəriyyədir. Bu nəzəriyyənin xüsusi aksiomlarını yazın.

5. Verilmiş termlərin verilmiş α düsturlarında x_i dəyişəni üçün sərbəst olub-olmadığını müəyyən edin.

a) $t=f_1^2(x_1,x_2)$ termi

$$\alpha:(\forall x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow A_2^2(x_2,x_3))$$

düsturunda x_3 dəyişəni üçün;

b) $t = x_1$ termi

$$\alpha : (\exists x_2)((A_1^1(x_1) \wedge A_1^2(x_2, x_1)) \Rightarrow \rceil A_2^2(x_2, x_2))$$

düsturunda x_2 dəyişəni üçün;

c) $t = f_1^2(x_1, a_1)$ termi

$$\alpha : A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), x_2, a_1) \Rightarrow (\forall x_1)(A_1^2(x_2, x_3))$$

düsturunda x_2 dəyişəni üçün;

d) $t = x_1$ termi ixtiyari α düsturunda x_1 dəyişəni üçün.

6. İstənilən birinci tərtib nəzəriyyədə aşağıdakı əlavə çıxarılış qaydalarının doğruluğunu isbat edin.

a) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ düsturundan $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\forall x)\gamma(x))$ düsturuna keçid qaydası.

b) İstənilən c predmet konstantı üçün $\alpha(c)$ düsturundan $(\forall x)\alpha(x)$ düsturuna keçid qaydası.

c) $\alpha(c) \Rightarrow \beta(c)$ düsturundan $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x)$ və $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)$ düsturlarına keçid qaydası.

7. Birinci tərtib nəzəriyyədə aşağıdakı çıxarılışları isbat edin:

a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$;

b) $\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \delta, \alpha \vee \beta \vdash \gamma \vee \delta$;

c) $(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha(x_1, x_2) \vdash (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha(x_1, x_2)$;

d) $\alpha \Rightarrow \overline{\beta} \vdash \beta \Rightarrow \overline{\alpha}$.

8. α və β birinci tərtib nəzəriyyənin istənilən düsturları olduqda aşağıdakı teoremlərin doğruluğunu göstərin:

a) $\vdash (\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\exists x)\alpha \Rightarrow (\exists x)\beta)$;

b) $\vdash (\forall x)(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\forall x)\alpha \wedge (\forall x)\beta$;

c) $\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\alpha(x_1, x_2) \Rightarrow (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha(x_1, x_2)$;

d) $\vdash (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$.

9. Birinci tərtib nəzəriyyənin aşağıdakı düsturları verilmişdir:

$a)\ A_1^3(f_1^2(x_1,x_2),x_3,a_1)$;

$b)\ (\forall x_1)A_1^2(f_1^2(a_1,x_2),f_1^2(a_1,x_1)) \Rightarrow A_1^2(x_2,x_1)$;

$c)\ (\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^3(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow \neg A_1^2(x_2,x_2))$;

$d)\ (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^3(f_1^2(x_1,x_3),f_1^1(x_1),x_2))$.

J interpretasiyasını isə aşağıdakı kimi təyin edək. M interpretasiya oblastı Z —tam ədədlər çoxluğudur;

$A_1^2(u,v) = D \Leftrightarrow u = v$;

$A_1^3(u,v,w) = D \Leftrightarrow u + v + w = 0$;

$f_1^1(u) = u' = u + 1$;

$f_1^2(u,v) = u + v$;

c_1 konstantı sıfır ədədidir.

a) — *d*) düsturlarının bu interpretasiyada yerinə yetirilən olub-olmadığını, habelə, *d*) düsturunun doğru və ya yalan mülahizəyə çevrildiyini izah edin.

10. İsbat edin ki, birinci tərtib nəzəriyyənin aşağıdakı düsturları məntiqi ümumqiymətlidir.

$a)\ (\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \Rightarrow (\exists x_1)\alpha$;

$b)\ (\forall x_1)\alpha \Rightarrow \neg(\exists x_1)\alpha$;

$c)\ ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \neg\beta(x)) \Rightarrow \neg((\forall x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x))$;

$d)\ \neg(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\neg\alpha(x)$.

11. Aşağıdakı düsturların məntiqi ümumqiymətli olmadığını göstərin.

$a)\ ((\forall x_1)A_1^1(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)A_1^2(x_2)) \Rightarrow ((\forall x_1)A_1^1(x_1) \Rightarrow A_1^2(x_1))$;

$b)\ ((\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)A_1^2(x_2))) \Rightarrow ((\forall x_1)A_1^1(x_1) \Rightarrow A_1^2(x_1))$.

12. Birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyənin ziddiyyətsiz olduğunu isbat edin.

13. Birinci tərtib nəzəriyyənin məntiqi aksiomlarının asılı olmadığını göstərin.

14. İsbat edin ki, birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyənin (I) və (II) aksiomları onun digər məntiqi aksiomlarından MP və Gen qaydalarının köməyilə çıxarıla bilməz.

15. Tutaq ki, K birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyə, J oblastı M çoxluğu olan interpretasiya, M' isə gücü M-in gücünə bərabər hər hansı çoxluqdur. İsbat edin ki, həmin nəzəriyyə üçün oblastı M' olan elə J' interpretasiyası qurmaq olar ki, J-yə izomorf olsun.

16. Kommutativ qrup nəzəriyyəsi aksiomlarına $(\forall x_1)(2x_1 = 0)$ düsturunu yeni aksiom kimi əlavə edək. Alınan qrupun normal modelinin tam ədədlərin $m = 2$ moduluna görə çıxıqlar sinifləri üzərində fəza olduğunu isbat edin. Qurduğumuz yeni nəzəriyyə sonlu kateqoriyalıdırmı?

VII FƏSİL.

NATURAL ƏDƏDLƏR SİSTEMİ FORMALLAŞDIRILMIŞ NƏZƏRİYYƏ KİMİ.

§56. Natural ədədlər nəzəriyyəsinin aksiomatik qurulması

Birinci tərtib nəzəriyyələrdən danışarkən qeyd etdik ki, heç bir sonlu oblastda yerinə yetirilməyən düsturlar vardır. Buna misal olaraq nəzəriyyənin

$$\gamma : (\forall x_1)R(x_1,x_2) \wedge (\forall x_1)(\exists x_2)R(x_1,x_2) \wedge$$
$$\wedge(\forall x_1)(\exists x_2)((\forall x_3)R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3)) \Rightarrow R(x_1,x_3)$$

düsturunu göstərmək olar. Ona görə də γ düsturu hər bir sonlu oblastda ziddiyyət olacaq. Məqsədimiz elə sonsuz oblastdan ibarət model qurmaqdır ki, məsələn, γ düsturu bu modeldə yerinə yetirilən olsun. Bunun üçün birinci tərtib nəzəriyyənin əlifbasında predmet dəyişənlərini rəqəmlər kimi interpretasiya etməklə quracağımız nəzəriyyənin dilini müəyyən edək. Bu nəzəriyyənin əlifbası istənilən birinci tərtib nəzəriyyənin əlifbasına bir A_1^2 predikat hərfini, f_1^1, f_1^2, f_2^2 kimi uç dənə funksional hərfləri və c_0 kimi yeganə predmet konstantını zəruri əlavə etməklə alınır. Məzmunlu hesabda oldugu kimi quracağımız formal hesabda da $A_1^2(u,v)$ əvəzinə $u=v$, $f_1^1(u)$, $f_1^2(u,v)$, $f_2^2(u,v)$ əvəzinə uyğun olaraq u', $u+v$, $u \cdot v$ və nəhayət c_0 əvəzinə 0 (sıfır) götürəcəyik. Aydındır ki, $\{=,\cdot,+,0\}$ simvolları çoxluğu birinci tərtib nəzəriyyənin əlifbasına daxil olmayan metasimvollardır.

Beləliklə, natural ədədlər nəzəriyyəsini qurmaq üçün istifadə edəcəyimiz simvollar $x, y, ..., x_1, x_2, ...$ kimi işarə edilmiş predmet dəyişənləri — rəqəmlər, «0» kimi işarə edilmiş predmet konstantı, = kimi işarə edilmiş A_1^2 predikat hərfi, $',+,\cdot$ kimi işarə edilmiş f_1^1, f_1^2, f_2^2 funksional hərflər, $\urcorner$, $\Rightarrow$ məntiq əməlləri, $\forall$ kvantoru və habelə (,) mötərizələrdən ibarət olacaqdır. Bu nəzəriyyəni S-lə işarə edək. S nəzəriyyəsinin modeli $\nu =< N, A_1^2 >$ cütündən ibarətdir. Burada $N = \{0,1,2,...\}$ — natural ədədlər çoxluğudur. Natural ədədlər nəzəriyyəsində term və düsturun tərifi istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə olduğuna analoji verilir.

a) Bütün predmet dəyişənləri — rəqəmlər və predmet konstantı 0 (sıfır) termlərdir.

b) Əgər t_1 və t_2 termlərdirsə, onda $f_1^1(t_1)$, $f_1^2(t_1,t_2)$, $f_2^2(t_1,t_2)$ termlərdir.

c) Ancaq və ancaq o obyektlər S nəzəriyyəsində termdir ki, onlar *a*) və *b*) şərtləri ilə təyin olunur.

A_1^2 predikat hərfinin ixtiyari t_1 və t_2 termlərinə tətbiqi nəticəsində alınan $A_1^2(t_1,t_2)$ elementar düstur adlanır. Məsələn, $t_1 = f_1^2(x,y), t_2 = f_2^2(f_1^1(0),y)$ şəklində olarsa, $A_1^2(t_1,t_2)$ elementar düsturu $x + y = 0' \cdot y$ şəklində olacaqdır.

S nəzəriyyəsində düsturun tərifi isə aşağıdakı kimi verilir:

a) Bütun elementar düsturlar S nəzəriyyəsinin düsturudur.

b) Əgər α və β S nəzəriyyəsinin düsturudursa, onda $\urcorner\alpha$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ həmin nəzəriyyənin düsturudur.

c) Əgər x α düsturuna sərbəst dəyişən kimi daxildirsə, onda $(\forall x)\alpha(x)$ S-də düsturdur.

d) Ancaq və ancaq o obyaektlər S nəzəriyyəsinin düsturudur ki, onlar *a*) — *c*) şərtləri ilə təyin olunurlar.

Misal. x_1 və x_2 predmet dəynşənləri olduqda

$$(x_1 = x_2) \Rightarrow (\forall x_1)(\forall x_2)(x_1' + x_2' = 0)$$

S nəzəriyyəsinin düsturudur.

Burada da $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ və $(\exists x)\alpha(x)$-i birinci tərtib nəzəriyyədə təyin etdiyimiz mənada başa duşəcəyik.

Aşağıdakı düsturları S nəzəriyyəsinin xüsusi aksiomları olaraq qəbul edək.

(S_1) $(\forall x)\ (x' \neq 0)$

(S_2) $(\forall x_1)(\forall x_2)\ ((x_1' = x_2') \Rightarrow (x_1 = x_2))$

(S_3) $(\forall x_1)(\forall x_2)\ ((x_1 = x_2) \Rightarrow (x_1' = x_2'))$

(S_4) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\ ((x_1 = x_2) \Rightarrow (x_1 = x_3) \Rightarrow (x_2 = x_3))$

(S_5) $(\forall x_1)\ (x_1 + 0 = x_1)$

(S_6) $(\forall x_1)(\forall x_2)\ (x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)')$

(S_7) $(\forall x_1)\ (x_1 \cdot 0 = 0)$

(S_8) $(\forall x_1)(\forall x_2)\ ((x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1))$

(S_9) $(\alpha(0) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$

Burada $\alpha(x)$ S nəzəriyyəsinin istənilən düsturudur. Qeyd edək ki, (S_1)-(S_8) aksiomları S nəzəriyyəsinin konkret düsturları olduğu halda (S_9) sonsuz miqdarda doğru düsturlar törədən aksiomlar sxemidir. Riyazi nəzəriyyələrdə geniş tətbiq olunan bu aksiomlar sxemi riyazi induksiya prinsipi adını almışdır.

Onu da qeyd edək ki, natural ədədlər hesabının qurulmasının ilk təşəbbüsçüsü alman alimi Dedekind və italyan alimi Peano olmuşdur. Dedekind bu hesabı qeyri-formal, yəni məzmunlu nəzəriyyə şəklində qurmağa, Peano isə onu formal, yəni aksiomatik qurmağa çalışmışdır.

Peano natural ədədlər sistemi üçün birinci olaraq (S_1) - (S_3) aksiomlarını söyləmişdir. Ona görə də həmin aksiomlara Peano aksiomları deyirlər. Bu aksiomlar məzmunlu şəkildə 0 (sıfır) ədədinin ilk natural ədəd olduğunu, hər bir sıfırdan fərqli natural ədəddən bilavasitə əvvəl yalnız və yalnız bir natural ədəd və eləcə də hər bir natural ədəddən bilavasitə sonra yalnız və yalnız bir natural ədəd gəldiyini ifadə edir.

Modus ponens qaydasının köməyilə (S_9) aksiomlar sxemindən aşağıdakı çıxarılış qaydasını ala bilərik. $\alpha(0)$-dan və $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))$-dən $(\forall x)\alpha(x)$ alınır. Bu qaydanı biz induksiya qaydası adlandiracağıq. Deməli, S nəzəriyyəsi üçün birinci tərtib nəzəriyyənin ixtiyarımızda olan MP və Gen qaydalarına Ind (induksiya) qaydası adlanan yeni bir qayda da əlavə olunur.

Bir də onu qeyd edək ki, natural ədədlər nəzəriyyəsi birinci tərtib nəzəriyyə olduğundan orada mövcud olan əlavə çıxarılış qaydaları, o cümlədən də deduksiya teoremi natural ədədlər nəzəriyyəsində də fəaliyyət göstərir.

§57. Natural ədədlər nəzəriyyəsində isbat

Qeyd edək ki, natural ədədlər nəzəriyyəsində isbat və çıxarılışın tərifi istənilən birinci tərtib nəzəriyyədə oldu-ğu kimi qalır.

Məsələn, natural ədədlər nəzəriyyəsinin β düsturu isbat olunandır dedikdə $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ düsturlarının elə sonlu ardıcıllığının varlığını nəzərdə tutacağıq ki, $\beta_n = \beta$ və β_i $(i = \overline{1,n})$ düsturlarının hər biri ya bu nəzəriyyənin aksiomudur, yaxud da özündən əvvəlki düsturlardan MP, Gen və ya Ind qaydalarının hər hansı birinin köməyilə alınmışdır.

İndi natural ədədlər nəzəriyyəsində vacib olan bəzi teoremləri isbat edək.

I. S nəzəriyyəsinin istənilən x predmet dəyişəni üçün

$$\vdash x = x \qquad (57.1)$$

İsbatı. İnduksiya aksiomunda $\alpha(x)$ düsturunu x=x şəklində götürsək, həmin aksioma görə $\alpha(0): 0 = 0$ doğrudur.

$$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x')) : (\forall x)(x = x \Rightarrow x' = x')$$

yenə də (S_3) aksiomunun xüsusi halı olduğu üçün doğrudur. Onda induksiya qaydasına əsasən $(\forall x)(x = x)$ düsturu doğrudur, yəni $x = x$ S nəzəriyyəsinin teoremidir.

Deməli, (57.1) teoreminin isbatı sxemi belə olar.

β_1:	$0 = 0$	0 ünsürünün yeganəliyinə görə
β_2:	$(x = x) \Rightarrow (x' = x')$	(S_3) aksiomuna görə
β_3:	$(\forall x)((x = x) \Rightarrow (x' = x'))$	$Gen(\beta_2)$
β_4:	$(\forall x)(x = x)$	$Ind(\beta_1, \beta_3)$
β_5:	$(\forall x)(x = x) \Rightarrow (x = x)$	(4) aksiomu (V fəs. § 36)
β_6:	$x = x$	$MP(\beta_4, \beta_5)$

Beləliklə, aldiq ki, $\vdash x = x$.

II. S nəzəriyyəsinin istənilən t termi üçün

$$\vdash t = t \qquad (57.2)$$

İsbatı.

β_1:	$x = x$	teorem I-ə görə
β_2:	$(\forall x)(x = x)$	$Gen(\beta_1)$
β_3:	$(\forall x)(x = x) \Rightarrow (t = t)$	(4) aksiomu (V fəs.§36)
β_4:	$t = t$	$MP(\beta_2, \beta_3)$

Beləliklə, $\vdash t = t$.

III. S nəzəriyyəsinin istənilən t_1, t_2, t_3 termləri üçün

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow (t_1 = t_3 \Rightarrow t_2 = t_3) \qquad (57.3)$$

İsbatı.

β_1: $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$ — (S_4) aksiomu

β_2: $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3))$ — $Gen(\beta_1)$

β_3: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3))$ — $MP(\beta_1, \beta_2)$

β_4: $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (t_1 = t_2 \Rightarrow (t_1 = t_3 \Rightarrow t_2 = t_3))$ — (4) aksiomu (V fəs. § 36)

β_5: $t_1 = t_2 \Rightarrow (t_1 = t_3 \Rightarrow t_2 = t_3)$ — $MP(\beta_3, \beta_4)$

Deməli, $\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow (t_1 = t_3 \Rightarrow t_2 = t_3)$.

IV. S nəzəriyyəsinin istənilən t_1 və t_2 termləri üçün

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1 \qquad (57.4)$$

İsbatı.

β_1:	$t_1 = t_2$	hipotez
β_2:	$t_1 = t_2 \Rightarrow (t_1 = t_1 \Rightarrow t_2 = t_1)$	III teoremə görə
β_3:	$t_1 = t_1 \Rightarrow t_2 = t_1$	$MP(\beta_1, \beta_2)$
β_4:	$t_1 = t_1$	II teoremə görə
β_5:	$t_2 = t_1$	$MP(\beta_3, \beta_4)$

Beləliklə, $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$ və buradan da deduksiya teoreminə görə

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1$$

alarıq.

(57.4)-dən görünür ki, (57.3) teoreminin aşağıdakı kimi daha iki formasını yaza bilərik.

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow (t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3) \qquad (57.3')$$

$$\vdash t_2 = t_1 \Rightarrow (t_3 = t_1 \Rightarrow t_2 = t_3) \qquad (57.3'')$$

V. S nəzəriyyəsinin ixtiyari t_1, t_2 və t_3 termləri üçün

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 + t_3 = t_2 + t_3 \qquad (57.5)$$

İsbatı. Əvvəlcə ixtiyari x_1, x_2, x_3 predmet dəyişənləri üçün $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)$ düsturunun S nəzəriyyəsində çıxarılan olduğunu göstərək.

Bu düsturu $\alpha(x_3)$-lə işarə edək və x_3-ə görə induksiya qaydasını tətbiq edək.

Göstərək ki, $\alpha(0)$-dan və $(\forall x_3)(\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3'))$-dən $(\forall x_3)\alpha(x_3)$ düsturu çıxarılandır.

Aydındır ki, $\alpha(0)$ düsturu belə olar:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + 0 = x_2 + 0).$$

Göstərək ki, bu düstur S-də teoremdir.

Həqiqətən,

1^0.	$x_1 = x_2$	hipotez
2^0.	$x_1 + 0 = x_1$	(S_5) aksiomu
3^0.	$x_2 + 0 = x_2$	(S_5) aksiomu
4^0.	$x_1 + 0 = x_2$	1^0, 2^0 və (57.3′)-dən
5^0.	$x_1 + 0 = x_2 + 0$	3^0, 4^0 və (57.3″)-dən

Beləliklə, $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + 0 = x_2 + 0)$, onda deduksiya teoreminə görə

$$\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + 0 = x_2 + 0) \text{ və ya } \vdash \alpha(0)$$

olduğunu alarıq. İndi göstərək ki, $\vdash \alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3')$, yəni

$$(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3' = x_2 + x_3'))$$

düsturunun teorem olduğunu isbat edək.

1^0.	$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)$	hipotez
2^0.	$x_1 = x_2$	hipotez
3^0.	$x_1 + x_3' = (x_1 + x_3)'$	(S_6) aksiomu
4^0.	$x_2 + x_3' = (x_2 + x_3)'$	(S_6) aksiomu
5^0.	$x_1 + x_3 = x_2 + x_3$	$MP(1^0, 2^0)$
6^0.	$x_1' + x_3 = x_2' + x_3 \Rightarrow (x_1 + x_3)' = (x_2 + x_3)'$	(S_3) aksiomu
7^0.	$(x_1 + x_3)' = (x_2 + x_3)'$	$MP(5^0, 6^0)$
8^0.	$x_1 + x_3' = (x_2 + x_3)'$	$3^0, 7^0$ və $(57.3')$
9^0.	$x_1 + x_3' = x_2 + x_3'$	$4^0, 8^0$ və $(57.3'')$

Beləliklə,

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3' = x_2 + x_3'),$$

və buradan da

$$x_1 = x_2 \vdash x_1 + x_3' = x_2 + x_3'.$$

Buraya deduksiya teoremini iki dəfə tətbiq etsək, alarıq:

$$\vdash (x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3' = x_2 + x_3')),$$

yaxud $\vdash \alpha(x_3) = \alpha(x_3')$. Bu axırıncını isə *Gen* qaydasına görə belə yazarıq: $\vdash (\forall x_3)(\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3'))$. Deməli, aldıq ki,

$$\vdash \alpha(0) \wedge (\forall x_3)(\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3')).$$

Buradan da *Ind* qaydasına əsasən $\vdash (\forall x_3)(\alpha(x_3))$ və yaxud

$$\vdash (\forall x_3)(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)).$$

Buraya fərdiləşmə əlavə çıxarılış qaydasını tətbiq etsək, $\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + t_3 = x_2 + t_3)$ və alınan bu düstura yenidən iki dəfə ümumiləşmə və fərdiləşmə qaydalarını tətbiq etdikdən sonra (57.5) teoreminin doğruluğuna inana bilərik.

VI. S nəzəriyyəsinin istənilən t_1 və t_2 termləri üçün

$$\vdash t_1 + t_2 = t_2 + t_1 . \qquad (57.6)$$

İsbatı. Əvvəlcə x_1 və x_2 predmet dəyişəni üçün $\vdash x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ olduğunu isbat edək.

$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ düsturunu $\alpha(x_2)$ ilə işarə edək və $\alpha(x_2)$ düsturuna induksiya qaydasını tətbiq edək. Göstərək ki,

$$\vdash (x_1 + 0 = 0 + x_1) .$$

1^0.	$x_1 + 0 = x_1$	(S_5) aksiomu
2^0.	$0 + x_1 = x_1$	teorem (4)
3^0.	$x_1 + 0 = 0 + x_1$	$1^0, 2^0$ və teorem (57.3′)

Deməli, $\vdash \alpha(0)$.

İndi isə göstərək ki,

$$(x_1 + x_2 = x_2 + x_1) \Rightarrow (x_1 + x_2' = x_2' + x_1)$$

1^0.	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	hipotez
2^0.	$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$	(S_6) aksiomu
3^0.	$x_2' + x_1 = (x_2 + x_1)'$	1^0 və (S_6) aksiomu
4^0.	$(x_1 + x_2)' = (x_2 + x_1)'$	1^0 və (S_3) aksiomu
5^0.	$x_1 + x_2' = (x_2 + x_1)'$	2^0 və 4^0 və teorem (57.3)
6^0.	$x_1 + x_2' = x_2' + x_1$	3^0 və 5^0 və teorem (57.3″)
7^0.	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 + x_2' = x_2' + x_1$	1^0 və 6^0 və deduksiya teoremi

Deməli, $\vdash \alpha(x_2) \Rightarrow \alpha(x_2')$.

Beləliklə, alırıq ki, $\vdash \alpha(0)$, $\vdash \alpha(x_2) \Rightarrow \alpha(x_2')$.

Bu axırıncı teoremə ümumiləşmə qaydasını tətbiq etsək, $\vdash(\forall x_2)(\alpha(x_2)\Rightarrow\alpha(x_2'))$ olar. Odur ki, *Ind* qaydasına əsasən $(\forall x_2)\alpha(x_2)$ və ya $\vdash(\forall x_2)(x_1+x_2=x_2+x_1)$ alarıq.

Bu axırıncıya *Gen* və fərdiləşmə qaydalarını tətbiq etsək,

$$\vdash t_1+t_2=t_2+t_1$$

alınar. (57.6) teoremindən istifadə edərək teorem (57.5)-in aşağıdakı iki formasını da yazmaq olar.

$$\vdash t_1=t_2\Rightarrow(t_3+t_1=t_3+t_2)\,. \qquad (57.5')$$

$$\vdash t_1=t_2\Rightarrow(t_2+t_3=t_1+t_3)\,. \qquad (57.5'')$$

VII. S nəzəriyyəsinin ixtiyari t_1,t_2,t_3 termləri üçün

$$\vdash t_1=t_2\Rightarrow t_1\cdot t_3=t_2\cdot t_3\,. \qquad (57.7)$$

İsbatı. Əvvlcə göstərək ki, S nəzəriyyəsinin ixtiyari predmet dəyişənləri üçün

$$\vdash x_1=x_2\Rightarrow x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3\,.$$

Bunun üçün həmin teoremi x_3-dən asılı $\alpha(x_3)$ düsturu ilə işarə edib özünə də induksiya qaydasını tətbiq edək.

$\vdash\alpha(0):\vdash x_1=x_2\Rightarrow x_1\cdot 0=x_2\cdot 0$ olduğunu göstərək.

1^0.	$x_1=x_2$	Hipotez
2^0.	$x_1\cdot 0=0$	(S_7) aksiomu
3^0.	$x_2\cdot 0=0$	(S_7) aksiomu
4^0.	$x_1\cdot 0=x_2\cdot 0$	teorem (57.3′)
5^0.	$x_1=x_2\Rightarrow(x_1\cdot 0=x_2\cdot 0)$	1^0-4^0 və deduksiya teoremi

Deməli, $\alpha(0)$-ın teorem olduğunu göstərdik.

İndi isə isbat edək ki, ixtiyari x_3 dəyişəni üçün

$$(x_1=x_2\Rightarrow x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3)\Rightarrow(x_1=x_2\Rightarrow x_1\cdot x_3'=x_2\cdot x_3')$$

teoremi də doğrudur.

Həqiqətən, aşağıdakı çıxarılış sxeminə baxaq.

1^{00}.	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3$	hipotez
2^{00}.	$x_1 = x_2$	hipotez
3^{00}.	$x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3$	$MP(1^{00}, 2^{00})$
4^{00}.	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + x_1 \cdot x_3 = = x_2 + x_1 \cdot x_3$	teorem (57.5)
5^{00}.	$x_1 \cdot x_3' = x_1 \cdot x_3 + x_1$	(S_8) aksiomu
6^{00}.	$x_1 + x_1 \cdot x_3 = x_2 + x_1 \cdot x_3$	$MP(2^{00}, 3^{00})$
7^{00}.	$x_2 \cdot x_3' = x_2 + x_2 \cdot x_3$	4^{00}, 5^{00} və teorem (57.3′)
8^{00}.	$x_2 + x_1 \cdot x_3 = x_2 + x_2 \cdot x_3$	3^{00} və teorem (57.5′)
9^{00}.	$x_2 \cdot x_3' = x_2 \cdot x_3 + x_2$	(S_8) aksiomu
10^{00}.	$x_1 \cdot x_3' = x_1 + x_1 \cdot x_3$	7^{00}, 8^{00} və teorem (57.3′)
11^{00}.	$x_1 \cdot x_3' = x_2 \cdot x_3'$	7^{00}, 8^{00} və teorem (57.3″)
12^{00}.	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \Rightarrow \Rightarrow (x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3' = x_2 \cdot x_3')$	1^{00}, 2^{00}, 11^{00} və deduksiya teorem

Buradan da

$$\vdash (x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3) \Rightarrow (x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3' = x_2 \cdot x_3')$$

teoremini alarıq. Yəni $\vdash (\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3'))$. Buraya ümumiləşmə qaydasını tətbiq etsək,

$$\vdash (\forall x_3)(\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3'))$$

olar.

$$\vdash \alpha(0) \text{ və } \vdash (\forall x_3)(\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(x_3'))$$

teoremlərindən $\vdash (\forall x_3)\alpha(x_3)$ olduğu alınar.

Buradan fərdiləşmə qaydasına əsasən

$$\vdash (\forall x_3)\alpha(x_3) \Rightarrow \alpha(t)$$

alınar. Aldığımız düstura x_1 və x_2 dəyişənlərinə görə iki dəfə ardıcıl *Gen* və fərdiləşmə qaydalarını tətbiq etsək,

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_3$$

teoremini alarıq.

VIII. S nəzəriyyəsinin istənilən t_1 və t_2 termləri üçün

$$\vdash t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1. \qquad (57.8)$$

Bu teoremi (S_7) aksiomunun köməyilə induksiya qaydasını tətbiq edərək asanlıqla isbat etmək olar.

(57.8) teoremindən istifadə edərək (57.7) teoreminin daha iki formasını yazmaq olar.

$$\vdash t_1 = t_2 \Rightarrow t_3 \cdot t_1 = t_3 \cdot t_2, \qquad (57.7')$$

$$\vdash t_2 = t_1 \Rightarrow t_2 \cdot t_3 = t_3 \cdot t_1. \qquad (57.7'')$$

§58. Natural ədədlər nəzəriyyəsində interpretasiya

Natural ədədlər nəzəriyyəsində interpretasiya vermək və onun modelini qurmaq üçün, hər şeydən əvvəl, göstərək ki, bu nəzəriyyə birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir. Yəni göstərək ki, bu nəzəriyyədə

$$\vdash x = x, \qquad (58.1)$$

$$\vdash x = y \Rightarrow (\alpha(x,x) \Rightarrow \alpha(x,y)). \qquad (58.2)$$

Burada $\alpha(x,x)$ S nəzəriyyəsinin istənilən düsturudur və $\alpha(x,y)$ həmin düsturdan x dəyişəninin bir və ya bir neçə sərbəst daxil olmalarını y-lə əvəz etmək nəticəsində alınır. Həm də elə x-ləri y-lə əvəz etmək lazımdır ki, y dəyişəni həmin x-lər üçün sərbəst olsun.

$\vdash x = x$ teoremi §57-də göstərilmişdir. Ona görə də

$$\vdash x = y \Rightarrow (\alpha(x,x) \Rightarrow \alpha(x,y))$$

teoremini x və y üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində isbat etməklə kifayətlənəcəyik. Bunun üçün isə aşağıdakı təklifin doğruluğunu göstərək.

Lemma. Əgər (58.1) düsturu və istənilən $\alpha(x,x)$ elementar düsturu üçün (58.2) düsturu birinci tərtib nəzəriyyənin teoremidirsə, onda bu nəzəriyyə birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir.

Doğrudan da bilirik ki, birinci tərtib nəzəriyyənin hər bir $\alpha(x,x)$ düsturu bu nəzəriyyənin $\beta(x,x)$ və $\gamma(x,x)$ elementar düsturlarından $\beta(x,x)\Rightarrow\gamma(x,x)$, $\rceil\beta(x,x)$ və $(\forall x)\beta(x,x)$ şəklində alınır. Ona görə də $\alpha(x,x)$ düsturunda iştirak edən məntiq əməllərinin və kvantorların sayına görə riyazi induksiya metodunu tətbiq edək. Elementar düsturlar üçün təklifin doğruluğu §57-də I—VIII teoremlərindən aydındır.

Fərz edək ki, (58.2) düsturu n sayda məntiq əməlləri və kvantorları olan düsturlar üçün nəzəriyyənin teoremidir.

Aşağıdakı halları nəzərdən keçirək.

a) Tutaq ki, $\alpha(x,x)$ düsturu $\rceil\beta(x,x)$ şəklindədir və $\beta(x,x)$ düsturu $m\le n$ sayda kvantor və məntiq əməllərini özündə saxlayır.

İnduktiv fərziyyəmizə görə

$$\vdash y=x\Rightarrow(\beta(x,y)\Rightarrow\beta(x,x)). \qquad (58.3)$$

Burada $\beta(x,x)$ düsturu $\beta(x,y)$ düsturundan y dəyişəninin bir və ya bir neçə daxil olmasını x-lə əvəz etmək nəticəsində alınır. §57, teorem IV-ə və silloqizm qanununa görə (58.3) teoremini aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$\vdash x=y\Rightarrow(\beta(x,y)\Rightarrow\beta(x,x)). \qquad (58.4)$$

Əks mövqe qanununa görə

$$\vdash(\beta(x,y)\Rightarrow\beta(x,x))\Rightarrow(\rceil\beta(x,x)\Rightarrow\rceil\beta(x,y)). \qquad (58.5)$$

(58.4) və (58.5) teoremlərindən yenə də silloqizm qanununa görə

$$\vdash x=y\Rightarrow(\alpha(x,x)\Rightarrow\alpha(x,y))$$

olduğunu alarıq.

b) Tutaq ki, $\alpha(x,x)$ düsturu $\beta(x,x) \Rightarrow \gamma(x,x)$ şəklindədir. Yenə də induktiv fərziyyəmizə görə

$$\vdash x = y \Rightarrow (\beta(x,x) \Rightarrow \beta(x,y)), \qquad (58.6)$$

$$\vdash x = y \Rightarrow (\gamma(x,x) \Rightarrow \gamma(x,y)). \qquad (58.7)$$

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$$

teoreminə görə (58.6) və (58.7)-dən alarıq:

$$\vdash x = y \Rightarrow ((\beta(x,x) \Rightarrow \beta(x,y)) \Rightarrow (\gamma(x,x) \Rightarrow \gamma(x,y))). \qquad (58.8)$$

Digər tərəfdən

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D))$$

teoremini (58.8)-ə tətbiq etsək, alarıq.

$$\vdash x = y \Rightarrow ((\beta(x,x) \Rightarrow \gamma(x,x)) \Rightarrow (\beta(x,y) \Rightarrow \gamma(x,y)))$$

və ya

$$\vdash x = y \Rightarrow (\alpha(x,x) \Rightarrow \alpha(x,y))$$

c) Nəhayət fərz edək ki, $\alpha(x,x)$ düsturu $(\forall z)\beta(x,y,z)$ şəklindədir.

Yenə də induktiv fərziyyəmizə görə

$$\vdash x = y \Rightarrow (\beta(x,x,z) \Rightarrow \beta(x,y,z)).$$

Buraya *Gen* qaydasını tətbiq etsək,

$\vdash x = y \Rightarrow (\beta(x,x,z) \Rightarrow \beta(x,y,z))$ -dan alarıq ki,

$$\vdash (\forall z)(x = y \Rightarrow (\beta(x,x,z) \Rightarrow \beta(x,y,z))),$$

yaxud birinci tərtib nəzəriyyənin (5) aksiomuna görə

$$\vdash x = y \Rightarrow (\forall z)(\beta(x,x,z) \Rightarrow \beta(x,y,z)). \qquad (58.9)$$

Əgər

$$\vdash (\forall z)(\beta(x,x,z) \Rightarrow \beta(x,y,z)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall z)\beta((x,x,z) \Rightarrow (\forall z)\beta(x,y,z))$$

teoremindən və

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

silloqizm qanunundan istifadə etsək, (9) teoremindən

$$\vdash x = y \Rightarrow (\alpha(x,x) \Rightarrow \alpha(x,y)) \qquad (58.10)$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə, yuxarıdakı lemmanın isbatı *a*), *b*), *c*)-dən aydındır.

(58.2) teoreminin isbatı isə bu fəslin 57-ci paraqrafında isbat etdiyimiz I—VIII teoremlərindən və indicə isbat etdiyimiz lemmadan asanlıqla alınır.

İndi isə nəzəriyyənin interpretasiyasını və deməli, onun modelini müəyyən edək. S nəzəriyyəsinin interpretasiya oblastı olaraq bütün mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğunu götürək. $x_1, x_2, \ldots$ predmet dəyişənlərini rəqəmlər kimi, c predmet konstantını 0 (sıfır) tam ədədi kimi, f_1^1 funksional hərfini vahid əlavə etmək əməli, f_1^2 və f_2^2 funksional hərflərini uyğun olaraq toplama və vurma əməlləri və nəhayət A_1^2 predikat hərfini eynilik münasibəti kimi interpretasiya edək.

Aydındır ki, belə interpretasiya nəticəsində alınan model normal model olacaqdır. Bu model S nəzəriyyəsinin standart modeli adlanır. Nəzəriyyənin standart modeli ilə izomorf olmayan hər bir modelinə isə onun qeyri-standart modeli deyilir.

§59. f_1^2 və f_2^2 funksiyalarının xassələri

Əvvəlcə S nəzəriyyəsində rəqəm anlayışını verək.

$0, 0', 0'', 0''', \ldots,$ termlərini gələcəkdə rəqəm adlandıracağıq. Rəqəmin özünü isə rekursiv təyin edəcəyik. 0 rəqəmdir; əgər r rəqəmdirsə, onda r' rəqəmdir. $0, 0', 0'', \ldots,$ rəqəmlərini uyğun olaraq $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots,$ kimi işarə edək.

S nəzəriyyəsinin ixtiyari t_1, t_2, t_3 termləri üçün

(1) $\vdash t_1 + \overline{1} = t_1'$;

(2) $\vdash t_1 \cdot \overline{1} = t_1$;

(3) $\vdash t_1 \cdot \overline{2} = t_1 + t_1, \ldots \quad t_1 \cdot \overline{n} = \overbrace{t_1 + t_1 + \cdots t_1}^{n \text{ sayda}}$;

(4) $\vdash t_1 + t_2 = \overline{0} \Rightarrow (t_1 = \overline{0} \wedge t_2 = \overline{0})$;

(5) $\vdash t_1 \cdot t_2 = \overline{1} \Rightarrow (t_1 = \overline{1} \wedge t_2 = \overline{1})$;

(6) $\vdash t_1 \cdot t_2 = \overline{0} \Rightarrow (t_1 \neq \overline{0} \Rightarrow t_2 = \overline{0})$;

(7) $\vdash t_1 \neq \overline{0} \Rightarrow (\exists x)(t_1 = x')$;

(8) $(t_1 \neq \overline{0} \wedge t_1 \neq \overline{1}) \Rightarrow (\exists x)(t_1 = x'')$;

İsbatı.

(1) β_1:	$x_1 + 0' = (x_1 + 0)'$	(S_6) aksiomu
β_2:	$x_1 + 0 = x_1$	(S_5) aksiomu
β_3:	$x_1 + 0 = x \Rightarrow (x_1 + 0)' = x_1'$	(S_3) aksiomu
β_4:	$(x_1 + 0)' = x_1'$	$MP(\beta_2, \beta_3)$
β_5:	$x_1 + 0' = x_1'$	β_1, β_4 və teorem (57.3′),§57
β_6:	$x_1 + \overline{1} = x_1'$	β_5-dən $\overline{1}$-in tərifinə görə
β_7:	$x_1 + \overline{1} = x_1' \Rightarrow (\forall x_1)(x_1 + \overline{1} = x_1')$	$Gen(\beta_6)$
β_8:	$(\forall x_1)(x_1 + \overline{1} = x_1')$	$MP(\beta_6, \beta_7)$
β_9:	$(\forall x_1)(x_1 + \overline{1} = x_1') \Rightarrow (t_1 + \overline{1} = t_1')$	(4) aksiomu (V fəs. § 36)
β_{10}:	$t_1 + \overline{1} = t_1'$	$MP(\beta_8, \beta_9)$

Beləliklə, $\vdash t_1 + \overline{1} = t_1'$.

(2) β_1:	$x_1 \cdot 0' = x_1 \cdot 0 + x_1$	(S_8) aksiomu
β_2:	$x_1 \cdot 0 = 0$	(S_7) aksiomu
β_3:	$x_1 \cdot 0 + x_1 = 0 + x_1$	β_1, β_2 və teorem (57.3),

		§57
β_4:	$x_1 \cdot 0' = 0 + x_1$	β_1, β_3 və teorem (57.3″), §57
β_5:	$0 + x_1 = x_1$	(S_5) və teorem (57.6), §57
β_6:	$x_1 \cdot 0' = x_1$	β_4, β_5 və teorem (57.3′), §57
β_7:	$x_1 \cdot \overline{1} = x_1$	β_6-dan $\overline{1}$ rəqəminin tərifinə görə
β_8:	$x_1 \cdot \overline{1} = x_1 \Rightarrow (\forall x)(x_1 \cdot \overline{1} = x_1)$	$Gen(\beta_7)$
β_9:	$(\forall x)(x_1 \cdot \overline{1} = x_1)$	$MP(\beta_7, \beta_8)$
β_{10}:	$(\forall x)(x_1 \cdot \overline{1} = x_1) \Rightarrow t_1 \cdot \overline{1} = t_1$	aksiom (4), V fəs. § 36
β_{11}:	$t_1 \cdot \overline{1} = t_1$	$MP(\beta_9, \beta_{10})$

Deməli, $\vdash t_1 \cdot \overline{1} = t_1$. (59.3) teoreminin isbatı (59.2)-yə analoji aparılır.

(59.4) — (59.8) teoremlərinin isbatı induksiya qaydasının tətbiqinə əsaslanır. Nümunə üçün bunlardan, məsələn, (59.7) teoreminin isbatını təfsilatı ilə verək.

$x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = y')$ düsturunu $\alpha(x)$-lə işarə edək və x-ə görə induksiya qaydasını $\alpha(x)$-ə tətbiq edək.

Göstərək ki, $\alpha(0): 0 \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(0 \neq y')$ düsturu S nəzəriyyəsinin teoremidir.

1^0.	$0 \neq y'$	(S_1) aksiomu və teorem (57.4), §57
2^0.	$(\forall y)(0 \neq y')$	$Gen(1^0)$
3^0	$0 = 0$	teorem (1),

.		§57
4^0.	$(\forall y)(0 \neq y') \Rightarrow (0 = 0) \vdash A \Rightarrow \lambda$	tavtologiyaya görə
5^0.	$(\forall x)(0 \neq y') \Rightarrow \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow$ $\Rightarrow (0 = 0)) \Rightarrow ((0 \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(y' = 0))$	tavtologiyaya görə
6^0.	$0 \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(0 = y')$	$MP(4^0, 5^0)$

Beləliklə, alırıq ki, $\vdash \alpha(0)$.

İndi göstərək ki, $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))$ düsturu da S nəzəriyyəsinin teoremidir.

Bunun üçün göstərmək lazımdır ki,

$$x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = y') \vdash x' \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x' = y'),$$

yaxud

$$x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = y'), x' \neq 0 \vdash (\exists y)(x' = y').$$

Doğrudan da,

1^{00}.	$x' \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = y')$	hipotez
2^{00}.	$x' \neq 0$	hipotez
3^{00}.	$x' \neq y \Rightarrow 0 \neq y'$	(S_1) və tavtologiya, $\vdash A \Rightarrow \lambda$
4^{00}.	$0 \neq y' \Rightarrow (\exists x)(x = y)$	tavtologiya
5^{00}.	$y' \neq 0$	(S_1) və teorem (4),§57
6^{00}.	$(\exists x)(x = y)$	$MP(4^{00}, 5^{00})$
7^{00}.	$x = y$	seçmə qaydası
8^{00}.	$x = y \Rightarrow x' = y'$	(S_3) aksiomu
9^{00}.	$x' = y'$	$MP(7^{00}, 8^{00})$
10^{00}.	$(\exists x)(x' = y')$	$\exists$ qaydası

11^{00}. $(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = y')) \Rightarrow$ $(1^{00} - 10^{00})$ -dən
$\Rightarrow x' \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x' = y')$ deduksiya teoreminə görə

12^{00}. $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x' = y) \Rightarrow$ $Gen(11^{00})$
$\Rightarrow x' \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x' = y')$

Beləliklə, alırıq ki, $\vdash (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))$. Yuxarıda da göstərmişik ki, $\vdash \alpha(0)$. Odur ki, induksiya qaydasına görə alırıq $\vdash (\forall x)\alpha(x)$, yəni $\vdash (\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x' = y'))$. Buraya fərdiləşmə qaydasını tətbiq etsək,

$$\vdash (t \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(t = y'))$$

olduğunu alarıq.

İndi isə + və · əməllərinin klassik hesabdan bildiyimiz birgə xassələrinə oxşar olan aşağıdakı düsturların S nəzəriyyəsində teorem olduğunu isbat edək.

İxtiyari t_1, t_2, t_3 termləri üçün

$$\vdash t_1 \cdot (t_2 + t_3) = (t_1 \cdot t_2) + (t_1 + t_3) \qquad (59.1)$$

$$\vdash (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \qquad (59.2)$$

$$\vdash (t_1 + t_3 = t_2 + t_3) \Rightarrow t_1 = t_2 \qquad (59.3)$$

$$\vdash t_3 \neq 0 \Rightarrow (t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_3 \Rightarrow t_1 = t_2) \qquad (59.4)$$

İsbatı. (59.1) teoremini isbat etməkdən ötru

$$x(y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

düsturunu $\alpha(z)$-lə işarə edək və z-ə görə induksiya qaydasını tətbiq edək. Göstərək ki, $\vdash \alpha(0)$ və yaxud

$$\vdash x(y + 0) = (x \cdot y) + (x \cdot 0).$$

1^0. $y + 0 = y$ (S_5) aksiomu

2^0. $x \cdot 0 = 0$ (S_7) aksiomu

3^0. $y + 0 = y \Rightarrow x(y + 0) = (x \cdot y)$ 1^0-dən teorem (57.7),

		§57
4^0.	$x(y+0)=(x\cdot y)$	$MP(1^0, 3^0)$
5^0.	$(x\cdot y)+0=(x\cdot y)$	(S_5) aksiomu
6^0.	$x(y+0)=(x\cdot y)+0$	1^0, 5^0 və teorem (57.3′), §57
7^0.	$x(y+0)=(x\cdot y)+(x\cdot 0)$	6^0 və teorem (57.5), §57

Beləliklə, aldıq ki, $\vdash x(y+0)=(x\cdot y)+(x\cdot 0)$ yaxud $\vdash \alpha(0)$. İndi isə göstərək ki, $\vdash (\forall z)(\alpha(z)\Rightarrow \alpha(z'))$ və yaxud

$$\vdash (\forall z)(x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))\Rightarrow (x(y+z')=(x\cdot y)+(x\cdot z')).$$

1^{00}.	$x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$	hipotez
2^{00}.	$(x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))\Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+z)+x=$ $=(x\cdot y)+(x\cdot z)+x$	1^{00}-dən və §57, teorem (57.5)
3^{00}.	$x(y+z)+x=(x\cdot y)+(x\cdot z)+x$	$MP(1^{00}, 2^{00})$
4^{00}.	$x(y+z)'=(x\cdot y)+(x\cdot z')$	(S_8) aksiomu və 2^{00}
5^{00}.	$x(y+z)'=(x\cdot y)+(x\cdot z'')$	(S) aksiomu və 4^{00}
6^{00}.	$\vdash (x(y+z)'=(x\cdot y)+(x\cdot z))\Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+z')=(x\cdot y)+(x\cdot z')$	1^{00} - 5^{00} və deduksiya teoremi
7^{00}.	$\vdash (\forall z)(x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z))\Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+z')=(x\cdot y)+(x\cdot z')$	$Gen\,(6^{00})$

Beləliklə, aldıq ki, $\vdash (\forall z)(\alpha(z))\Rightarrow \alpha(z'))$. Əgər buraya ümumiləşmə və fərdiləşmə qaydalarını növbə ilə 2 dəfə təkrarən tətbiq etsək, onda

$$\vdash t_1(t_2+t_3)=(t_1\cdot t_2)+(t_1\cdot t_3)$$

teoremini almış olarıq.

Bu fəslin 57-ci paraqrafında isbat etdiyimiz (57.7) teoreminə əsasən yuxarıdakı teoremi belə də yaza bilərik:

$$\vdash (t_2 + t_3) \cdot t_1 = (t_2 \cdot t_1) + (t_3 \cdot t_1)\,. \qquad (59.1')$$

İndi də teorem (59.3)-ü isbat edək.

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

düsturunu $\alpha(z)$-lə işarə edək və z-ə görə induksiya qaydasını tətbiq edək.

Əvvəlcə göstərək ki, $\vdash \alpha(0)$ və ya

$$\vdash x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$$

1^0.	$x + 0 = y + 0$	hipotez
2^0.	$x + 0 = x$	(S_5) aksiomu
3^0.	$y + 0 = y$	(S_5) aksiomu
4^0.	$y + 0 = x$	1^0, 3^0 və teorem (57.3″), §57
5^0.	$x = y$	3^0, 4^0 və teorem (57.3), §57
6^0.	$\vdash x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$	$1^0 - 5^0$ və deduksiya teoremi

Deməli, aldıq ki, $\vdash \alpha(0)$.

İndi göstərək ki, $\vdash (\forall z)(\alpha(z) \Rightarrow \alpha(z'))$ və ya

$$\vdash (\forall z)((x + z) = (y + z) \Rightarrow (x = y) \Rightarrow (x + z') = (y + z') \Rightarrow (x = y))$$

1^{00}.	$x + z = y + z \Rightarrow x = y$	hipotez
2^{00}.	$x + z' = y + z'$	hipotez
3^{00}.	$x + z' = (x + z)'$	(S_6) aksiomu
4^{00}.	$y + z' = (y + z)'$	(S_6) aksiomu
5^{00}.	$x + z' = (y + z)'$	2^{00}, 4^{00} və teorem (57.3), §57
6^{00}.	$y + z' = (x + z)'$	2^{00}, 3^{00} və teorem (57.3), §57
7^{00}.	$(x + z)' = (y + z)'$	5^{00}, 6^{00} və teorem (57.3), §57
8^{00}.	$(x + z)' = (y + z)' \Rightarrow$ $\Rightarrow x + z = y + z$	(S_2) aksiomu

9^{00}. $x+z=y+z$ $\qquad MP(7^{00},8^{00})$

10^{00}. $x=y$ $\qquad MP(9^{00},1^{00})$

11^{00}. $(x+z=y+z \Rightarrow x=y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+z'=y+z' \Rightarrow x=y)$ $\qquad 1^{00}$, 2^{00}, 10^{00} və 2 dəfə deduksiya teoremi

Yaxud

$$\vdash (\alpha(z) \Rightarrow \alpha(z')).$$

12^{00}. $(\forall z)((x+z=y+z \Rightarrow x=y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+z'=y+z' \Rightarrow x=y))$ $\qquad Gen(11^{00})$

Beləliklə, aldıq ki,

$$\vdash (\alpha(z) \Rightarrow \alpha(z')).$$

$\vdash \alpha(0)$ və $\vdash (\forall z)(\alpha(z) \Rightarrow \alpha(z'))$-dən alırıq ki, $\vdash (\forall z)\alpha(z)$. Buraya fərdiləşmə qaydasını tətbiq etsək, $\vdash \alpha(t_3)$ alarıq. $\vdash \alpha(t_3)$ teoreminə x_2 və x_1 dəyişənlərinə görə iki dəfə ümumiləşmə və fərdiləşmə qaydalarını tətbiq etdikdən sonra

$$\vdash t_1+t_3=t_2+t_3 \Rightarrow t_1=t_2$$

teoremini almış oluruq.

Qeyd edək ki, (59.2) və (59.4) teoremlərinin isbatı uyğun olaraq (59.1) və (59.3) teoremlərinin isbatına analojidir. Bu işi sərbəst çalışma kimi oxucuların öhdəsinə buraxırıq.

§60. Natural ədədlər nəzəriyyəsində ziddiyyətsizlik və tamlıq problemləri

Başqa riyazi nəzəriyyələrdə olduğu kimi natural ədədlər nəzəriyyəsində də ziddiyyətsizlik və tamlıq problemləri böyük maraq doğurur.

Natural ədədlər hesabını öz daxilinə alan istənilən klassik nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi probleminin isbatı məsələsi birinci dəfə David Hilbert tərəfindən irəli sürülmüşdur. O, əvvəlcə klassik riyaziyyatı formal — aksiomatik nəzə-riyyə şəklində ifadə etmək, sonra isə alınmış nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi problemini birbaşa həll etmək üçün səy gös-tərmişdir. Lakin məlum olmuşdur ki, bilavasitə sonlu model-lər qurmaqla bu problemi həll etmək mümkün deyildir. Ona görə də o, sonlu isbat metodundan istifadə etməyi təklif et-mişdir. Daha ətraflı desək Hilbertin məqsədi belə idi. Elə formal nəzəriyyə qursun ki, o, ziddiyyətsiz olsun və bu mə-nada tam olsun ki, nəzəriyyənin hər bir düsturu prinsipcə həll olunan olsun. Yəni ya həmin düsturun özü, yaxud da in-karı nəzəriyyədə isbat edilə bilsin.

Hilbert məktəbinin bu sahədə bir sıra xüsusi hal üçün olan müvəffəqiyyətlərinə baxmayaraq arzu olunan nəticə yalnız 1931-ci ildə K.Hödel tərəfindən isbat edildi. Bu nəticə formal hesabı öz daxilinə alan hər bir nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyinin isbatının mümkün olmadığını təsdiq etdi.

Beləliklə, formal hesabın ziddiyyətsizliyinin riyazi isbatının qeyri-mümkünlüyü aşkar edildi. Bu məşhur nəticə Hödelin tam olmamaq haqqında heyrətamiz teoremindən ibarətdir. Bu teorem sübut etdi ki, natural ədədlər hesabını formallaşdıran heç bir aksiomatik nəzəriyyə tam deyildir. Bu teoremin isbatında əsas rolu belə bir xassəyə malik β qapalı düsturu oynayır ki, nə β, nə də $\overline{\beta}$ nəzəriyyənin teoremi deyildir.

Bu isə nəzəriyyənin tamlığına verilmiş mənfi cavabdır. Əslində β və $\overline{\beta}$ müəyyən mülahizələrdir və əgər biz onları məzmunlu hesabın mülahizələri kimi interpretasiya etmiş olsaq, onda onlardan biri doğru, digəri isə yalan olmalıdır. Lakin onların heç biri nəzəriyyənin aksiomları və çıxarılış qaydalarının köməyilə isbat olunmur. Demək belə çıxır ki, hesabda doğru olan, lakin isbat edilməyən mülahizələr vardır. Gözləmək olardı ki, nəzəriyyənin tamlığı ilə əlaqədar bu çatışmazlığı onun aksiomlarına isbat olunmayan β və ya $\overline{\beta}$ mülahizələrindən birini yeni aksiom kimi qoşmaqla ara-dan qaldırmaq olar. Ancaq Hödel isbat etdi ki, hesabın formallaşdırılması nəticəsində alınan hər bir nəzəriyyə hökmən həllolunmaz mülahizəni özündə saxlamalıdır. Belə nəzəriyyəyə həmin isbat olunmayan mülahizəni aksiom kimi daxil etməklə alınan genişləndirilmiş nəzəriyyə əvvəlki kimi yenə də hesabın formallaşdırılmasından ibarət olduğu üçün ona özünün və ya inkarının isbatı mümkün olmayan mülahizələr daxil olacaqdır.

Onu da qeyd edək ki, tam olmamaq haqqında Hödel teoreminin dəqiq ifadəsi və isbatı üçün lazım olan bəzi anlayış və terminlər bizim kursun ümumi çərçivəsindən kənara çıxır. Ona görə də müasir ədəbiyyatların əksəriyyətində bu teoremin ifadəsi Hödelin özünün dediyi kimi deyil, ona ekvivalent başqa təkliflər formasında söylənilir.Lakin Hödel 23 oktyabr 1930-cu ildə Vyana Elmlər Akademiyasının iclasında etdiyi məruzəsində həmin teoremi bir qədər zəif formada aşağıdakı kimi ifadə etmişdir.

«Formallaşdırılmış hesabda həll olunmaz mülahizələr vardır».

Yəni Hödelin fikrincə S nəzəriyyəsində elə qapalı düsturlar mövcuddur ki, onların doğruluğunu nə isbat etmək, nə də təkzib etmək mümkün deyil. Natural ədədlər nəzəriyyəsinin ziddiyyətsizliyinin isbatının mümkün olmadığı isə birinci dəfə Qentsen tərəfindən 1936-cı ildə verilmişdir. Sonralar, 1940-cı ildə Akkerman, 1951-ci ildə Şyutte, Lorentsen və nəhayət, 1959-cu ildə Xladovski tərəfindən bu teoremin yeni variantları işlənmişdir.

VII FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. S nəzəriyyəsində istənilən t_1 və t_2 termləri üçün aşağıdakı teoremləri isbat edin:

a) $\vdash t = 0 + t$;

b) $\vdash 0 \cdot t = 0$;

c) $\vdash t_1' + t_2 = (t_1 + t_2)'$;

d) $t_1' \cdot t_2 = t_1 \cdot t_2 + t_1$.

2. İxtiyari t_1 və t_2 termləri üçün aşağıdakı teoremlərin isbatı sxemini qurun:

a) $\vdash t_1 \neq 0 \Rightarrow (t_1 \cdot t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0)$;

b) $\vdash t_1 + t_2 = \overline{1} \Rightarrow ((t_1 = 0 \wedge t_2 = \overline{1}) \vee (t_1 = \overline{1} \wedge t_2 = 0))$.

3. S nəzəriyyəsinin ixtiyari t_1 və t_2 termləri və x dəyişəni üçün $(\exists x)(x \neq 0 \wedge t_1 + x = t_2)$ düsturunu qısa olaraq $t_1 < t_2$ kimi işarə edək. Aşağıdakı düsturların S nəzəriyyəsində çıxarılan olduğunu göstərin.

a) $t_1 < t_2 \Rightarrow (t_2 < t_3 \Rightarrow t_1 < t_3)$;

b) $t_1 < t_2 \Rightarrow t_2 + t_3 < t_2 + t_3$;

c) $t_1 < t_2 \Rightarrow t_1' < t_2'$;

d) $(\overline{0} < 1) \wedge (\overline{1} < \overline{2}) \wedge (\overline{2} < \overline{3}) \wedge \ldots$.

4. $(t_1 = t_2) \vee (\exists x)(x \neq 0 \wedge t_1 + x = t_2)$ düsturunu qısa olaraq $t_1 \leq t_2$ kimi işarə edək.

İsbat edin ki, S nəzəriyyəsinin ixtiyari t_1, t_2, t_3 termləri üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur.

a) $\vdash t_1 \leq t_3 \Rightarrow (t_3 \leq t_2 \Rightarrow t_1 \leq t_2)$;

b) $\vdash t_1 \leq t_3 \Rightarrow (t_1 + t_2 < t_3 + t_2)$;

$c) \vdash t_1 \le t_3 \Rightarrow (t_3 < t_2 \Rightarrow t_1 < t_2)$;

$d) \vdash t_1 \le t_2 \Rightarrow t_1' \le t_2'$.

5. İstənilən n natural ədədi və S nəzəriyyəsinin ixtiyari α düsturu üçün aşağıdakı düsturların hər birinin nəzəriyyənin teoremi olduğunu göstərin.

$a)$ $(x = \overline{0}) \vee (x = \overline{1}) \vee \cdots \vee (x = \overline{n}) \Rightarrow x \le \overline{n}$;

$b)$ $\alpha(\overline{0}) \wedge \alpha(\overline{1}) \wedge \cdots \wedge \alpha(\overline{n}) \Rightarrow (\forall x)(x \le \overline{n} \Rightarrow \alpha(x))$.

6. Tutaq ki, natural ədədlər çoxluğunda hər hansı C xassəsi təyin edilmişdir.

«Əgər ixtiyari x natural ədədindən kiçik bütün natural ədədlərin C xassəsinə malik olmasından x-in də həmin xassəyə malik olması alınırsa, onda bütün natural ədədlər C xassəsinə malikdir».

Tam induksiya prinsipi adlanan bu təklifi S nəzəriyyəsində aşağıdakı düstur şəklində yaza bilərik:

$$(\forall x)((\forall y)(y < x \Rightarrow \alpha(y) \Rightarrow \alpha(x)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x) \qquad (*)$$

İsbat edin ki, (*) düsturu S nəzəriyyəsinin teoremidir.

7. «Əgər heç olmasa bir dənə natural ədəd C xassəsinə malikdirsə, onda bu xassəyə malik natural ədədlər çoxluğunun ən kiçik elementi vardır» təklifini S nəzəriyyəsinin aşağıdakı düsturu şəklində yazmaq olar:

$$\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)(\alpha(y) \wedge (\forall z)((z < y) \Rightarrow \overline{\alpha}(z))). \qquad (**)$$

Ən kiçik ədəd prinsipi adlanan (**) düsturunun natural ədədlər nəzəriyyəsində çıxarılan olduğunu göstərin.

8. İxtiyari t_1 və t_2 termləri üçün $(\exists x)(t_2 = t_1 \cdot x)$ (burada x t_1 və t_2 termlərinə daxil olmayan predmet dəyişənidir) düsturunu qısa olaraq t_1 / t_2 ilə işarə edək. Aşağıdakı düsturların S nəzəriyyəsində çıxarılan olduğunu isbat edin.

$a)$ t_1 / t_1;

$b)$ $\overline{1} / t_1$;

$c)$ $(t_1 / t_2 \wedge t_2 / t_1) \Rightarrow t_1 = t_2$;

$d)$ $(t_2 \neq 0 \wedge t_1 / t_2) \Rightarrow t_1 \leq t_2$;

$e)$ $(t_1 / t_2 \wedge t_2 / t_3) \Rightarrow t_1 / t_3$.

9. İsbat edin ki, S nəzəriyyəsinin kvantorlar daxil olmayan hər bir α və β düsturları üçün ya $\vdash \alpha \equiv \beta$ yaxud $\vdash \alpha \not\equiv \beta$.

10. S nəzəriyyəsinə yeni bir c_1 predmet konstantı və

$$c_1 \neq \overline{0} \wedge c_1 \neq 1 \wedge \cdots \wedge c_1 \neq \overline{n}$$

aksiomunu qoşmaqla alınan nəzəriyyəni S'-lə işarə edək. Göstərin ki, yeni alınan S' nəzəriyyəsi ziddiyətsizdir, lakin tam deyildir.

VIII FƏSİL.

ÇOXLUQLAR NƏZƏRİYYƏSİNİN AKSİOMATİK QURULMASI.

§61. İntuitiv nəzəriyyədən aksiomatik nəzəriyyəyə keçidin zəruriliyi

XX yüzilliyin əvvəllərindən başlayaraq riyazi məntiq elmi yüksək sürətlə inkişaf etməyə başladı. Buna səbəb olan əsas amillərdən biri və ən başlıcası, məzmunlu qurulmuş riyazi nəzəriyyələrdə aşkar edilmiş qaçılmaz paradokslar (antinomiyalar) idi. Əksər paradoksların səbəbi isə çoxluq nəzəriyyəsinin intuitiv, seyrici formada və ya qeyri aksiomatik qurulması idi.

Riyazi nəzəriyyələr nəzəri çoxluq konsepsiyası əsasında qurulduğundan və çoxluq nəzəriyyəsinin özü bir sıra paradoksların mənbəyi olduğundan (məsələn, Rassel paradoksu, Kantor paradoksu, Burali-Forti paradoksu və s.), deməli, əvvəlcə çoxluqlar nəzəriyyəsini elə qurmaq lazımdır ki, heç bir ziddiyyətə gətirən hallar təsadüf etməsin. Buna ancaq çoxluqlar nəzəriyyəsini aksiomatik qurmaqla nail ol-maq mümkündür.

Bu isə bir sıra yeni anlayış və simvolikaların daxil edilməsini tələb edir. Belə anlayışlardan biri sinif anlayışıdır.

Tərif 1. Hər hansı xassələrlə (münasibətlərlə) təyin olunan külliyyatı sinif adlandıracağıq.

Məsələn, bütün tam ədədləri $m = 10$ ədədinə böldükdə alınan qalıqların bərabər olması xassəsinə (10 moduluna görə müqayisəli olması münasibətinə) görə 10 sayda sinfə ayırmaq olar.

Beləcə də həndəsi fiqurları oxşar olmaları xassəsinə (münasibətinə) görə, Yer planetində olan bütün insanları eyni bir ölkənin vətəndaşı olması xassəsinə (vətəndaşlıq münasibətinə) görə siniflərə ayıra bilərik.

İndi sinif anlayışından istifadə edərək çoxluğa belə tərif verək.

Tərif 2. Hər hansı sinfin elementi olan sinfə çoxluq deyilir.

Çoxluq olmayan sinfi məxsusi sinif adlandırmağı şərtləşək.

Yuxarıdakı təriflərə əsasən çoxluğu və məxsusi sinfi simvolik olaraq:

$M(X)$ və $\urcorner M(X)$ kimi işarə edək. Başqa sözlə

$M(X)$ - $\exists Y\ (X \in Y)$ yəni X çoxluqdur

$\urcorner M(X)$ - $\forall Y\ \ (X \notin Y)$ yəni X məxsusi sinifdir

ifadələrinin qısa yazılışlarıdır.

Bu cür interpretasiyadan sonra məlum olacaq ki, nəzəriyyədə paradoksların adi qaydada aşkar edilməsi nəzəriyyənin ziddiyyətli olmasının nəticəsi deyil, sadəcə bəzi siniflərin çoxluq olmamasının təzahürü kimi qiymətləndirilməlidir.

Beləliklə, biz çoxluq dedikdə elə əlverişli və etibarlı sinifləri nəzərdə tutacağıq ki, riyaziyyatçılar onlardan özlərinin gündəlik əməli yaradıcılıqlarında istifadə edirlər. Lakin məxsusi sinif adı altında elə qeyri adi elementlər yığımı düşünülür ki, əgər onları çoxluq (başqa sinfin elementləri) kimi qəbul etsək, onda qaçılmaz ziddiyyətlərlə üzləşməli olarıq.

Qeyd edək ki, quracağımız nəzəriyyə predmetlər haqqında deyil, sinifləri təsvir edən nəzəriyyə kimi düşünülməlidir. Motiv də ondan ibarətdir ki, riyaziyyatı sinif əmələ gətirməyən obyektlər (məsələn, vəhşi heyvanlar, müəyyən həcmdə yerləşən su molekulları və s.) deyil, ancaq çoxluğun yuxarıda verdiyimiz tərifini ödəyən siniflər maraqlandırır.

Ona görə də bütün riyazi obyektlər və münasibətlər ancaq siniflərlə əlaqədar terminlərlə ifadə edilir.

Latın əlifbasının məhdud sayda $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ həriflərini xüsusi dəyişənlər kimi nəzəriyyənin əlifbasına daxil edək. Əlifbaya həmçinin $X, Y, Z, X_1, X_2, \ldots$ kimi latın əlifbasının böyük hərifləri ilə işarə edilmiş sinifləri, $\forall, \exists$ kvantorları, $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ məntiq əməllərini, (-sol və)-sağ mötərizələri, $\in, \subseteq$ daxil olma münasibətlərini, $=$, $\vdash$ simvollarını, predikat hərflərini daxil edək. Nəzəriyyənin əlifbasına heç bir funksional hərif və konstant daxil deyildir.

Bu simvolların köməyilə quracağımız nəzəriyyənin sözlərini və onların içərisindən düsturlarını seçib ayıracağıq. Bir qədər sonra görəcəyik ki, bu nəzəriyyə elə birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir. Ona görə də birinci tərtib nəzəriyyənin məntiqi aksiomları, çıxarılış qaydaları, isbat anlayışı və s. burada da saxlanılacaq.

Onu da qeyd edək ki, çoxluqlar nəzəriyyəsinin qurulmasına aksiomatik yanaşma ideyası birinci dəfə fon Neyman tərəfindən irəli sürülmüşdür. Sonralar isə fon Neymanın qurduğu aksiomatik nəzəriyyə, R.Robinson, Bernays və K.Hödel tərəfindən sadələşdirilmiş və bir qədər təkmilləşdirilmiş şəkildə yeniləşdirilmişdir. Lakin biz çoxluqlar nəzəriyyəsini aksiomatik qurmaq üçün Mendelson sxemindən və ənənəsindən istifadə edəcəyik.

Əvvəlcə qeyd edək ki, $X \in Y$ yazılışı əvəzinə $P^2(X, Y)$, $X \notin Y$ əvəzinə isə $\urcorner P^2(X, Y)$ nəzərdə tutacayıq.

İndi aşağıdakı tərif və təklifləri qəbul edək.

Tərif 3. $\forall Z\ (Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$ onda və ancaq onda ki, $X = Y$. Başqa sözlə nəzəriyyənin iki obyekti onda və ancaq onda bərabər olur ki, onlar eyni elementlərdən təşkil olunsunlar.

Tərif 4. $X \subseteq Y$ yazılışını $\forall Z\,(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$ düsturunun qısa yazılışı kimi başa düşəcəyik.

Tərif 5. $X \subset Y$ yazılışını $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$ kimi qəbul edəcəyik. Yəni X Y-in məxsusi alt sinfidir. Bu təriflərdən aşağıdakı nəticələr alınır.

1⁰. $\vdash X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X)$;
2⁰. $\vdash X = X$;
3⁰. $\vdash X = Y \Rightarrow Y = X$;
4⁰. $\vdash X = Y \Rightarrow (Y = Z \Rightarrow X = Z)$;
5⁰. $\vdash X = Y \Rightarrow (Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$.

Əlavə olaraq aşağıdakı razılaşmaları da qəbul edək.

(I) $\forall X \;\; (M(X) \Rightarrow A(X))$ düsturu əvəzinə $\forall x_1 \;\; A(x_1)$ və

(II) $\exists X \;\; M(X) \wedge A(X)$ düsturu əvəzinə $\exists x_1 \;\; A(x_1)$ qısa yazılışlarından istifadə edəcəyik.

(I) düsturu məzmunlu olaraq «A münasibəti bütün çoxluq üçün doğrudur», (II) düsturu isə «A bəzi çoxluqlar üçün doğrudur» mənalarını verir.

Onu da qeyd edək ki, burada istifadə edilən X dəyişəni $A(x_1)$-ə daxil olan x_1 dəyişənindən fərqlidir, ona görə ki, bir qayda olaraq $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ dəyişənlərini çoxluğun simvolik işarəsi kimi nəzərdə tutucağıq.

Məsələn, $\forall X \;\; \forall x \;\; \exists y \;\; \exists Z \;\; A(X, x, y, Z)$ ifadəsini

$$\forall X \;\; \forall X_i \;\; \big(\big(M(X_i) \Rightarrow \exists Y \; M(Y)\big) \wedge \exists Z \;\; A(X, X_i, Y, Z)\big)$$

düsturunun qısa yazılışı kimi qəbul edəcəyik.

Beləliklə, biz çoxluqlar nəzəriyyənin aksiomatik qurulması üçün ilk anlayışlar, simvolika, əlifba, düstur və s. kimi zəruri bazanı yaratdıqdan sonra onun xüsusi aksiomları sistemini qəbul edə bilərik.

§62. Çoxluqlar nəzəriyyəsinin xüsusi aksiomları

Əgər verilmiş K nəzəriyyəsi aşağıdakı tələbləri ödəyərsə, ona çoxluqların aksiomatik nəzəriyyəsi deyəcəyik.

I. K birinci tərtib nəzəriyyə olsun.

II. Aşağıdakı xüsusi aksiomlar ödənsin.

1. *Həcmlilik aksiomu*: $X = Y \Rightarrow (X \in Z \Leftrightarrow Y \in Z)$

2. *Cütlər aksiomu*: $\forall x \ \forall y \ \exists z \ \forall u \ (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$

3. *Boş çoxluq aksiomu*: $\exists x \ \forall y \ (y \notin x)$

4. *Siniflərin varlığı aksiomu*:

4$_1$. $\exists X \ \forall u \ \forall v \ (\langle u,v\rangle \in X \Leftrightarrow u \in v)$ (*daxil olma*)

4$_2$. $\forall X \ \forall Y \ \exists Z \ \forall u \ (u \in Z \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$ (*kəsişmə*)

4$_3$. $\forall X \ \exists Z \ \forall u \ (u \in Z \Leftrightarrow u \notin X)$ (*tamamlayıcı*)

4$_4$. $\forall X \ \exists Z \ \forall u \ (u \in Z \Leftrightarrow \exists v(\langle u,v\rangle \in X))$

4$_5$. $\forall X \ \exists Z \ \forall u \ \forall v \ (\langle u,v\rangle \in Z \Leftrightarrow u \in X)$

4$_6$. $\forall X \ \exists Z \ \forall u \ \forall v \ \forall \omega \ (\langle u,v,\omega\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle v,\omega,u\rangle \in X)$

4$_7$. $\forall X \ \exists Z \ \forall u \ \forall v \ \forall \omega \ (\langle u,v,\omega\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle u,\omega,v\rangle \in X)$

5. *Birləşmə aksiomu*: $\forall x \ \exists y \ \forall u \ (u \in y \Leftrightarrow \exists v(u \in v \wedge v \in x))$

6. *Altçoxluqlar aksiomu*: $\forall x \ \exists y \ \forall u \ (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x)$

7. *Ayrılma aksiomu*: $\forall x \ \forall Y \ \exists z \ \forall u \ (u \in z \Leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y)$

8. *Yerləşdirmə aksiomu*:

$$\forall x \ (U(X) \Rightarrow \exists y \ \forall u \quad (u \in y \Leftrightarrow \exists v \ (\langle v,u\rangle \in X \wedge v \in x))),$$

Burada $U(X)$ ilə

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ (\langle x,y\rangle \in X \wedge \langle x,z\rangle \in X \Rightarrow y = z)$$

düsturunun qısa yazılışı nəzərdə tutulmuşdur.

9. *Sonsuzluq aksiomu*: $\exists x \ (\boldsymbol{o} \in x \wedge \forall u \ (u \in x \Rightarrow u \cup \{u\} \in x))$.

Aksiomlardan çıxarılan bəzi təklifləri qeyd edək.

Təklif 1. Aksiomatik qurulmuş çoxluqlar nəzəriyyəsi birinci tərtib bərabərlikli nəzəriyyədir.

İsbatı. §61-də verilmiş 1^0-5^0 teoremlərindən aydın olur ki, çoxluqlar üçün bərabərlik münasibəti təyin olunub və onun refleksivlik, simmetriklik və tranzitivlik xassələri ödənilir. Eyni zamanda həcmlilik aksiomuna görə bərabərlikdə dəyişəni əvəz etmək mümkündür. Bu isə təklifin doğru olduğunu göstərir.

Təklif 2. $\vdash \exists! x \; \forall y \; (y \notin x)$.

Burada $\exists! x$ - elə yeganə x var ki, mənasında işlənilir.

Bu təklifin isbatı boş çoxluq aksiomundan və həcm aksiomundan aydındır. Doğrudan da həmin aksiomlara görə elə çoxluq var ki, heç bir elementi özündə saxlamır və həm də yeganədir.

Boş çoxluğu $\boldsymbol{o}$ kimi işarə edib, özünü də predmet konstantı adlandıraraq nəzəriyyənin əlifbasına daxil edək. İndi boş çoxluğu belə təyin edə bilərik:

$$\forall y \; (y \notin \boldsymbol{o}).$$

Təklif 3. $\vdash \forall x \; \forall y \; \exists! Z \; \forall u \; \big(u \in Z \Leftrightarrow u = x \vee u = y\big)$.

Bu təklifi məzmunlu şəkildə belə ifadə etmək olar.

İstənilən iki x və y çoxluqları üçün nizamlanmamış cüt adlanan elə yeganə $Z = \{x, y\}$ çoxluğu var ki, o ancaq x, y elementlərini özündə saxlayır. Çoxluqlarda olduğu kimi istənilən iki X, Y sinifləri üçün də birqiymətli olaraq $\{X, Y\}$ kimi nizamlanmamış cüt təyin etmək olar. Əgər X və Y elementlərindən hər hansı biri çoxluq olmazsa, onda $\{X, Y\} = 0$ qəbul edəcəyik.

İsbat etmək olar ki, bu nəzəriyyədə

$$\vdash \forall x \;\; \forall y \; \forall u \; \big(u \in \{x, y\} \Leftrightarrow u = x \vee u = y\big),$$

$$\vdash \forall x \; \forall y \; \big(M(\{x, y\})\big),$$

$$\vdash \{X,Y\} = \{Y,X\}.$$

$\{X\}$ yazılışını $\{X,X\}$ cütü kimi başa düşəcəyik. Belə olduqda

$$\vdash \forall x\ \forall y\ (\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y).$$

Tərif. $\{\{X\},\{X,Y\}\}$ şəklində cütü $\langle X,Y\rangle$ kimi işarə edib özünü də X və Y siniflərinin nizamlı cütü adlandıraq.

Tərifdən istifadə edərək aşağıdakı teoremi isbat etmək olar:

$$\vdash \forall x\ \forall y\ \forall u\ \forall v\ \big(\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \Rightarrow x = u \wedge y = v\big).$$

Yuxarıdakına oxşar olaraq nizamlanmış 3-lük, nizamlanmış 4-lük və s. nizamlanmış n-likləri aşağıdakı kimi təyin edə bilərik.

$$\langle X,Y,Z\rangle = \langle\langle X,Y\rangle,Z\rangle,$$

$$\langle X,Y,Z,U\rangle = \langle\langle X,Y,Z\rangle,U\rangle,$$

$$\langle X_1,X_2,...,X_n\rangle = \langle\langle X_1,X_2,...,X_{n-1}\rangle,X_n\rangle.$$

İsbat etmək olar ki,

$$\forall x_1...\forall x_n\ \forall y_1....\forall y_n\ (\langle x_1,...,x_n\rangle = \langle y_1,...,y_n\rangle \Rightarrow x_1 = y_1 \wedge \cdot\cdot\cdot \wedge x_n = y_n).$$

4_2-4_4 və həcmlilik aksiomlarından istifadə edərək aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

$$\vdash \forall X\ \forall Y\ \exists! Z\ \forall u\ \big(u \in Z \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y\big),$$

$$\vdash \forall X\ \exists! Z\ \forall u\ \big(u \in Z \Leftrightarrow u \notin X\big),$$

$$\vdash \forall X\ \exists! Z\ \forall u\ \big(u \in Z \Leftrightarrow \exists v(\langle u,v\rangle \in X)\big).$$

Bu nəticələr çoxluqlar nəzəriyyəsi əlifbasına yeni törəmə —, $\bigcap$, D, $\bigcup$ funksional hərflərinin daxil edilməsini tələb edir ki, onları biz aşağıdakı kimi təyin edəcəyik.

1^0. $\forall u\ \big(u \in X \bigcap Y \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y\big)$ - (siniflərin kəsişməsi),

2^0. $\forall u\ \big(u \in \overline{X} \Leftrightarrow u \notin X\big)$ - (sinfin tamamlayıcısı)

3^0. $\forall u\ \big(u \in D(X) \Leftrightarrow \exists v(\langle u,v\rangle \in X)\big)$ - (X sinfinin təyin oblastı),

4^0. $X \bigcup Y \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{X} \bigcap \overline{Y}\right)}$ - (X və Y siniflərinin birləşməsi),

5^0. $V = \overline{\boldsymbol{o}}$ - universal sinif,

6^0. $X - Y = X \bigcap \overline{Y}$ - (siniflərin fərqi).

Siniflər çoxluğunda təyin edilmiş, —, $\bigcap$, $\bigcup$ əməllərinin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

$\vdash \forall u \left(u \in X \vee Y \Leftrightarrow u \in X \vee u \in Y\right)$,

$\vdash \forall u \left(u \in V\right)$,

$\vdash X \bigcap Y = Y \bigcap X$,

$\vdash \left(X \bigcap Y\right) \bigcap Z = X \bigcap \left(Y \bigcap Z\right)$,

$\vdash X \bigcap X = X$,

$\vdash X \bigcap \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$,

$\vdash X \bigcap V = X$,

$\vdash X \bigcap \left(Y \bigcup Z\right) = \left(X \bigcap Y\right) \bigcup \left(X \bigcap Z\right)$,

$\vdash \overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \bigcap \overline{Y}$,

$\vdash X - X = \boldsymbol{o}$,

$\vdash \overline{\overline{X}} = X$,

$\vdash X \bigcup Y = Y \bigcup X$,

$\vdash \left(X \bigcup Y\right) \bigcup Z = X \bigcup \left(Y \bigcup Z\right)$,

$\vdash X \bigcup \left(Y \bigcap Z\right) = \left(X \bigcup Y\right) \bigcap \left(X \bigcup Z\right)$,

$\vdash X \bigcup X = X$,

$\vdash X \bigcup \boldsymbol{o} = X$,

$\vdash X \bigcup V = V$,

$\vdash \overline{X \bigcap Y} = \overline{X} \bigcup \overline{Y}$,

$\vdash V - X = \overline{X}$,

$\vdash \overline{V} = \boldsymbol{o}$.

Y_1 və Y_2 siniflərinin $Y_1 \times Y_2$ Dekart hasilini belə təyin edək:

$$\forall x \left(x \in Y_1 \times Y_2 \Leftrightarrow \exists u \exists v \left(x = \langle u, v\rangle \wedge u \in Y_1 \wedge v \in Y_2\right)\right).$$

Xüsusi halda Y^n qüvvəti $Y^{n-1} \times Y$ -nin qısa yazılışıdır.

V^n isə bütün nizamlanmış n-likləri ifadə edir.

§63. Aksiomlardan alınan nəticələr

Siniflərin varlığı və həcmlilik aksiomlarından alınır ki,

$$\vdash \exists! Z\ \forall x\ \left(x \in Z \Leftrightarrow x \subseteq Y\right),$$

yəni elə yeganə Z sinfi var ki, Y sinfinin bütün altsinifləri ona daxildir. Y sinfinin bütün altçoxluqları sinfini $P(Y)$-lə işarə edək. Tərifə görə

$$\forall x\ \left(x \in P(Y) \Leftrightarrow x \subseteq Y\right).$$

Yenə də siniflərin varlığı və həcmlilik aksiomundan alarıq:

$$\vdash \exists! Z\ \forall x\ \left(x \in Z \Leftrightarrow \exists v\left(x \in v \wedge v \in Y\right)\right).$$

Bu o deməkdir ki, elə yeganə Z sinfi var ki, o Y sinfinin bütün elementlərini və ancaq onları özündə saxlayır.

Y sinifinin bütün elementlərinin birləşməsini $\bigcup(Y)$ kimi işarə edək. Tərifə görə

$$\forall x\ \left(x \in \bigcup\left(Y\right) \Leftrightarrow \exists v\left(x \in v \wedge v \in Y\right)\right).$$

Birləşmə aksiomundan istifadə edərək aşağıdakı teoremi isbat edə bilərik.

$$\vdash \forall x\ M\left(\bigcup(x)\right).$$

Bu teorem təsdiq edir ki, x çoxluğunun bütün elementlərinin $\bigcup(x)$ birləşməsi də çoxluqdur.

Çoxluğun altçoxluqları aksiomuna əsasən deyə bilərik,

$$\vdash \forall x\ M(P(x)).$$

Bu teoremi məzmunlu şəkildə belə ifadə etmək olar: x çoxluğunun bütün altçoxluqları külliyyatı da çoxluqdur. Ayrılma aksiomundan aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olar.

Nəticə 1. $\vdash \forall x\ \forall Y\ M(x \cap Y)$.

Bu o deməkdir ki, çoxluğun siniflə kəsişməsi çoxluqdur.

Nəticə 2. $\vdash \forall x\ \forall Y\ (Y \subseteq x \Rightarrow M(Y))$.

Bu nəticə təsdiq edir ki, çoxluğun altsinfi də çoxluqdur.

Nəticə 3. $\vdash \forall x\ \forall y\ M(x \times y)$.

Bu teoremi cütlər və yerləşdirmə aksiomundan çıxarmaq olar. Nəticə 3-ə görə çoxluqların Dekart hasili də çoxluqdur.

Beləliklə, yuxarıdakı siyahıdan aydın olur ki, çoxluqlar nəzəriyyəsinin xüsusi aksiomları ancaq sonlu sayda olmaqla aşağıdakılardan ibarətdir: həcmlilik aksiomu, cütlər aksiomu, boş çoxluq aksiomu, ayrılma aksiomu, birləşmə aksiomu, altçoxluqlar çoxluğu aksiomu, yerləşdirmə aksiomu, sonsuzluq aksiomu və 7 dənə siniflərin varlığı aksiomu.

Birinci tərtib nəzəriyyənin qeyd etdiyimiz 5 dənə məntiqi aksiomları ilə birlikdə yeni qəbul etdiyimiz bu 15 sayda aksiomların, habelə birinci tərtib nəzəriyyədə fəaliyyət göstərən çıxarılış qaydalarının köməyilə çoxluqlar nəzəriyyəsini formal nəzəriyyə şəklində qurmaq olar. Aydındır ki, bütün formal qurulmuş nəzəriyyələrdə olduğu kimi aksiomatik qurulmuş çoxluqlar nəzəriyyəsində də heç bir ziddiyyətli vəziyyətlərə (paradokslara) təsadüf edilməyəcək və məzmunlu nəzəriyyə ilə bağlı paradoksları doğuran səbəblər də aşkar ediləcək.

Doğurdan da indi göstərəcəyik ki, çoxluqlar nəzəriyyəsinin qeyri-formal qurulması ilə əlaqədar meydana çıxan Rassel paradoksu yeni qurduğumuz aksiomatik nəzəriyyədə çıxarılmayandır. Xatırlayaq ki, Y çoxluğunu belə təyin etmişdik.

$$Y = \{X \mid X \notin X\}.$$

Bu o deməkdir ki, $\forall X \ (X \in Y \Leftrightarrow X \notin X)$.

Siniflərin varlığı aksiomuna görə belə Y sinfi var.

İlkin qəbul etdiyimiz simvolikaya görə sonuncu düsturu belə yazmaq olar:

$$\forall X\big(M(X) \Rightarrow (X \in Y \Leftrightarrow X \notin X)\big).$$

İndi tutaq ki, $M(Y)$-dir, yəni Y çoxluqdur. Onda $Y \in Y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Y \notin Y$ olar ki, buradan da $(A \Leftrightarrow \rceil A) \Rightarrow (A \wedge \rceil A)$ tavtologiyasına əsasən $Y \in Y \wedge Y \notin Y$ alınır. Bu halda birinci tərtib nəzəriyyədə fəaliyyət göstərən induksiya teoreminə görə

$$\vdash M(Y) \Rightarrow (Y \in Y \wedge Y \notin Y)$$

olduğunu alarıq. Bundan sonra $(B \Rightarrow (A \wedge \rceil A)) \Rightarrow \rceil B$ tavtologiyasından istifadə edərək alarıq ki, $\rceil M(Y)$, yəni Y çoxluq deyil.

Beləliklə, çoxluqlar nəzəriyyəsinin intuitiv (məzmunlu) qurulması ilə əlaqədar aparılan mühakiməyə əsasən meydana çıxan Rassel paradoksunun səbəbi ondadır ki, aksiomatik qurulmuş nəzəriyyədə sadəcə $Y = \{X \mid X \notin X\}$ kimi şərtlə verilmiş Y çoxluq deyil, məxsusi sinifmiş. Bununla da biz aksiomatik qurduğumuz nəzəriyyədə əvvəllər bizə məlum olan Rassel, Kantor, Burali-Forti tipli paradokslardan azad olmağın mexanizmini, onu törədən səbəbləri aydınlaşdırmış oluruq.

Bir daha qeyd edək ki, aksiomatik qurulmuş çoxluqlar nəzəriyysi birinci tərtib nəzəriyyə olduğundan orada fəaliyyət göstərən MP, Gen və Ind kimi çıxarılış qaydaları burada da öz qüvvəsində qalır. Teoremlərin isbatı və hipolezlərdən çıxarılanlıq anlayışları da analoji qaydada tərif edilir.

Məsələn, yeni qurduğumuz nəzəriyyədə

$$\vdash \forall x \ \forall Y \ (Y \subseteq x \Rightarrow M(Y))$$

teoremini isbat edək.

$\beta_1 :\vdash \forall x\ (x \subseteq X \bigcap Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y)$ -(həcmlilik aksiomuna görə)

$\beta_2 :\vdash \forall x\ \left(Y \in x \Rightarrow Y \bigcap x = Y\right)$ - (kəsişmə aksiomuna görə)

$\beta_3 :\vdash \forall x\ \left(Y \in x \Rightarrow Y \bigcap x = Y\right) \Rightarrow \forall x\left(M\left(Y \bigcap x\right)\right)$ - (ayrılma aksiomuna görə)

$\beta_4 :\vdash \forall x\ \left(M\left(Y \bigcap x\right)\right)$ - $MP(\beta_2, \beta_3)$

$\beta_5 :\vdash \forall x\ \forall Y\ \left(Y \subseteq x \Rightarrow M\left(Y\right)\right)$ - *Gen* qaydası

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ teoremin isbatı sxemidir və isbatın uzunluğu $k = 5$.

§64. Siniflərin eynigüclülüyü

Fərz edək ki, X və Y sinifləri verilmişdir.

Tərif. Əgər təyin oblastı X və qiymətlər oblastı Y sinfi olan qarşılıqlı birqiymətli f inikası varsa, onda X və Y siniflərinə eynigüclü siniflər deyilir və $X \simeq Y$ kimi yazılır.

$X \simeq Y$ münasibətini predikatlar məntiqi düsturu şəklində yazmaq üçün əvvəlcə aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.

$B(X) - X$ birqiymətli uyğunluqdur. Məntiqi dildə o deməkdir ki,

$$B(X) \equiv \forall x \forall y \forall z (\langle x, y\rangle \in X \wedge \langle x, z\rangle \in X \Rightarrow y = z).$$

$F(X) - X$ funksiyadır. Bunu predikatlı düstur şəklində yazaq:

$$F(X) \equiv X \subseteq V^2 \wedge B(X).$$

$QB(X) - X$ qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur. Bunu məntiqi dildə belə yazacağıq

$$QB(X) \equiv B(X) \wedge B(\breve{X}).$$

Burada $\breve{X}$ ilə

$$\breve{X} \subseteq V^2 \wedge \forall x_1 \forall x_2 (\langle x_1, x_2\rangle \in \breve{X} \equiv \langle x_1, x_2\rangle \in X)$$

şərtini ödəyən $\langle x_2, x_1 \rangle$ cütləri çoxluğu işarə edilmişdir.

İndi tutaq ki, $\varphi(X_1, X_2, Y)$ hər hansı predikatlar məntiqi düsturudur.

$\widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 \varphi(x_1, x_2, Y)$ ilə $\varphi(x_1, x_2, Y)$ düsturunu ödəyən bütün cütləri işarə edək. Başqa sözlə

$$\forall u\,(u \in \tilde{x}_1 \tilde{x}_2\, \varphi(x_1, x_2, Y)) \equiv \exists x_1 \exists x_2\, (u = \langle x_1, x_2 \rangle \wedge \varphi(x_1, x_2, Y)).$$

Bu razılaşmalardan sonra $X \simeq Y$ yazılışını predikatlar məntiqi düsturu şəklində aşağıdakı kimi vermək olar:

$$X \underset{F}{\simeq} Y \equiv (F(X) \wedge QB(X) \wedge D(F) = X \wedge R(F) = Y),$$

$$X \simeq Y \equiv \exists F((X \underset{F}{\simeq} Y) \simeq Y).$$

Buradan alınır ki,

$$\vdash \forall x \forall y\,(x \simeq y) \Leftrightarrow \exists f\,(x \underset{f}{\simeq} y)$$

Ona görə də $x \simeq y$ yazılışını biz çoxluqlara tətbiq olunmuş kvantorlar iştirak edən predikat düsturu kimi başa düşəcəyik.

Aydındır ki, F və G funksiyalarının superpozisiyasından danışa bilərik. Belə ki, əgər $X \underset{F}{\simeq} Y$ və $Y \underset{G}{\simeq} Z$ isə, onda $X \underset{H}{\simeq} Z$ olar. Burada $H = F \circledast G$ ilə F və G funksiyalarının superpozisiyası işarə edilmişdir.

Siniflərin eynigüclülüyünün aşağıdakı xassələri, çoxluqlar cəbrində olduğu kimi burada da saxlanılır.

Xassə 1. $X \simeq X$ (refleksivlik);

Xassə 2. $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$ (simmetriklik);

Xassə 3. $X \simeq Y \wedge Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$ (tranzitivlik).

Bu xassələri isbatsız qəbul edərək aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu göstərək.

Təklif. Siniflər çoxluğunda verilmiş aşağıdakı düsturlar çoxluqlar nəzəriyyəsinin teoremdir.

(1) $\vdash ((X \simeq Y) \wedge (X_1 \simeq Y_1) \wedge (X \cap X_1 = 0) \wedge (Y \cap Y_1 = 0)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow ((X \bigcup X_1) \simeq (Y \bigcup Y_1)).$$

(2) $\vdash ((X \simeq Y) \wedge (X_1 \simeq Y_1)) \Rightarrow ((X \times X_1) \simeq (Y \times Y_1))$.

(3) $\vdash X \times \{y\} \simeq X$.

(4) $\vdash X \times Y \simeq Y \times X$.

(5) $\vdash ((X \times Y) \times Z \simeq ((X \times (Y \times Z))$.

Bu teoremlərdən, məsələn, (3) və (5)-in isbatını verək, digərlərini isə oxuculara sərbəst iş kimi tapşırırıq.

(3). Tutaq ki, $F = \tilde{u}\ \tilde{v}\ (u \in X \wedge v \in \{u, y\})$.

Onda $\vdash X \underset{F}{\simeq} X \times \{y\}$ olması aşkardır.

(5). $F = \tilde{u}\ \tilde{v}\ (\exists x \exists y \exists z (x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z \wedge$
$\wedge\, u = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle \wedge v) = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle)$.

Bu isə o deməkdir ki,

$$\vdash ((X \times Y) \times Z) \underset{F}{\simeq} (X \times (Y \times Z)).$$

Növbəti teoremlərin isbatına keçməzdən əvvəl aşağıdakı yeni işarələmələri qəbul edək.

$X \bigcap (Y \times V)$, yəni X sinfi Y oblastı ilə məhduddur (burada V -universal sinifdir);

$$h(X,Y) = \begin{cases} z, \text{ яэяр } \forall u (\langle Y, u\rangle \in X \Leftrightarrow u = z) \text{ оларс} \\ 0, \text{ якс щалда;} \end{cases}$$

yəni əgər elə yeganə z varsa ki, $\langle y, z\rangle \in X$, onda $z = h(X, y)$ və $h(X, y) = 0$ əks halda;

$$h^*(X,Y) = R(h(X,Y));$$

yəni əgər X funksiyadırsa, onda $h^*(X,Y)$ Y oblastı ilə hüdudlanmış X sinfinin qiymətləri oblastıdır.

Bundan əlavə siniflər arasında onların güclərini müqayisə etmək üçün $\preceq$, $\prec$ kimi işarə edilmiş qismən nizamlama və ciddi nizamlama münasibətləri də təyin edək. Belə ki, istənilən iki X və Y sinifləri üçün $X \preceq Y$ onda və ancaq onda ki,

X sinfinin elementlərinin «miqdarı» Y sinfinin elementlərinin «miqdarı»ndan az və ya elə o qədərdir.

Başqa sözlə X sinfi Y-in hər hansı altsinfi ilə eynigüclüdür. Bunu predikatlar məntiqi düsturu şəklində belə yazacağıq:

$$\forall X\ \forall Y\ (X \preceq Y) \Leftrightarrow \exists Z(Z \subseteq Y \wedge Z \simeq X).$$

$X \prec Y$ isə o deməkdir ki, X sinfi Y-in hər hansı məxsusi altsinfi ilə eynigüclüdür. Bunu belə yazacağıq:

$$X \prec Y \Leftrightarrow X \preceq Y \wedge \neg(X \simeq Y).$$

Teorem (Şreder-Bernşteyn). İstənilən X və Y sinifləri üçün

$$\vdash (X \preceq Y \wedge Y \preceq X) \Rightarrow X \simeq Y.$$

Məzmunlu şəkildə teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Əgər $X \simeq Y_1 \subseteq Y \wedge Y \simeq X_1 \subseteq X$ isə onda $X \simeq Y$. Başqa sözlə əgər X sinfi Y sinfinin hər hansı altsinfi ilə və Y sinfi də X sinfinin altsinfi ilə eyni gücə malikdirsə, onad X və Y siniflərinin gücləri bərabərdir.

Teoremin isbatı, doğruluğu bilavasitə aydın olan aşağıdakı təklifə əsaslanır ki, onu da biz hazır qəbul edəcəyik.

Əgər $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = 0$ olarsa və

$$X \underset{f}{\simeq} X \cup Y \cup Z$$

isə, onda elə g funksiyası var ki, $X \underset{g}{\simeq} X \cup Y$.

İndi teoremin isbatına keçə bilərik. Bunun üçün qəbul edək ki,

$$X \underset{f}{\simeq} Y_1 \wedge Y_1 \subseteq Y \wedge Y \underset{g}{\simeq} X_1 \wedge X_1 \subseteq X.$$

Tutaq ki, $H = h^*(g, Y_1) \subseteq X_1 \subseteq X$. Onda aydındır ki, $H \cap (X_1 - H) = 0, H \cap (X - X_1) = 0$ və $(X - X_1) \cap (X_1 - H) = 0$ olar. Digər tərəfdən

$$X = (X - X_1) \cup (X_1 - H) \cup H$$

və f və g funksiyalarının $G = f \circledast g$ superpozisiyası təyin oblastı X, qiymətlər oblastı H olan qarşılıqlı birqiymətli funksiya olduğundan, deməli, $H \underset{\breve{G}}{\simeq} X$ olar. Belə olduqda elə qarşılıqlı birqiymətli F funksiyası var ki,

$$H \underset{F}{\simeq} X_1 .$$

Nəhayət, tutaq ki, D f, g və $\breve{G}$ funksiyalarının superpozisiyalarıdır və

$$h(\mathscr{D},u) = (\breve{G}) \circledast ((D \circledast h(H,u)) .$$

Buradan da

$$X \underset{G}{\simeq} H , \; H \underset{F}{\simeq} X_1 \text{ və } X_1 \underset{\breve{G}}{\simeq} Y$$

olduğundan alırıq ki, $X \simeq Y$. Bununla da teorem isbat olunur.

Çoxluqların aksiomatik nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan daha bir teorem isbat edək.

Teorem (Kantor).

$$\forall x \; (x \prec \mathscr{P}(x)) .$$

Məzmunlu şəkildə bu teoremin ifadəsi belədir.

İstənilən x çoxluğunun gücü $\mathscr{P}(x)$ altçoxluqları çoxluğunun gücündən kiçikdir.

İsbatı. Fərz edək ki, f funksiyasının təyin oblastı x-dir və ixtiyari $u \in x$ üçün $h(f,u) = \{u\}$. Onda aydındır ki, $h^*(f,x) \subseteq \mathscr{P}(x)$ və deməli, f funksiyası qarşılıqlı birqiymətlidir. Bu isə onu göstərir ki, $x \preceq \mathscr{P}(x)$.

İndi isbat edək ki, $\rceil (x \simeq \mathscr{P}(x))$.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, hər hansı g funksiyası ilə $x \underset{g}{\simeq} \mathscr{P}(x)$ inikası mümkündür. Əlavə fərz edək ki,

$$y = \widetilde{u} \; (u \in x \wedge u \not\subset h(g,u)) .$$

Buradan aydın olur ki, $y \in \mathscr{P}(x)$.

Deməli, x çoxluğunda elə yeganə z var ki, $h(g,z)=y$.

$$\forall u\,(u \in y \Leftrightarrow u \in x \wedge u \not\subset h(g,u))$$

olduğu üçün, bu halda

$$\forall u\,(u \in h(g,z) \Leftrightarrow u \in x \wedge u \not\subset h(g,u)).$$

Buradan da alırıq ki,

$$z \in h(g,z) \Leftrightarrow z \in x \wedge z \not\subset h(g,z).$$

Lakin $z \in x$ olduğu üçün, onda alarıq ki,

$$z \in h(g,z) \Leftrightarrow z \not\subset h(g,z).$$

Bu sonuncu aldığımız ziddiyyət əks fərziyyəmizin doğru olmadığını göstərir ki, bununla da teoremin isbatı başa çatmış olur.

§65. Sonlu və sonsuz çoxluqlar

Yuxarıdakı paraqrafda gördük ki, çoxluqlar arasında eynigüclülük (bərabərgüclülük) münasibəti ekvivalentlik münasibətdir. Ona görə də bütün çoxluqları ekvivalentlik siniflərinə ayırmaq olar. Belə ki, verilmiş x çoxluğu ilə eynigüclü olan bütün çoxluqlar bir sinif əmələ gətirir ki, həmin ekvivalentlik sinfinə kardinal ədəd və ya x çoxluğunun gücü deyirlər.

Məsələn, əgər u çoxluqdursa və $x=\{u\}$ isə, onda x çoxluğunun ekvivalentlik sinfi bütün $\{v\}$ birelementli çoxluqlar sinfidir ki, o da 1_C kardinal ədədini müəyyən edir.

Eynilə, əgər u və v bərabər çoxluqlar deyilsə ($u \neq v$), onda $y=\{u,v\}$ çoxluğunun ekvivalentlik sinfi bütün ikielementli (dəqiq olaraq iki elementi özündə saxlayan) çoxluqlardan ibarət olacaqdır ki, onun da kardinal ədədi 2_C-dir. Bunu predikatlı düstur şəklində belə yaza bilərik:

$$2_C = \tilde{z}\ (\exists x_1 \exists y_1 (x_1 \neq y_1) \wedge z=\{x_1,y_1\}).$$

Qeyd edək ki, bütün kardinal ədədlər (sıfır kardinal ədəddən başqa, $0=\{0\}$) məxsusi siniflərdir. Məsələn, göstərək ki, 1_C ədədi məxsusi sinifdir. Həqiqətən də tutaq ki, $h(F,x)=x$ bərabərliyi istənilən $x \in V$ (V-universal çoxluqdur) üçün ödənir və $V \simeq 1_C$ olduğu da universal çoxluğun tərifindən aydındır. Onda elə F funksiyası var ki, $V \simeq 1_C$ olar. Lakin $\rceil M(V)$ olduğundan yerləşdirmə aksiomuna görə $\rceil M(1_C)$ olar.

Çoxluqları xarakterizə edən kardinal ədəd sonlu və ya sonsuz ola bilər. Başqa sözlə verilmiş x çoxluğu ilə bərabərgüclü çoxluqların əmələ gətirdiyi sinfin elementləri sayı hər hansı bir sonlu natural ədədlə xarakterizə edilər, yaxud da heç bir sonlu ədədlə göstərilə bilməz. Birinci halda deyirlər ki, x çoxluğu sonludur, ikinci halda isə x çoxluğu sonsuz çoxluq adlanır. Bir qədər də dəqiq desək, əgər çoxluq hər hansı sonlu kardinal ədədlə eynigüclü olarsa, ona sonlu, əks halda isə sonsuz çoxluq deyilir. Buradan aydın olur ki, bütün sonlu kardinal ədədlər sonlu çoxluqlardır.

Kardinal ədədlərlə əlaqədar aşağıdakı doğru mülahizələri söyləmək olar:

1^0. Heç bir sonlu kardinal ədəd ona bərabər olmayan kardinal ədədlə bərabərgüclü ola bilməz.

2^0. Eyni bir kardinal ədədə eynigüclü olan bütün sonlu çoxluqlar öz aralarında bərabərgüclüdürlər.

3^0. İstənilən sonsuz kardinal ədəd heç bir sonlu kardinal ədədlə bərabərgüclü ola bilməz.

4^0. Heç bir sonlu kardinal ədəd özünün məxsusi altçoxluğu ilə bərabərgüclü ola bilməz.

Bu təkliflərin hər birini predikatlı düstur şəklində yazmağı və isbat etməyi oxuculara məsləhət bilirik.

VIII FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. Aşağıdakı teoremləri məzmunlu şəkildə söyləyin və isbat edin.

$a) \vdash \forall x\ \forall y\ \exists!\ Z\ \forall u\ (u \in Z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$;

$b) \vdash \forall X\ (M(X) \Leftrightarrow \exists y (X \in y))$.

2. İsbat edin ki, x, y, u, v çoxluqları üçün

$\vdash \forall x\ \forall y\ \forall u\ \forall v\ (\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Rightarrow x = u \wedge y = v)$.

3. Teoremləri isbat edin:

$a) \vdash \forall u\ (u \in X \bigcup Y \Leftrightarrow u \in X \vee u \in Y)$;

$b) \vdash X \bigcap (Y \bigcup Z) \Leftrightarrow (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z)$;

$c) \vdash X \bigcup (Y \bigcap Z) \Leftrightarrow (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$.

4. İsbat edin:

$$\vdash \forall X\ \exists Z\ \forall u\ \forall v\ \forall t\ (\langle u, v, t, \rangle \in Z \Leftrightarrow \langle u, t, \rangle \in X).$$

(***Göstəriş.*** Siniflərin varılığı və cütlər aksiomlarından istifadə edin).

5. $\vdash \forall x\ \forall y\ M(x \bigcup y)$ olduğunu göstərin.

6. Teoremi isbat edin:

$$\vdash \forall x\ \forall y\ M(x \times y),$$

(burada $x \times y$ ilə x və y çoxluqlarının Dekart hasili işarə edilmişdir).

7. İsbat edin:

$a) \vdash \forall x (\bigcup (\{x\}) = x)$;

$b) \vdash \forall x\ \forall y\ (\bigcup (\langle x, y\rangle) = \{x, y\})$.

8. Teoremi isbat edin:

$$\vdash \forall X \, \forall Y \; \exists X_1 \, \exists Y_1 \, ((X \simeq X_1 \wedge Y \simeq Y_1) \wedge X_1 \bigcap Y_1 = 0) \, .$$

9. İsbat edin ki, əgər $X \preceq Y$ və X çoxluq deyilsə Y də çoxluq deyil. Başqa sözlə:

$$\vdash (X \preceq Y) \wedge \urcorner M(X) \Rightarrow \urcorner M(Y) \, .$$

10. Teoremin doğruluğunu göstərin:

$$\vdash (X \preceq Y) \wedge \urcorner (X \prec Y) \, .$$

11. İsbat edin ki, ixtiyari X və Y sinifləri üçün aşağıdakı teoremlər doğrudur:

$a) \vdash X \preceq Y \bigcup X$;

$b) \vdash (X \prec Y) \Rightarrow \urcorner (Y \preceq X)$.

12. İsbat edin ki, X və Y ixtiyari siniflər olduqda

$a) \vdash X \subseteq Y \Rightarrow X \preceq Y$;

$b) \vdash X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$.

IX FƏSİL.

REKURSİV HESABLANAN FUNKSİYALAR VƏ ÇOXLUQLAR.

§66. Hesabi funksiyalar və münasibətlər

Məlumdur ki, $x_1,x_2,...,x_n$ sərbəst dəyişənlərindən asılı $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası verilmişdir dedikdə elə bir qanun (qayda) verildiyini nəzərdə tuturuq ki, həmin qanun $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərinin hər bir konkret qiymətləri yığımına y asılı dəyişəninin tamamilə müəyyən və yeganə bir qiymətini qarşı qoyur. Həm də burada $x_1,x_2,...,x_n$ və y dəyişənləri istənilən ədədi çoxluğun ünsürlərinə bərabər qiymətlər ala bilər. Məsələn, orta məktəb kursundan bildiyimiz $y=\sin x$ funksiyasında x və y həqiqi qiymətlər, $z=+\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ funksiyasında isə x_1 və x_2 istənilən həqiqi qiymətlər, y isə müsbət həqiqi ədədə bərabər qiymətlər alır.

Deməli, funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu istənilən ədədi çoxluqlar ola bilər.

Tərif 1. Funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu natural ədədlər çoxluğunun hər hansı altçoxluğu olarsa, belə funksiyaya hesabi funksiya deyilir.

Məsələn, $\varphi(n)$- Eyler funksiyası bir sərbəst dəyişəndən asılı, ƏBOB(x,y) funksiyası iki sərbəst dəyişəndən asılı hesabi funksiyadır və s.

Tərif 2. Natural ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş hər bir münasibətə hesabi münasibət deyilir.

Məsələn, natural ədədlər çoxluğunda verilmiş x/y və $x\geq y$ münasibətləri hesabi münasibətlərdir.

Qeyd edək ki, hesabi funksiya və hesabi münasibət anlayışları intuitiv anlayışlardır və heç bir formal sistemlə əlaqədar deyildir.

Tutaq ki, S natural ədədlər nəzəriyyəsi $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ isə hesabi münasibətdir.

Tərif 3. Əgər S nəzəriyyəsinin n sayda $x_1, x_2, ..., x_n$ sərbəst predmet dəyişənlərindən asılı elə $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)$ düsturu varsa ki, ixtiyari $k_1, k_2, ..., k_n$ natural ədədləri və $\overline{k}_1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_n$ termləri üçün aşağıdakı iki şərt ödənilsin, onda deyirlər ki, $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ munasibəti ifadə ediləndir.

(a) $R(k_1, k_2, ..., k_n)$ doğrudursa, onda $\vdash_S \alpha(\overline{k}_1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_n)$

(b) $R(k_1, k_2, ..., k_n)$ yalandırsa, onda $\vdash_S \neg\alpha(\overline{k}_1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_n)$.

Misal üçün, natural ədədlər arasında bərabərlik münasibəti S nəzəriyyəsində $x_1 = x_2$ düsturu ilə ifadə edilir. Doğrudan da, istənilən k_1 və k_2 natural ədədləri üçün $k_1 = k_2$ olmasın-dan alırıq ki, $\overline{k}_1$ və $\overline{k}_2$ termləri üst-üstə düşür və ona görə də $\vdash_S \overline{k}_1 = \overline{k}_2$. Analoji olaraq əgər $k_1 = k_2$ yalandırsa, onda $k_1 \neq k_2$ və $\vdash_S \neg(\overline{k}_1 = \overline{k}_2)$ (VI fəsil, §48).

Eləcə də natural ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş «kiçikdir» münasibəti S nəzəriyyəsində $x_1 < x_2$ düsturu ilə ifadə ediləndir. Həqiqətən, əgər ixtiyari k_1 və k_2 natural ədədləri üçün $k_1 < k_2$ olarsa, onda sıfırdan fərqli elə n natural ədədi var ki, $k_2 = k_1 + n$ və ona görə də $\vdash_S \overline{k}_2 = \overline{k}_1 + \overline{n}$ (VI fəsil, §48) və $n \neq 0$ olduğundan $\vdash_S \overline{n} \neq \overline{0}$.

Deməli, S-də belə bir düstur doğrudur:

$$(\exists u)((\overline{k}_2 = \overline{k}_1 + \overline{u}) \wedge (\overline{u} \neq \overline{0})),$$

yəni $\vdash_S \overline{k_1} < \overline{k_2}$ (VI fəsil, misal 3); yox əgər $\rceil(k_1 < k_2)$ olarsa, onda ya $k_1 = k_2$ yaxud $k_2 < k_1$ olar. $k_1 = k_2$ olarsa, onda yuxarıdakı misalda göstərdiyimiz kimi $\vdash_S \overline{k_1} = \overline{k_2}$ olar.

$k_2 < k_1$ olarsa, onda $k_1 < k_2$ halında olduğu kimi mühakimə aparmaqla isbat edə bilərik ki, $\vdash_S \overline{k_2} < \overline{k_1}$. Beləliklə də, hər iki halda $\vdash_S \overline{k_2} \le \overline{k_1}$ və deməli, $\vdash_S \rceil(\overline{k_1} < \overline{k_2})$.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, R_1 və R_2 münasibətləri S nəzəriyyəsində ifadə olunandırsa, $\rceil R_1, R_1 \wedge R_2$ və $R_1 \vee R_2$ münasibətləri də S nəzəriyyədə ifadə edilən olar.

Tərif 4. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası üçün S nəzəriyyəsinin x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} sərbəst dəyişənlərindən asılı elə $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ düsturu vardırsa ki, ixtiyari $k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}$ natural ədədləri üçün aşağıdakı iki şərt ödənilsin, onda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası S nəzəriyyəsində göstərilə bilən adlanır.

(a) $f(k_1, k_2, ..., k_n) = k_{n+1}$ olarsa, onda $\vdash_S \alpha(\overline{k_1}, \overline{k_2}, ..., \overline{k_n}, \overline{k_{n+1}})$

(b) $\vdash_S (\exists! x_{n+1}) \alpha(\overline{k_1}, \overline{k_2}, ..., \overline{k_n}, x_{n+1})$.

Burada $\exists!$— varlıq və yeganəlik kvantoru adlanır, yəni (b) bəndindəki teoremin şərtini ödəyən x_{n+1} ədədi yeganədir.

Tərif 4-də nəzərdə tutulan (b) bəndini

(b') $\vdash_S (\exists! x_{n+1}) \alpha(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ şərti ilə əvəz etsək, onda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası güclü göstərilə bilən funksiya adlanır.

Misal 1. İstənilən n sayda dəyişəndən asılı və eyniliklə sıfır olan funksiyanı sıfır funksiya adlandıraq və

$\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n)$ kimi işarə edək. Bu funksiyanın təyininə görə

$$\varphi_1(x_1)=0\,,\ \varphi_2(x_1,x_2)=0\,,\ldots,\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n)=0\,.$$

Göstərək ki, $\varphi_n(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası S nəzəriyyəsində güclü göstərilə biləndir və o,

$$(x_1=x_1)\wedge(x_2=x_2)\wedge\cdots\wedge(x_n=x_n)\wedge(x_{n+1}=0)$$

düsturu ilə göstərilir.

Doğrudan da əgər, $\varphi_n(k_1,k_2,...,k_n)=k_{n+1}$ olarsa, onda $k_{n+1}=0$ olar və

$$\vdash_S(\overline{k_1}=\overline{k_1})\wedge(\overline{k_2}=\overline{k_2})\wedge\cdots\wedge(\overline{k_n}=\overline{k_n})\wedge(0=0)\,,$$

yəni tərif 4-dəki (a) bəndi ödənilər.

Bundan əlavə,

$$\vdash_S(\exists!x_{n+1})((x_1=x_1)\wedge(x_2=x_2)\wedge\cdots\wedge(x_n=x_n)\wedge(x_{n+1}=0))$$

olar, başqa sözlə güclü göstərilən funksiyanın tərifindəki (b') bəndi də ödənilər.

Misal 2. İstənilən x natural ədədi üçün x-dən bilavasitə (dərhal) sonra gələn natural ədədi x' ilə işarə edək və $N(x)=x'=x+1$ funksiyasını bilavasitə sonra gələn funksiya adlandıraq. Tərifə görə $N(1)=2$, $N(2)=3$, $\ldots$, $N(9)=10$ və s.

Göstərək ki, $N(x)$ funksiyası S nəzəriyyəsində güclü göstərləndir.

Doğrudan da onu S nəzəriyyəsində $x_2=x_1'$ düsturu ilə vermək olar, çünki, istənilən k_1 natural ədədi üçün

$$N(k_1)=k_1'=k_1+1=k_2$$

olmasından alınır ki, $\overline{k_2}$ və $\overline{k_1'}$ termləri üst-üstə düşür. Ona görə də $\overline{k_2}=\overline{k_1'}$. Bundan əlavə x_1-dən bilavasitə sonra gələn x_2 ədədi yeganədir, yəni $(\exists!x_2)(x_1'=x_2)$.

Misal 3. Arqumentin istənilən qiymətləri yığımına onun asılı olduğu $x_i\,(1 \le i \le n)$ dəyişəninin aldığı k_i natural qiymətini qarşı qoyan funksiyanı $\psi_n^{\,i}$ ilə işarə edək və özünü də proyeksiyalama funksiyası adlandıraq. Tərifə görə

$$\psi_n^i(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = x_i\,,\ \psi_3^2(2,5,1) = 5\,,\ \psi_4^1(3,6,8,12) = 3$$

və s., ψ_0^0 təyin edilməyib, ψ_3^4-in mənası yoxdur.

$$\psi_n^i(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$$

funksiyasının güclü göstərilən olduğunu isbat edək.

Qeyd edək ki, bu funksiya S nənəzəriyyəsində

$$(x_1 = x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n) \wedge (x_{n+1} = x_i)$$

düsturu ilə göstərilə bilər. Həqiqətən, əgər

$$\psi_n^i(k_1, k_2, ..., k_n) = k_{n+1}$$

olarsa, onda $k_{n+1} = k_i$ və $\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_i$ olar. Deməli,

$$\vdash_S (\overline{k}_1 = \overline{k}_1) \wedge \cdots \wedge (\overline{k}_n = \overline{k}_n) \wedge (\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_i)$$

olar və tərif 4-dəki (a) şərti ödənilər. (b') şərtinin ödənilməsi isə $\vdash_S (\exists! x_{n+1})(x_1 = x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n) \wedge (x_{n+1} = x_i)$ teoremindən aydındır.

Misal 4. Tutaq ki, m dənə $y_1, y_2, ..., y_m$ dəyişənlərindən asılı $F(y_1, y_2, ..., y_m)$ hesabi funksiyası verilmişdir.

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)\,, f_2(x_1, x_2, ..., x_n)\,, \ldots, f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$$

funksiyaları da $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən asılı hesabi funksiyalar olsun.

$F(y_1, y_2, ... y_m)$ funksiyasının arqumentlərini $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərinin hər bir verilmiş natural qiymətləri yığımı üçün uyğun olaraq $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalarının aldıqları qiymətlərlə əvəz etmək nəticəsində alınan funksiyanı $\pi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ilə işarə edək.

Təyin etdiyimizə görə

$$\pi(x_1,x_2,...,x_n)=F(f_1,f_2,...,f_m).$$

Belə olduqda deyirlər ki, $\pi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası F və f_1, $f_2,...,f_m$ funksiyalarından əvəzetmə nəticəsində alınmışdır və yaxud π funksiyası F və $f_1,f_2,...,f_m$ funksiyalarının superpozisiyasıdır. Məsələn,əgər F funksiyası olaraq 3-cü misalda təyin etdiyimiz $\psi_3^2(y_1,y_2,y_3)$ funksiyasını, f_1,f_2,f_3 funksiyası olaraq 2-ci misalda təyin etdiyimiz $N(x),N(y),N(z)$ funksiyalarını seçsək, onda $\pi(x,y,z)$ funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilər.

$$\pi(x,y,z)=\psi_3^2(x',y',z')=y'=y+1.$$

İndi fərz edək ki, F və $f_1,f_2,...,f_m$ funksiyalarının hər biri S nəzəriyyəsində güclü göstərilə bilәndir.

$$\beta(y_1,y_2,...,y_m,y_{m+1}),\alpha_1(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}),\dots,\alpha_m(x_1,x_2,...,x_{n+1})$$

isə uyğun olaraq onların göstərilişləri olsun.

Göstərək ki, $\pi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası da S nəzəriyyəsində güclü göstərilə bilәndir və onu, məsələn,

$$(\exists y_1)\cdots(\exists y_m)(\alpha_1(x_1,...,x_n,y_1)\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge\alpha_m(x_1,...,x_n,y_m)\wedge\beta(y_1,...,y_m,x_{n+1}))\quad(66.1)$$

düsturu ilə ifadə etmək olar.

(66.1) göstərilişini $\alpha(x_1,...,x_n,x_{n+1})$ düsturu ilə işrə edək. Tutaq ki, $\pi(k_1,...,k_n)=k_{n+1}$, $f_i(k_1,...,k_n)=r_i\,(1\le i\le m)$-dir. Onda $F(r_1,...,r_m)=k_{n+1}$ olar. F və $f_1,f_2,...,f_m$ funksiyalarının güclü göstərilə bilən olması fərziyyəsinə görə $1\le i\le m$ olduqda $\vdash_S\alpha_i(\overline{k}_1,...,\overline{k}_m,r_i)$ və $\vdash_S\beta(\overline{r}_1,...,\overline{r}_m,\overline{k}_{n+1})$ olmalıdır. Ona görə də

$$\vdash_S\bigwedge_{i=1}^{m}\alpha_i(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,r_i)\wedge\beta(\overline{r}_1,...,\overline{r}_m,\overline{k}_{n+1})$$

olar.

Bu isə o deməkdir ki, $\vdash \alpha(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+1})$ və güclü göstərilişin (a) şərti ödənilir. Tərifin (b') bəndini isbat etmək üçün iki cür göstərilişin varlığını qəbul edək:

$$(\exists y_1)\cdots(\exists y_m)(\bigwedge_{i=1}^{m}\alpha_i(x_1,...,x_n,y_i)\wedge\beta(y_1,...,y_m,u)), \quad (66.2)$$

$$(\exists y_1)\cdots(\exists y_m)(\bigwedge_{i=1}^{m}\alpha_i(x_1,...,x_n,y_i)\wedge\beta(y_1,...,y_m,v)). \quad (66.3)$$

Sonra isə birinci tərtib nəzəriyyənin belə bir qaydasından istifadə edək.

$(\exists x)\alpha(x)$ düsturu verilmişdirsə və b, c isə $\alpha(x)$ düsturunun interpretasiya oblastına daxil olan hər hansı elementlərdirsə, onda $\alpha(b)$ və $\alpha(c)$ doğrudur.

Bu qaydanı m dəfə ardıcıl olaraq (66.2) və (66.3) düsturlarına tətbiq etsək, alarıq:

$$\alpha_1(x_1,...,x_n,b_1)\wedge\cdots\wedge\alpha_m(x_1,...,x_n,b_m)\wedge\beta(y_1,...,y_m,u),$$

$$\alpha_1(x_1,...,x_n,c_1)\wedge\cdots\wedge\alpha_m(x_1,...,x_n,c_m)\wedge\beta(y_1,...,y_m,v).$$

Lakin $\vdash_S(\exists! x_{n+1})\alpha_i(x_1,...,x_n,x_{n+1})$ teoremindən, habelə $\alpha_i(x_1,...,x_n,b_i)$ və $\alpha_i(x_1,...,x_n,c_i)$-dən alırıq ki $b_i=c_i\,(i=\overline{1,m})$. Digər tərəfdən $\beta(b_1,...,b_m,u)$ və $b_i=c_i\,(i=\overline{1,m})$ olmasından alırıq ki, $\beta(c_1,...,c_m,u)$.

Ona görə də

$$\vdash_S(\exists! x_{m+1})\beta(x_1,...,x_m,x_{m+1})$$

və $\beta(c_1,...,c_m,v)$-dən alırıq ki, $u=v$.

Beləliklə də,

$$\vdash_S\alpha(x_1,...,x_n,u)\wedge\alpha(x_1,...,x_n,v)\Rightarrow(u=v).$$

Nəticədə məlum olur ki,

$$\vdash_S(\exists! x_{n+1})\alpha(x_1,...,x_n,x_{n+1}),$$

yəni güclü göstərilişin tərifindəki (b') bəndinin doğruluğunu isbat etmiş oluruq. Bu paraqrafın sonunda $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ hesabi münasibətinin xarakteristik funksiyası anlayışını daxil edək.

Tərif 5. $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibətinin $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ xarakteristik funksiyası aşağıdakı şəkildə təyin edilmiş funksiyaya deyilir:

$$g_R(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0, \ R(x_1, ..., x_n) \text{ doğrudursa,} \\ 1, \ R(x_1, ..., x_n) \text{ yalandırsa.} \end{cases}$$

Verilmiş hər bir hesabi $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibəti ilə onun xarakteristik funksiyası arasında əlaqəni ifadə edən aşağıdakı təklifi isbat edək.

Təklif. $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibəti S nəzəriyyəsində ifadə ediləndirsə, onda onun $g_R(x_1, ..., x_n)$ xarakteristik funksiyası həmin nəzəriyyədə güclü göstəriləndir və $g_R(x_1, ..., x_n)$ S-də göstəriləndirsə, onda, $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibəti ifadə ediləndir.

İsbatı. Əgər $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibəti S nəzəriyyəsində $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)$ düsturu ilə ifadə ediləndirsə, onda $g_R(x_1, ..., x_n)$ funksiyasını S-də

$$(\alpha(x_1, ..., x_n) \wedge (x_{n+1} = 0)) \vee (\alpha(x_1, ..., x_n) \wedge (x_{n+1} = 1))$$

düsturunun köməyilə güclü şəkildə göstərmək olar.

Tərsinə, əgər $g_R(x_1, ..., x_n)$ funksiyası S nəzəriyyəsində $\beta(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ düsturu ilə göstərilən olarsa,onda $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ münasibətini həmin nəzəriyyədə $\beta(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ düsturunun köməyilə ifadə etmək olar.

§67. Rekursiv hesablanan funksiyalar sinfinin qurulması

Natural ədədlər nəzəriyyəsində funksiyanın düsturlarla göstərilənliyi məsələsi bizi riyazi məntiqdə və alqoritmlər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan geniş bir funksiyalar sinfinin öyrənilməsinə gətirir.

Hesabi funksiyaların bütöv bir sahəsini əhatə edən və rekursiv hesablanan funksiyalar adlanan bu sinfi konstruktiv olaraq aşağıdakı qayda ilə quracağıq. Əvvəlcə yuxarıdakı paraqrafda öyrəndiyimiz $\varphi_n, \psi_n^i, N(x)$ kimi 3 dənə ən sadə - «eyniliklə sıfır», «proyeksiyalama» və «bilavasitə sonra gələn» funksiyaları ayıraq. Bunları bazis funksiyalar adlandıraq. Sonra isə rekursiv funksiyalar nəzəriyyəsində operatorlar adlandırılan elə üç priyom (qayda) göstərək ki, onların köməyilə yeni hesabi funksiyalar almaq mümkün olsun. Bu qaydalar aşağıdakılardır.

1. *Əvəzləmə (superpozisiya) operatoru.* Bu operatorun qurulması üsulunu biz §66-da göstərmişik.

$f(y_1,...,y_m)$ və $f_i(x_1,...,x_n)$ funksiyaları verildikdə onlardan $y_i = f_i \ (1 \le i \le m)$ əvəzləməsi nəticəsində alınan

$$F(x_1,...,x_n) = f[f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)]$$

funksiyasının qurulması.

2. *Rekursiya operatoru.* Bu operatorun işi biri $n-1$ sayda $x_1, x_2 ..., x_{n-1}$ dəyişəndən asılı f_1, digəri isə göstərilən dəyişənlərdən başqa daha iki dəyişəni özündə saxlayan (yəni $n+1$ dəyişəndən asılı) f_2 kimi iki funksiyaya görə n dəyişənli yeni funksiyanın qurulması prosesindən ibarətdir. Əlavə iştirak edən iki arqumentdən biri f_1 funksiyasının arqumentləri ilə birlikdə yeni funksiyaya dəyişən kimi daxil olur, digəri isə rekursiya operatorunun yerinə yetirilməsində köməkçi rol oynayır. Bunları uyğun olaraq x və y-lə işarə edək. x-i baş arqument, y-i isə köməkçi arqument adlandırmağı şərtləşək. Rekursiya operatorunu R-lə işarə edək. Verilmiş f_1 və f_2 funksiyalarından R operatorunun köməyilə alınan funksiya f olsun. f_1 və f_2 funksiyalarından R operatorunun tətbiqi nəticəsində f funksiyasının alınması prosesini $f = R[f_1, f_2, x, (y)]$ şəklində göstərək (qarışıqlıq yaranmaması üçün köməkçi əlavə dəyişən mötərizə daxilində yazılmışdır).

Bir çox hallarda rekursiya operatorunu qurarkən $f_1(x_1, x_2..., x_{n-1})$ funksiyasının asılı olduğu $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ arqumentlərini həm onun özünü, həm də qalan iki f_2 və f funksiyalarını yazarkən göstərməmək və yalnız onları nəzərdə saxlamaq daha əlverişli olur.

Belə halda rekursiya operatorunu f_1 və f_2 funksiyalarının iştirak etdiyi və aşağıdakı iki şərtlə müəyyən olunan funksiya şəklində təyin etmək olar:

$$f(0) = f_1\,,\ f(x+1) = f_2(x, f(x)).$$

Başqa sözlə, təyin edəcəyimiz f funksiyasını baş arqumentin sıfır qiymətində verilmiş f_1 funksiyasının qiymətinə bərabər, baş arqumentin hər sonrakı qiyməti üçün isə verilmiş f_2 funksiyasının baş arqumentin ondan əvvəlki qiyməti və köməkçi arqumenti təyin edəcəyimiz f funksiyasının əvvəlki qiymətinə bərabər götürəcəyik.

Fikrimizi aşağıdakı sadə misal üzərində izah edək. f_1 funksiyası olaraq φ_0, f_2 funksiyası olaraq $\psi_2^1(x, y)$ funksiyasını götürək və rekursiya operatorunun köməyilə

$$f(x) = R[\varphi_0, \psi_2^1(x, y), x, (y)]$$

funksiyasını quraq. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi f funksiyası aşağıdakı iki şərtlə təyin ediləcəkdir:

$$f(0) = \varphi_0 = 0\,;\ f(x+1) = \psi_2^1(x, f(x)) = x\,.$$

Beləliklə, qurduğumuz f funksiyası üçün

$$f(0)=0,\ f(1)=\psi_2^1(0,f(0))=0,$$

$$f(2)=\psi_2^1(1,f(1))=1,\ldots,f(n+1)=\psi_2^1(n,f(n))=n$$

qiymətlərini alarıq. Yəni f funksiyası hər bir natural ədədə özündən əvvəlki natural ədədi qarşı qoyur. Bu funksiyanı bilavasitə əvvəl gələn (qabaqlayan) funksiya adlandırırlar. Qurduğumuz funksiya yalnız mənfi olmayan qiymətlər ala biləcəyindən $f(0)=-1$ deyil, $f(0)=0$ qəbul edilir.

3. *Minimumlaşdırma operatoru.* Bu operator $n+1$ sayda arqumentdən asılı verilmiş f_1 funksiyasına görə n sayda arqumentdən asılı yeni f funksiyasını qurur. Yox edilən arqument köməkçi hesab olunur və ondan operatorun yerinə yetirilməsi (tətbiqi) üçün istifadə olunur. Bu operatoru μ hərfi və onun tətbiqini $f=\mu[f_1;(x)]$ kimi işarə edək. Burada x yox edilən arqumentdir.

μ operatorunun iş prinsipi aşağıdakı kimidir.

Köməkçi arqumentə sıfırdan başlayaraq o vaxta qədər ardıcıl qiymətlər vermək lazımdır ki, f_1 funksiyası sıfra bərabər qiymət alsın. f_1 funksiyası birinci dəfə sıfır qiyməti alan kimi prosesi dayandırmalı əsas arqumentlərin aldıqları qiymətlər yığımı üçün təyin edəcəyimiz f funksiyasının qiyməti olaraq köməkçi arqumentin f_1 funksiyasını sıfra çevirən həmin qiymətini götürməli. Başqa sözlə, fərz edək ki, x dəyişəninin heç olmasa bir mənfi olmayan tam qiyməti və $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərinin hər hansı qiymətləri yığımı üçün $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)=0$ olur. x-in belə qiymətlərindən ən kiçiyini

$$\mu x(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)=0)$$

kimi işarə edək. Bu halda

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_1((x_1,\ldots,x_n,x)=0)$$

qəbul edək. Belə olduqda deyəcəyik ki, f funksiyası f_1 funksiyasından μ operatoru vasitəsilə köməkçi arqumentin f_1 funksiyasını sıfra çevirən ən kiçik qiymətinə görə qurulmuşdur. Bu səbəbdən də həmin operatora birinci sıfra görə qurulan operator və ya ən kiçik ədəd operatoru da deyilir.

Qeyd edək ki, bazis funksiyalar və habelə əvəzləmə və rekursiya operatorlarının köməyilə alınan funksiyalar arqumentlərin bütün mənfi olmayan tam qiymətlərində təyin edildiyi halda, birinci sifra görə qurulan operatorun köməyilə alınan funksiyalar arqumentlərin bəzi və hətta sonsuz sayda qiymətləri üçün təyin edilməyə bilər. Misal üçün, f_1 funksiyası olaraq $\psi_2^1(x,y)$ bazis funksiyasını götürək və μ operatorunun $\psi_2^1(x,y)$ funksiyasına tətbiqi nəticəsində alınan funksiyanı $\rho(x)$-lə işarə edək. $\rho(x)=\mu[\psi_2^1(x,y);(y)]$. Alınan $\rho(x)$ funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir.

$\rho(0)=0$ və $\rho(n)$ isə $n\neq 0$ olduqda təyin edilməmişdir. Bunu, məsələn, $n=2$ qiyməti üçün yoxlayaq.

$$\rho(2)=\psi_2^1(2,0)=2,$$
$$\rho(2)=\psi_2^1(2,1)=2,\ \rho(2)=\psi_2^1(2,2)=2 \text{ və s.}$$

Deməli, $\psi_2^1(x,y)$ funksiyası $x=2$ olduqda y-in heç bir qiymətində sıfra çevrilmir və ona görə də birinci sıfra görə qurulan operatorun köməyilə $\rho(x)$ funksiyasının qiymətini $x=2$ olduqda heç cür hesablamaq mümkün deyildir.

§68. İbtidai (primitiv) rekursiv və qismən rekursiv funksiyalar

İndi də ibtidai rekursiv və qismən rekursiv funksiya anlayışını verək.

Tərif 1. Bazis funksiyalar və onlardan əvəzləmə və rekursiya operatorlarının sonlu sayda ardıcıl tətbiqi nəticəsində alınan hər bir f funksiyasına ibtidai rekursiv funksiya deyilir.

Tərifdən aydındır ki, əgər f ibtidai rekursiv funksiyadırsa, onda funksiyaların $f_1, f_2, ..., f_n$ kimi elə sonlu ardıcıllığı var ki, $f_n = f$ -dir və $f_i \ (1 \le i \le n)$ funksiyalarından hər biri ya bazis funksiyadır, yaxud da özündən əvvəlki funksiyaların hər hansı birindən əvəzləmə və ya rekursiya operatoru vasitəsilə alınmışdır.

Tərif 2. Əgər f bazis funksiyadırsa və ya bazis funksiyalardan əvəzləmə, rekursiya və minimumlaşdırma operatorların sonlu sayda ardıcıl tətbiqi nəticəsində alınmışdırsa, onda ona rekursiv funksiya deyilir.

Göründüyü kimi hər bir primitiv rekursiv funksiya həm də rekursivdir, lakin bunun tərsi doğru deyildir.

Tərif 3. İbtidai rekursiv funksiyalar və bir də μ operatorunun tətbiqi ilə alınan, lakin arqumentin istənilən qiymətində təyin olunan rekursiv funksiyalara ümumrekursiv funksiyalar deyilir.

Tərif. 4. Arqumentlərin bəzi mümkün qiymətlərində təyin olunmayan rekursiv funksiyalara qismən rekursiv funksiyalar deyilir.

Məsələn, yuxarıda qurduğumuz $\rho(x)$ funksiyası qismən rekursivdir.

Tərif 2, 3 və 4-dən görünür ki, rekursiv funksiyalar sinfi ümumrekursiv və qismən rekursiv funksiyalar sinfinin birləşməsi ilə üst-üstə düşür.

Rekursiv funksiyalar sinfi quruldunqdan sonra təbii olaraq belə bir sual qoymaq olar.

Hələ orta məktəb kursundan bizə məlum olan funksiyalar içərisində rekursiv olanlar varmı?

Bəli, tanıdığımız elementar funksiyalardan rekursiv olanlar vardır və özü də beləlləri az deyildir. Məsələn, $y = x + 1$ funksiyası natural ədədlər çoxluğunda $N(x)$ bazis funksiyası ilə üst-üstə düşür.

Bundan başqa asanlıqla göstərmək olar ki,

$$f(x, y) = x + y, \; g(x, y) = x \cdot y,$$

$$h(x, y) = \min(x, y), \; M(x, y) = \max(x, y),$$

$$\delta(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \text{ olarsa,} \\ 0, & x = 0 \text{ olarsa;} \end{cases} \qquad x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \text{ olarsa,} \\ 0, & x < y \text{ olarsa;} \end{cases}$$

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y \text{ olarsa,} \\ y - x, & x < y \text{ olarsa;} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ olarsa,} \\ 1, & x \neq 0 \text{ olarsa} \end{cases}$$

funksiyaları ibtidai rekursiv funksiyalardır.

Bunlardan, məsələn, $f(x, y) = x + y$ funksiyasının ibtidai rekursiv olduğunu göstərək.

Yuxarıda qeyd etdik ki, $N(z) = z + 1$ funksiyası ibtidai rekursivdir. Əgər $\psi_3^3(x, y, z)$ bazis funksiyasında z-i $z + 1$-lə əvəz etsək, üçdəyişənli

$$F(x, y, z) = \psi_3^3(x, y, N(z)) = N(z) = z + 1$$

ibtida rekursiv funksiyasını alarıq. İndi, $F(x, y, z)$ və $\psi_1^1(x)$ funksiyalarına rekursiya operatorunu tətbiq etsək, onda tərifə görə

$$f(x, y) = R[\psi_1^1(x), F(x, y, z), y, (z)]$$

funksiyası da ibtidai rekursiv olar.

Qurduğumuz $f(x, y)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$f(x,0) = \psi_1^1(x) = x$$

$$f(x,1) = f(x,0) + 1 = x + 1$$

$$f(x,2) = f(x,1) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$$

……………………………………………….

$$f(x, y) = x + y.$$

§69. Rekursiv funksiyaların xassələri

İbtidai rekursiv və rekursiv funksiyalar sinfini tam xarakterizə etmək üçün bu sinfi təmsil edən funksiyaların aşağıdakı mühüm xassələrini qeyd edək. Bu xassələri biz ibtidai rekursiv funksiyalar üçün isbat edəcəyik. Rekursiv funksiyalar üçün isə xassələrin isbatı analojidir.

Xassə 1. İbtidai rekursiv funksiyaya saxta dəyişən daxil etdikdə yenə də ibtidai rekursiv funksiya alınır.

Xassə 2. İbtidai rekursiv funksiyada arqumentləri bir-birilə əvəz etsək, yenə də ibtidai rekursiv funksiya alınır.

Xassə 3. İbtidai rekursiv funksiyada iki və ya bir necə dəyişəni bir-birinə bərabər götürsək, alınan funksiya yenə də ibtidai rekursiv olar.

Bu xassələrin isbatı aşağıdakı təklifə əsaslanır.

Təklif. Tutaq ki, $g(y_1,...,y_k)$ ibtidai rekursiv (yaxud rekursiv) funksiya, $x_1,...,x_n$ isə müxtəlif dəyişənlərdir. Əgər i-nin hər bir $1 \le i \le n$ qiymətində z_i dəyişəni $x_1,...,x_n$ dəyişənlərindən hər hansı biri olarsa, onda $f(x_1,...,x_n) = g(z_1,...,z_k)$ funksiyası da primitiv rekursiv (yaxud rekursiv) funksiyadır.

İsbatı. Fərz edək ki, $z_i = x_{m_i}$ və $1 \le m_i \le n$. Onda $z_i = \psi_n^{m_i}(x_1,...,x_n)$ qəbul etsək,

$$f(x_1,...,x_n) = g(\psi_n^{m_1}(x_1,...,x_n),...,\psi_n^{m_k}(x_1,...,x_n))$$

olar. Beləliklə, f funksiyası g və $\psi_n^{m_1},...,\psi_n^{m_k}$ funksiyalarından əvəzləmə operatoru vasitəsilə alındığından ibtidai rekursiv (eyni zamanda rekursiv) funksiya olacaqdır.

İndi isə yuxarıdakı xassələrin isbatına keçə bilərik.

Xassə 1-in isbatı. Tutaq ki, $g(x_1,x_3)$ ibtidai rekursiv funksiyadır və $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_3)$. Yəni x_2 dəyişəni rekursiv g funksyasına saxta daxildir. Yuxarıda isbat etdiyimiz təklifdə $n=3$, $k=2$, $z_1=x_2$, $z_2=x_3$ qəbul etsək, onda

$$f(x_1,x_2,x_3)=g(\psi_3^1(x_1,x_2,x_3),\psi_3^3(x_1,x_2,x_3))$$

ibtidai rekursiv funksiyasını alarıq.

Xassə 2-nin isbatı. Tutaq ki, $g(x_2,x_1)$ ibtidai rekursiv funksiya, $f(x_1,x_2)$ isə həmin funksiyadan x_1-i x_2 ilə və x_2-i x_1-lə əvəz etmək nəticəsində alınmışdır. Göstərək ki, $f(x_1,x_2)=g(x_2,x_1)$ funksiyası da ibtidai rekursivdir. Buna inanmaq üçün $z_1=x_2$, $z_2=x_1$ qəbul edib, $n=k=2$ olan halda yuxarıdakı təklifi tətbiq etmək lazımdır:

$$f(x_1,x_2)=g(\psi_2^2(x_1,x_2),\psi_2^1(x_1,x_2)).$$

Xassə 3-ün isbatı. Burada fərz edək ki, $g(x_1,x_2,x_3)$ ibtidai rekursiv funksiyadır, $f(x_1,x_2)$ isə g funksiyasında $x_1=x_3$ götürməklə alınmışdır.

$f(x_1,x_2)$ funksiyasının ibtidai rekursiv olduğu yuxarıdakı təklifdə $n=2, k=3, z_1=x_1, z_2=x_2, z_3=x_1$ götürməklə asanlıqla alına bilər.

Tərif 5.

$$\sum_{y<z} f(x_1,...,x_n,y)=$$

$$=\begin{cases} 0, \text{ əgər } z=0 \text{ olarsa,} \\ f(x_1,...,x_n,0)+\cdots+f(x_1,...,x_n,z-1), \text{əgər } z>0 \text{ olarsa} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\sum_{y\le z} f(x_1,...,x_n,y)=\sum_{y<z+1} f(x_1,...,x_n,y)$$

kimi təyin olunan cəmə məhdud cəm,

$$\prod_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{əgər } z=0 \text{ olarsa,} \\ f(x_1,\dots,x_n,0)+\cdots+f(x_1,\dots,x_n,z-1), \text{əgər } z>0 \text{ olarsa} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\prod_{y\le z} f(x_1,\dots,x_n,y) = \prod_{y<z+1} f(x_1,\dots,x_n,y)$$

şəklində təyin olunan hasilə isə məhdud hasil deyilir. Göründüyü kimi məhdud hasil və məhdud cəm $x_1,\dots,x_n,z$ dəyişənlərindən asılı funksiyadır.

Xassə 4. Əgər f ibtidai rekursiv (rekursiv) funksiyadırsa, onda (I) şəklində təyin olunan məhdud cəm də ibtidai rekursiv (rekursiv) funksiyadır.

İsbatı. Tutaq ki,

$$g(x_1,\dots,x_n,z) = \sum_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y).$$

Bu halda aşağıdakı şəkildə rekursiyaya baxaq.

$g(x_1,\dots,x_n,0)=0$, əgər $z=0$ olarsa;

$g(x_1,\dots,x_n,z+1)=g(x_1,\dots,x_n,z)+f(x_1,\dots,x_n,z)$, əgər $z>0$ olarsa;

$h(x_1,\dots,x_n,z)=\sum_{y\le z} f(x_1,\dots,x_n,y)$ olduqda isə

$$h(x_1,\dots,x_n,z)=g(x_1,\dots,x_n,z+1)$$

əvəzləməsini aparaq.

Deməli, hər iki halda g funksiyası rekursiya və əvəzləmə operatorlarının köməyilə ibtidai rekursiv (rekursiv) f funksiyasından alınmışdır və ona görə o, ibtidai rekursiv (rekursiv) funksiyadır.

Xassə 5. Əgər f ibtidai rekursiv (rekursiv) funksiyadırsa, onda (II) şəklində təyin edilmiş məhdud hasil ibtidai rekursiv (rekursiv) funksiyadır.

Bu xassənin isbatı xassə 4-ün isbatına analojidir və onu sərbəst iş kimi oxucuların öhdəsinə buraxırıq.

§70. Rekursiv predikatlar

İndi də rekursiv predikat anlayışını verək.

Tərif. $R(x_1,...,x_n)$ münasibətinin $g_R(x_1,...,x_n)$ xarakteristik funksiyası primitiv rekursiv funksiya olarsa, onda $R(x_1,...,x_n)$ predikatına primitiv rekursiv predikat deyilir.

Əgər bu tərifdə hər yerdə «ibtidai rekursiv» sözünü «ümumrekursiv» və ya «qismən rekursiv» sözləri ilə əvəz etsək, onda uyğun olaraq ümumrekursiv predikat, yaxud qismən rekursiv predikatın tərifini alarıq.

Misal 1. $R(x_1,x_2) \equiv x_1 = x_2$ münasibəti primitiv rekursiv münasibətdir. Doğrudan da $R(x_1,x_2)$ predikatının xarakteristik funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$g_R(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 \text{ olarsa,} \\ 1, & x_1 \neq x_2 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

Bu funksiya isə bizə məlum olan $Sg(|x_1 - x_2|)$ primitiv rekursiv funksiyası ilə üst-üstə düşür.

Misal 2. $R(x_1,x_2) \equiv x_1 < x_2$ münasibəti primitiv rekursivdir, çünki, onun xarakteristik funksiyası olan funksiyası primitiv rekursivdir.

Aydındır ki, primitiv rekursiv predikatlar üzərində bildiyimiz məntiq əməllərini apardıqdan sonra alınan predikatlar da primitiv rekursiv olar.

Doğrudan da tutaq ki, $R_1(x_1,...,x_n)$ və $R_2(x_1,...,x_n)$ primitiv rekursiv predikatlardır. Bu o deməkdir ki, onların g_{R_1} və g_{R_2} xarakteristik funksiyaları primitiv rekursivdir. Məlumdur ki, əgər $R(x_1,...,x_n)$ predikatının xarakteristik funksiyası $g_R(x_1,...,x_n)$ olarsa,onda $\rceil R(x_1,...,x_n)$ predikatının xarakteristik funksiyası

$$g_{\neg R}(x_1,...,x_n)=1-g_R(x_1,...,x_n)$$

kimi təyin edilər. Bundan başqa

$$g_{R_1\vee R_2}=g_{R_1}(x_1,...,x_n)\cdot g_{R_2}(x_1,...,x_n)$$

olduğuna görə və g_{R_1}, g_{R_2} funksiyaları primitiv rekursiv olduqda $g_{R_1}\cdot g_{R_2}$ funksiyası da primitiv rekursiv olduğundan, $g_{R_1\vee R_2}$ funksiyası primitiv rekursiv olar. Buradan da alırıq ki, $R_1\vee R_2$ predikatı primitiv rekursiv predikatdır. $\wedge$ və $\Rightarrow$ əməllərini $\neg$ və $\vee$ əməlləri vasitəsilə ifadə etmək mümkün olduğundan yuxarıdakı faktın isbatını bitmiş hesab etmək olar.

Bir də onu qeyd etmək lazımdır ki, burada primitiv rekursiv sözünü onun iştirak etdiyi hər yerdə rekursiv sözü ilə əvəz edərək göstərə bilərik ki, rekursiv predikatlar üzərində bildiyimiz məntiq əməllərini aparsaq, yenə də rekursiv predikatlar alarıq.

§71. Erbran - Hödelə görə hesablanan funksiyalar

İndi isə hesablanan funksiyaların başqa bir sinfini - Erbran - Hödelə görə hesablanan funksiyaları öyrənək.

Erbran - Hödelə görə hesablanan funksiyalar nəzəriyyəsinin aşağıdakı şəkildə qurulması Klini tərəfindən təklif edilmişdir. Hər şeydən əvvəl natural ədədlər nəzəriyyəsindən bildiyimiz term anlayışını yada salaq.

(a) Bütün dəyişənlər termlərdir.

(b) 0 termdir.

(c) t termdirsə, onda t' də termdir.

(d) $t_1,...,t_n$ termdirsə, f^n isə funksional hərfdirsə, onda $f^n(t_1,...,t_n)$ də termdir.

Hər bir n natural ədədinə $\overline{n}$ rəqəmini aşağıdakı qayda ilə qarşı qoyaq.

(1) $\overline{0}$ elə sıfır ədədidir,

(2) $\overline{n+1} = \overline{n} + \overline{1}$, $\overline{n+1} = (\overline{n})'$.

Beləliklə rəqəmlər də termlərdir.

r və s termlər olduqda $r = s$ şəklində hər bir düsturu bərabəlik adlandıracağıq.

$E : r_1 = s_1, r_2 = s_2, ..., r_k = s_k$ şəklində hər bir sonlu E ardıcıllığına bərabərliklər sistemi deyəcəyik. Burada r_k və s_k $f_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ və $g_k^m(t_1, t_2, ..., t_n)$ şəklində termlərdir. Bu cur təyin edilmiş f_k^n və g_k^m funksional hərflərə E sisteminin baş funksional hərfləri deyəcəyik. O funksional hərflər ki, E bərabərlikləri sisteminin sağ tərəfində iştirak edirlər, on-ları biz ilkin funksional hərflər adlandıracağıq. E sisteminin həm sağ və həm də sol tərəfində iştirak edən baş funksional hərfdən fərqli hər bir funksional hərfə köməkçi funksional hərif deyirlər.

Burada iki çıxarılış qaydası fəaliyyət göstərir.

R₁* qaydası:** ℓ_2 bərabərliyi ***R₁ qaydasına görə onda və ancaq onda ℓ_1 bərabərliyinin nəticəsidir deyəcəyik ki, ℓ_2 bərabərliyi ℓ_1 bərabərliyindən orada olan hər hansı dəyişəni onun daxil olduğu hər yerdə müəyyən bir rəqəmlə əvəz etmək nəticəsində alınır.

R₂* qaydası:** ℓ_2 bərabərliyi ***R₂ qaydasına görə

$$f_n^m(\overline{n}_1, ..., \overline{n}_m) = \overline{p}$$

və $r = s$ bərabərliklərinin onda və ancaq onda nəticəsi olacaq ki, $r = s$ bərabərliyi heç bir dəyişəni özündə saxlamasın və ℓ_2 bərabərliyi $r = s$-dən $f_n^m(\overline{n}_1, ..., \overline{n}_m)$ terminin s-ə daxil olduğu bir və ya bir neçə yerdə onu $\overline{p}$ termi ilə əvəz etmək nəticəsində alınsın.

Tərif. Aşağıdakı üç şərtlərdən heç olmasa biri ödənildikdə deyəcəyik ki, ℓ bərabərliyi B bərabərlikləri çoxluğundan çıxarılmışdır:

(1) Elə $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k$ bərabərlikləri ardıcıllığı qurmaq mümkün olsun ki, $\ell_k = \ell$ və $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k$ bərabərliklərinin hər biri B çoxluğunun elementidir, yaxud

(2) ℓ_i bərabərliyi özündən əvvəlki ℓ_j $j < i$ bərabərliyindən R_1 çıxarılış qaydası ilə alınsın, yaxud

(3) ℓ_i bərabərliyi $\boldsymbol{R_2}$ qaydasına görə özündən əvvəlki hər hansı ℓ_k və ℓ_m $(k < i, m < i)$ bərabərliklərinin nəticəsi olsun. ℓ bərabərliyinin B çoxluğundan alınmasını $B \vdash \ell$ kimi işarə edib, həm də bu halda deyəcəyik ki, «ℓ B-dən çıxarılmışdır».

Misal. Tutaq ki, E bərabərliklər sistemi aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$E: \begin{cases} f_1^1(x_1) = (x_1)' \\ f_1^2(x_1, x_2) = f_1^3(\overline{2}, x_2, f_1^1(x_1)). \end{cases}$$

Burada baş funksional hərf f_1^2-dir. f_1^3, f_1^1 isə E-də uyğun olaraq ilkin və köməkçi funksional hərflərdir.

$$f_1^2(x_1, x_2) = f_1^3(\overline{2}, x_2, f_1^1(x_1)),$$

$$f_1^2(\overline{2}, x_2) = f_1^3(\overline{2}, x_2, f_1^1(\overline{2})),$$

$$f_1^2(\overline{2}, \overline{1}) = f_1^3(\overline{2}, \overline{1}, f_1^1(\overline{2})),$$

$$f_1^1(x_1) = x_1',$$

$$f_1^2(\overline{2}) = (\overline{2})' = \overline{3},$$

$$f_1^2(\overline{2}, \overline{1}) = f_1^3(\overline{2}, \overline{1}, \overline{3})$$

bərabərliklər ardıcıllığı isə E-dən $f_1^2(\overline{2},\overline{1})=f_1^3(\overline{2},\overline{1},\overline{3})$ bərabərliyinin çıxarılışıdır.

Tərif. Əgər E bərabərlikləri sisteminin baş funksional hərfi hər hansı bir n-yerli f_i^n hərfindən ibarətdirsə və isənilən $k_1,...,k_n$ və p natural ədədləri üçün $E\vdash$ $\vdash f_i^n(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)=\overline{p}$ çıxarılışı onda və ancaq onda doğru olarsa ki, $g(k_1,...,k_n)=p$ olsun, onda $g(k_1,...,k_n)$ qismən hesablanan funksiyasına E bərabərlikləri sisteminin köməyilə hesablanan funksiya deyilir.

Əgər elə E bərabərlikləri sistemi varsa ki, onun köməyilə g funksiyasını hesablamaq mümkün olsun, onda g funksiyasına Erbran - Hödelə görə hesablanan funksiya deyirlər.

Misal 1. Tutaq ki, E sistemi yalnız bircə dənə $f_1^1(x_1)=0$ bərabərliyindən ibarətdir. Bu halda E sisteminin köməyilə φ_1-sıfır funksiyasını hesablamaq olar. Beləliklə, φ_1-sıfır funksiya Erbran - Hödelə görə hesablanandır.

Misal 2. ψ_n^i proyeksiyalayıcı funksiyasını yeganə $f_n^i(x_1,x_2,...,x_n)=x_i$ bərabərliyi özündə saxlayan E sistemi vasitəsilə hesablamaq olar. Deməli, ψ_n^i proyeksiyalayıcı funksiyası Erbran - Hödelə görə hesablanandır.

Misal 3. Fərz edək ki, E sistemi bir $f_1^1(x_1)=x_1'$ bərabərliyindən ibarətdir. Beləliklə, $N(x_1)=x_1'$ funksiyası Erbran - Hödelə görə hesablanandır.

Misal 4. Tutaq ki, E sistemi

$$f_1^2(x_1,0)=x_1,$$

$$f_1^2(x_1,x_2')=(f(x_1,x_2))'$$

bərabərliklərindən ibarətdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, verilmiş E sistemi

$$f(x,y)=x+y$$

funksiyasını hesablayır. Deməli,

$$f(x,y)=x+y$$

funksiyası Erbran - Hödelə görə hesablanandır.

Teorem. Hər bir qismən rekursiv funksiya Erbran - Hödelə görə hesablanandır.

İsbatı. §67-də qeyd etdik ki, qismən rekursiv funksiyalar bazis funksiyalardan minimallaşdırma operatorunun tətbiqi nəticəsində alınır.

Ona görə də bazis funksiyaların və μ operatorunun onlara tətbiqindən alınan rekursiv funksiyaların Erbran - Hödelə görə hesablanan olduğunu göstərmək kifayətdir.

Bazis funksiyaların isə Erbran - Hödel mənada hesablanan olduğu yuxarıdakı 1 - 3 misallarından aydındır. Beləliklə, minimallaşdırma operatoru vasitəsilə alınan rekursiv funksiyasının Erbran - Hödel mənada hesablanan olduğunu göstərək.

Fərz edək ki, f funksiyası g funksiyasından μ operatoru vasitəsilə alınmışdır, yəni

$$f(x_1,...,x_n)=\mu y(g(x_1,...,x_n,y)=0).$$

Tutaq ki, g funksiyası baş funksional hərfi f_1^{n+1} olan E_1 bərabərliklər sisteminin köməyilə Erbran - Hödel mənada hesablanandır. Asanlıqla göstərmək olar ki, $f(x,y)=x\cdot y$ funksiyası Erbran - Hödelə görə hesablanandır (isbat edin). Ona görə də E_1 sisteminin funksional hərfləri ilə ortaq heç bir funksional hərfə malik olmayan və f_2^2 baş funksional hərfi özündə saxlayan elə E_2 bərabərlikləri sistemi var ki, $E_2 \vdash f_2^2(\overline{k}_1,\overline{k}_2)=\overline{p}$ çıxarılışı doğrudur.

E_1 və E_2 bərabərlikləri sisteminin birləşməsinə iki dənə

$$f_2^{n+1}(x_1,...,x_n,0)=1,$$

$$f_2^{n+1}(x_1,...,x_n,x'_{n+1})=f_2^2(f_2^{n+1}(x_1,...,x_n,x_{n+1}),f_1^{n+1}(x_1,...,x_n,x_{n+1}))$$

bərabərliklərini də qoşmaqla alınan sistemi E_3-lə işarə edək. Göstərmək çətin deyildir ki, $E_3 \vdash f_1^{n+1}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k})=\overline{p}$ onda və ancaq onda ki, $\prod\limits_{y<k} g(k_1,...,k_n,y)=p$ olsun, yəni $\prod\limits_{x<z} g(x_1,...,x_n,y)$ funksiyası E_3 sistemi vasitəsilə hesablanandır (bax, §67).

İndi tutaq ki, E sistemi E_3 sisteminə

$$f_2^3(x'_1,0,x_3)=x_3,$$

$$f_3^n(x_1,...,x_n)=f_2^3(f_2^{n+1}(x_1,...,x_n,x_{n+1}),f_2^{n+1}(x_1,...,x_n,x'_{n+1}),x_{n+1})$$

bərabərliklərini birləşdirmək nəticəsində alınan sistemdir. Bu halda

$$f(x_1,...,x_n)=\mu\, y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$$

funksiyası E sistemi vasitəsilə hesablanan olar. Doğrudan da əgər,

$$\mu\, y(g(x_1,...,x_n,y)=0)=q$$

olarsa, onda

$$E_3 \vdash f_2^{n+1}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{q})=\overline{p'},$$

$$p'=p+1=\prod_{y<q} g(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,y) \text{ və } E_3 \vdash f_2^{n+1}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{q'})=0.$$

Deməli, $E \vdash f_3^n(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)=f_2^3(\overline{p'},0,\overline{q})$.

Lakin, $E \vdash f_2^3(\overline{p_1},0,\overline{q})$ olduğundan, nəticə etibarilə alırıq ki, $E \vdash f_3^n(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)=\overline{q}$. Tərsinə, əgər $E \vdash f_3^n(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n)=\overline{q}$ olarsa, onda $E \vdash f_2^3(\overline{m'},0,\overline{q})$ çıxarılışı m-in hər hansı qiyməti üçün doğru olacaqdır. Aydındır ki, bu zaman

$E_3 \vdash f_2^{n+1}(k_1,...,k_n,q) = m'$ və $E_3 \vdash f_2^{n+1}(k_1,...,k_n,q') = 0$

olmalıdır.

Beləliklə alırıq ki,

$$\prod_{y<q} g(k_1,...,k_n,y) = m+1 \neq 0,$$

$$\prod_{y<q+1} g(k_1,...,k_n,y) = 0.$$

Başqa sözlə desək, $y<q$ və $g(k_1,...,k_n,q)=0$ olduqda $g(k_1,...$ $...,k_n,q) \neq 0$ olur. Ona görə də $\mu\, y(g(k_1,...,k_n,y)=0)=q$ şərti ödənir ki, bu da f funksiyasının Erbran - Hödel məna-da heablanan olduğunu göstərir. Teorem isbat olundu.

§72. Rekursiv sayıla bilən çoxluqlar

Ən mühüm riyazi anlayışlardan biri də rekursiv sayıla bilən çoxluq anlayışıdır.

Tərif. Natural ədədlərin hər hansı altçoxluğu ya boş çoxluq, ya da müəyyən bir rekursiv funksiyanın qiymətləri oblastı olarsa, ona rekursiv sayıla bilən çoxluq deyilir.

Başqa sözlə, rekursiv sayıla bilən çoxluq natural ədədlərin elə altçoxluğudur ki, o, hər hansı bir mexaniki proses vasitəsilə qurulur. Məsələn, $\{0,1\}$ çoxluğu rekursiv sayıla bilən çoxluqdur, çünki o, rekursiv $Sg(x)$ funksiyasının qiymətləri oblastı ilə üst-üstə düşür.Beləcə də $A=\{2n+3 \mid n\in N\}$ çoxluğu rekursiv sayıla biləndir, ona görə ki, o $f(x)=2x+3$ rekursiv funksiyasının qiymətləri oblastı ilə üst-üstə düşür.

Rekursiv sayıla bilən çoxluğun aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. A çoxluğu onda və ancaq onda rekursiv sayıla, bilən olar ki, $x\in A$ münasibəti $(\exists y)R(x,y)$ şəklində ifadə edilə bilsin (burada $R(x,y)$ hər hansı ikiyerli rekursiv predikatdır).

Xassə 2. A çoxluğu onda və ancaq onda rekursiv sayıla bilən olar ki, ya o, boş çoxluq olsun, yaxud da hər hansı bir qismən rekursiv funksiyanın qiymətləri ilə üst-üstə düşsün.

Xassə 3. A çoxluğu onda və ancaq onda rekursiv sayıla, bilən olar ki, hər hansı qismən rekursiv funksiyanın təyin oblastı ilə üst-üstə düşsün.

Xassə 4. A çoxluğu onda və ancaq onda rekursiv sayıla bilən olar ki, $\overline{A} = N \setminus A$ (N - natural ədədlər çoxluğudur) tamamlayıcısı rekursiv sayıla bilən olsun.

Bu xassələrdən məsələn, birincinin isbatını verək.

Tutaq ki, A rekursiv sayıla bilən çoxluqdur. Onda iki hal ola bilər.

a) A boş çoxluqdur;

b) A hər hansı bir rekursiv hesablanan funksiyanın qiymətləri oblastı ilə üst-üstə düşür.

Əgər A çoxluğu boşdursa, onda «$x \in A$ olması o deməkdir ki, elə y var ki, $x \neq x$ və $y \neq y$». Bu axırıncı mülahizəni predikatlar məntiqi dilinə köçürsək,

$$x \in A \equiv (\exists y)((x \neq x) \wedge (y \neq y))$$

şəklində olar. $(x \neq x) \wedge (y \neq y)$ münasibətini $R(x, y)$ predika-tı ilə işarə etsək, onda $x \in A \equiv (\exists y) R(x, y)$ olduğunu alarıq.

İndi fərz edək ki, A çoxluğu boş deyildir. Onda tərifə görə o, hər hansı bir f rekursiv funksiyanın qiymətləri oblastıdır. Bu halda, $x \in A$ olması o deməkdir ki, «elə mənfi olmayan y tam ədədi var ki, $\varphi(y) = x$-dir». Bu axırıncı mülahizəni predikatlar məntiqi dilinə köçürsək $x \in A \equiv (\exists y)(\varphi(y) = x)$ düsturunu alarıq. Yenə də $\varphi(y) = x \equiv R(x, y)$ qəbul etsək, $x \in A \equiv \ \equiv (\exists y) R(x, y)$ şəklində yaza bilərik.

Beləliklə, əgər A çoxluğu rekursiv hesablanan olarsa, onda $x \in A$ münasibətini $(\exists y)R(x,y)$ düsturu ilə ifadə etmək olar və həm də $R(x,y)$ predikatının rekursiv olduğu aydın görünür.

İndi tərsini isbat edək. $x \in A \equiv (\exists y)R(x,y)$ və $R(x,y)$ predikatının rekursiv olduğunu qəbul edək.

Əgər A çoxluğu boş olarsa, onda o, tərifə görə rekursiv sayıla bilən çoxluqdur. Əksinə, əgər A çoxluğu boş deyilsə və r onun hər hansı bir qeyd edilmiş elementidirsə, onda aşağıdakı kimi $g(t)$ funksiyasını təyin edək.

$$g(t) = \begin{cases} r, & R(t_0, t_1) \text{ olarsa,} \\ t_0, & \urcorner R(t_0, t_1) \text{ olarsa.} \end{cases}$$

$g(t)$ funksiyasının təyinindən görünür ki, o, rekursiv hesablanandır, A çoxluğu isə onun qiymətləri oblastı ilə üst-üstə düşür. Bununla da xassə isbat olunur.

IX FƏSLƏ AİD ÇALIŞMALAR

1. $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ kimi təyin olunan sıfır funksiyasının natural ədədlər nəzəriyyəsində göstərilə bilən olduğu-nu isbat edin. Bu funksiya güclü göstərilə biləndirmi?

2. $\varphi_n(x_1, x_2, .., x_n) \equiv 2$ funksiyasının n-in istənilən qiymətində S nəzəriyyəsində güclü göstərilə bilən olduğunu isbat edin.

3. İsbat edin ki, əgər $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiyası natural ədədlər nəzəriyyəsində göstərilə biləndirsə, onda

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = x_{n+1}$$

münasibəti də ifadə ediləndir.

4. U_n^k funksiyasını aşağıdakı şəkildə təyin edək:

$$U_n^0 = 0, U_n^1(x_1, ..., x_n) = 1, ..., U_n^k(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = k \ (k \le n).$$

Göstərin ki, $U_n^k(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = k$ funksiyası güclü göstəriləndir.

5. Göstərin ki, $f(x, y) = x \cdot y$ funksiyası güclü göstəriləndir.

6. İsbat edin ki, $f(x) = x^2$ funksiyası güclü göstərilə biləndir.

7. İsbat edin ki,

$$Sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ яэяр } x = 0, \\ 1, \text{ яэяр } x \ne 0 \end{cases}$$

funksiyası primitiv rekursivdir.

8. x-i aşmayan və onunla qarşılıqlı sadə olan bütün natural ədədlərin sayını $\pi(x)$-lə işarə edək. Göstərin ki, $\pi(x)$ funksiyası rekursivdir.

9. İsbat edin ki,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ яэяр } x \text{ ъцтядяддирся} \\ x + 1, \text{ яэяр } x \text{ тяк ядяддирся} \end{cases}$$

funksiyası primitiv rekursivdir.

10. $$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ яэяр } x \ge y \text{ ися} \\ 0 \quad , x < y \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Göstərin ki, $x \dot{-} y$ funksiyası primitiv rekursivdir.

11. Aşağıdakı funksiyaların primitiv rekursiv olduğunu isbat edin:

$a)\ f(x) = m$; $\quad b)\ f(x) = x + m$; $\quad c)\ f(x) = x!$

12. Göstərin ki, aşağıdakı funksiyaların hər birini superpozisiya və rekursiya operatorlarının köməyilə bazis funksiyalardan almaq olar:

$$a)\ x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0\ , x = 0 \text{ olarsa,} \\ x-1,\ x > 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

$b)\, q(x,y) = \left[\frac{x}{y}\right]$, (burada $\left[\frac{x}{y}\right]$ x-in y-ə bölünməsindən alınan natamam qismətdir).

$c)$ $r(x,y) = r$, burada $r = x - q\,y < y$, $q = \left[\frac{x}{y}\right]$.

$d)$ $\tau(x)$, burada $\tau(x)$ x ədədinin natural bölənlərinin sayıdır.

$e)$ $\sigma(x)$,burada $\sigma(x)$ x ədədinin natural bölənlərinin cəmidir.

13. İsbat edin ki, aşağıdakı funksiyalar qismən rekursivdirlər.

$$a)\ \varphi(m,n) = \begin{cases} m-n,\ m \ge n \text{ olarsa,} \\ \text{qalan hallarda təyin edilməmişdir.} \end{cases}$$

$$b)\ \psi(m,n) = \begin{cases} m : n, \quad n \quad m-\text{i bölərsə,} \\ \text{qalan hallarda təyin edilməmişdir.} \end{cases}$$

$$c)\ h(m,n) = \begin{cases} \left[\sqrt{m^2-n^2}\right],\ m \ge n \text{ olarsa,} \\ \text{qalan hallarda təyin edilməmişdir.} \end{cases}$$

14. Göstərin ki, $x_1 = x_2$ münasibəti primitiv rekursivdir.

15. Tutaq ki, $\alpha = n_0, n_1, \ldots, n_m, \ldots$ ifadəsi α irrasional ədədinin sonsuz onluq kəsrə ayrılışıdır. Göstərin ki, n_m m-in ümumrekursiv funksiyasıdır.

16. İsbat edin ki, hər yerdə təyin olunan, lakin ümumrekursiv olmayan ədədi funksiya vardır.

17. $D(x)$ funksiyasını bu cür təyin edək:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ olarsa,} \\ x & \text{ədədinin natural bölənləri sayına, əgər } x \neq 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

İsbat edin ki,

$$D(x) = \sum_{y \leq x} Sg(r(x, y)),$$

($r(x, y)$ funksiyasının təyini çalışma 12 c)-də verilmişdir) bərabərliyi doğrudur və ona görə də $D(x)$ ibtidai primitiv funksiyadır.

18. «x sadə ədəddir» münasibətini $p(x)$-lə işarə edək. Göstərin ki, $p(x)$ predikatı primitiv rekursivdir və onun xarakteristik funksiyası

$$g_p(x) = Sg((D(x) \dot{-} 2) + \overline{S}g(|x - 1|) + Sg(|x - 0|))$$

şəklindədir.

19. Tutaq ki, ikiyerli R predikatı aşağıdakı kimi təyin edilmişdir:

$$R(x, y) = p(y) \wedge (y / x \wedge x \neq 0).$$

İsbat edin ki, R primitiv rekursiv predikatdır.

20. İsbat edin ki, əvəzləmə və rekursiya operatorlarının köməyilə alınan hər bir rekursiv funksiya Erbran - Hödel mənada hesablanandır.

21. Göstərin ki,

$$f(n, 0) = n + 1$$

$$f(0, m + 1) = f(1, m)$$

$$f(n + 1, m + 1) = f(f(n, m + 1), m)$$

bərabərlikləri sistemi Erbran - Hödelə görə hesablanan hər hansı bir $f(x, y)$ funksiyasını təyin edir.

22. İsbat edin ki, $f(n) = n \dot{-} [\sqrt{n}]^2$ funksiyası Erbran - Hödel mənada hesablanandır, burada $[\sqrt{n}]$ $\sqrt{n}$-i aşmayan ən böyük natural ədəddir.

23. İsbat edin ki, əgər R_1 və R_2 predikatları ifadə olunandırlarsa, onda $R_1 \Rightarrow R_2$ predikatı da ifadə olunandır.

24. İsbat edin ki,

$$T(x, y, z) \equiv z = x + y,$$

$$V(x, y, z) \equiv z = x \cdot y$$

şəklində təyin olunan «toplama» və «vurma» predikatları ifadə olunandır.

25. İsbat edin ki, verilmiş sonsuz çoxluq onda və ancaq onda rekursiv sayıla bilən olar ki, o hər hansı ciddi artan bir rekursiv funksiyanın qiymətləri oblastı ilə üst-üstə düşsün.

26. Hər bir rekursiv sayıla bilən sonsuz çoxluğun sonsuz rekursiv altçoxluğa malik olduğunu isbat edin.

27. Sonsuz çoxluq onda və ancaq onda rekursiv sayıla bilən olar ki, o, hər hansı birqiymətli rekursiv funksiyanın qiymətləri oblastı olsun. Bunu isbat edin.

28. İsbat edin ki, əgər A və B rekursiv sayıla bilən çoxluqlardırsa, onda $A \bigcup B$ və $A \bigcap B$ çoxluqları da rekursiv sayıla biləndir.

II HİSSƏ. Müasir məntiq

Aristotel məntiqi ilə mühakimə yürüdən beyin dünyanı yalnız ağ və ya qara rəngdə qavrayır, L.Zadə məntiqi isə dünyanı bütün çalarları ilə qavramağa imkan verir.

I FƏSİL. QEYRİ SƏLİS ÇOXLUQLAR

§ 1. Klassik məntiqdən müasir məntiqə keçid

Qeyri səlis çoxluq və qeyri səlis məntiq adı ilə məlum olan riyazi nəzəriyyə klassik çoxluqlar nəzəriyyəsi və ənənəvi formal məntiqin ümumiləşməsidir. Bu yeni anlayış-lar 1965-ci ildə əslən azərbaycanlı olan amerika alimi Lütfi Zadə tərəfindən təklif edilmişdir.

Yeni nəzəriyyənin yaradılmasının əsas səbəbi klassik məntiqdən fərqli olaraq verilmiş mülahizənin «yalan» və «doğru» (0 və 1) qiymətləri arasında qeyri hesabi miqdarda doğruluq qiymətlərinin varlığı ilə izah olunur.

Qeyri səlis məntiqin əsasında qeyri səlis çoxluq anlayışı durur.

Klassik çoxluqlardan fərqli olaraq qeyri səlis çoxlu-ğun elementləri çoxluğa müxtəlif dərəcələrlə daxil ola bilir. Bu zaman elementin çoxluğa mənsubluq dərəcəsi [0,1] parçasından istənilən qiyməti ala bilən xarakteristik funksiya ilə verilir. Qeyri səlis çoxluğu xarakterizə edən bu funk-siyanı biz bundan sonra *mənsubluq funksiyası* adlandı-racağıq. Qeyri səlis çoxluğun qurulması üçün baza çoxluq adlanan hər hansı bir

$U=\{u_1,u_2,...,u_n,...\}$ universal çoxluğu və $\chi(u):U\to[0,1]$ inikasından ibarət mənsubluq funksiyası verilməlidir. U çoxluğu sonlu və ya sonsuz ola bilər. Ay-dındır ki, U universal çoxluğu və $\chi(u)$ mənsubluq funk-siyası vasitəsilə istənilən qədər qeyri səlis altçoxluq düzəlt-mək olar. Əgər belə altçoxluqlardan birini A ilə işarə etsək, onda A altçoxluğunu $A=\{\chi_A(u)/u:u\in U,\ \chi(u)\in[0,1]\}$ cütlər çoxluğu ilə təsvir etmək olar. Əgər $\chi_A(u)=0$ olarsa, onda u elementi A qeyri səlis altçoxluğa daxil deyil. Əks halda u elementi A altçoxluğuna $\chi_A(u)$ dərəcəsi ilə daxil olacaq.

Yuxarıda dediklərimizi belə bir sadə misal üzərində nümayiş etdirək. «**Qaynar qəhvə**» ifadəsinin qeyri dəqiq (təxmini) tərifini formalaşdıraq. Bu məqsədlə U universal çoxluq (mühakimə bazası) olaraq termometrin şkalasında 0-dan 100-ə qədər Selsi dərəcə ilə qeyd olunmuş ədədləri götürək. Bu halda «**Qaynar qəhvə**» anlayışı üçün qeyri səlis altçoxluqlardan biri, məsələn, aşağıdakı kimi verilə bilər.

$$A=\{0/0,0/10,0/20,0\cdot2/30,0\cdot3/40,$$
$$0\cdot6/50,0\cdot7/60,0\cdot9/80,1/90,1/100\}.$$

Göründüyü kimi qəhvə 50^0S temperaturda «**Qaynar**» qeyri səlis çoxluğa 0·6 mənsubluq dərəcəsi ilə daxildir.

Ola bilər ki, qəhvənin 50^0S olması kiməsə qaynar görünsün, başqa birisi üçün isə az qaynar kimi təsir bağışlasın. Elə A çoxluğunun verilməsinin qeyri səlisliyi (qeyri dəqiqliyi) də, məhz bununla izah olunur. Əslində 0^0S-dən 20^0S-yə qədər temperaturlarda qəhvənin «Qaynar»-lığının mənsubluq dərəcəsi 0-a bərabərdir. Bu o deməkdir ki, 20^0 S temperatura qədər «Qaynar»lıqdan söhbət belə gedə bilməz.

Qeyd edək ki, L.Zadə tərəfindən işlənib hazırlanmış mürəkkəb sistemlərin modelləşdirilməsinə qeyri səlis (**təq-ribi**) yanaşma, qeyri səlis çoxluqların ümumi nəzəriyyəsinin yaranmasından bir neçə onilliklər keçdikdən sonra bütün dünyada tanındı. Bununla da qeyri səlis sistemlərin inkişafı dövrü başlayır. Bu dövrü üç mərhələyə ayırmaq olar.

Birinci mərhələ XX əsrin 60-cı illərinin sonu və 70-ci illərin əvvəllərini əhatə edir. Bu dövr qeyri səlis çoxluqların nəzəri aparatının inkşafı ilə xarakterizə olunur. Bu sahədə L.Zadə, A.Belman və E.Mamdaninin işlərini, xüsusilə, qeyd etmək lazımdır. Həmin əsrin 70-80-ci illərini əhatə edən ikinci mərhələdə mürəkkəb texniki sistemlərin qeyri səlis idarə olunması sahəsində ilkin praktiki nəticələr əldə edilir. Nəhayət, 80-ci illərdən müasir dövrə qədər olan üçüncü mərhələdə qeyri səlis ekspert sistemlərin yaradılması üçün proqram paketlərinin hazırlanması prosesi gedir. Beləliklə də qeyri səlis məntiqin tətbiq oblastı əsaslı şəkildə geniş-lənir. Qeyri səlis məntiq yaradıcı şəkildə avtomobil, aero-kosmik və nəqliyyat sənayelərində, məişət texnikası cihazla-rının hazırlanması, maliyə sferası, habelə idarəetmə məsələ-lərinin analizi, qərar qəbul edilməsi və digər sahələrdə geniş tətbiq edilir.

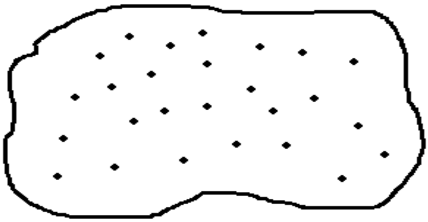
Mənsubluq funksiyası vasitəsilə qeyri səlis çoxluqlar üçün də daxilolma və bərabərlik münasibətləri, habelə adi çoxluqlarda olduğu kimi tamamlayıcı, birləşmə və kəsişmə əməlləri təyin etmək olar.

Qeyri səlis çoxluqlar üzərində əməllər, klassik çoxluqlar üzərində aparılan əməllərin **ziddiyyət** və **üçüncünün istisnası** qanunlarından başqa bütün xassələrini saxlayır.

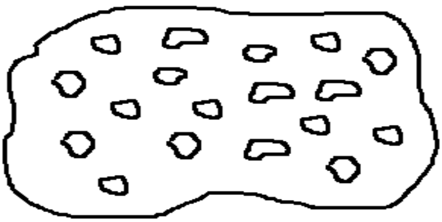
Qeyri səlis çoxluq və qeyri səlis məntiqin hərbi texnikaya, informatika və informasiya sorğu sistemlərinə tətbiqi ilk dəfə L.Zadə tərəfindən, alqoritmlərə və blok sxemlərə tətbiqi isə E.Mamdani tərəfindən təklif edilmişdir. Hal-hazırda qeyri səlis çoxluqlar və qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsi əsasında yaradılmış ekspert sistemlər, maliyyə məsələlərinin proqnozlaşdırılması, təbabət, iqtisadiyyat, bank əməliyyatları və s. kimi vacib sahələrdə geniş tətbiq olunur.

§ 2. Linqvistik dəyişən anlayışı

Linqvistik dəyişən elə dəyişənə deyilir ki, onun aldığı qiymətlər adi dəyişənlər kimi ədədlər deyil, hər hansı təbii və ya formal dilin sözləri və ya cümləlәridir. Ona görə də ədədi qiymətlər alan dəyişənin qiymətləri müstəvinin nöqtələri ilə göstərildiyi halda (şəkil 8), linqvistik dəyişənin qiymətlərini qrafiki olaraq müstəvi üzərində qeyri-dəqiq sərhədlərlə təsvir olunan sahəciklər kimi göstərmək olar (şəkil 9). Linqvistik dəyişənlərin nöqtələrlə deyil qapalı sahəciklər kimi interpretasiyası onun kifayət qədər mürək-kəb, qeyri-korrekt və dəqiq göstərişə tabe olmayan prob-lemlərin təqribi təsvir edilməsinə xidmət edir. Beləliklə, linq-vistik dəyişənin geniş praktik tətbiqə malik təqribi **hesabını** qurmaq və onu inkişaf etdirmək zəruriyyəti yaranır.



Şəkil 8.



Şəkil 9.

Linqvistik dəyişənin qiymətləri külliyatı bu dəyişənin

termlər çoxluğunu təşkil edir. Bu çoxluq sonlu və ya sonsuz ola bilər. Məsələn, tələbənin fənni öyrənmə qabiliyyətini **mənimsəmə termi** ilə ifadə etsək və term sözünü T hərfi ilə işarələsək, **mənimsəmə** linqvistik dəyişənin qiymətlərindən ibarət

T **(ì ÿí èì ñÿì ÿ) = {ãåéðèêàôè, ãÿí àÿòèÿí äèðèúè, êàôè,**

éàõøû, ÷î õ éàõøû, ÿëà}

çoxluğu sonludur.

Əgər linqvistik dəyişən olaraq **rəng termi** götürsək, onda

T **(ðÿí ý) = ãûðì ûçû + ÷î õ ãûðì ûçû + ÷î õ ÷î õ ãûðì ûçû +**

+ ôþâãÿëàäÿ ãûðì ûçû + ⋯ + ùÿäñèç ãûðì ûçû + ⋯ +

+ ãûðì ûçûäåéèë + ùå÷ ãûðì ûçûäåéèë + òàì àì èëÿ

ãûðì ûçûäåéèë + ãÿòèééÿí ãûðì ûçûäåéèë +

+ àç ÷î õ ãûðì ûçûäåéèë + ⋯

çoxluğu isə sonsuzdur. Burada + işarəsi cəbri toplama deyil, birelementli çoxluqların birləşməsini göstərir və bundan sonra çoxluğu belə göstərəcəyik. Linqvistik dəyişənə yuxarı-da verdiyimiz tərif qeyri-formal xarakter daşıyır və onu mə-naca ifadə edir.

Gələcəkdə qeyri səlis linqvistik dəyişənin formal tərifini vermək məqsədilə əvvəlcə adi (qeyri səlis olmayan) linqvistik dəyişənin formal tərifini verək və sonrakı paraq-rafda onu qeyri səlis linqvistik dəyişən üçün ümumiləşdirək.

Tərif. Aşağıdakı üçlüklə xarakterizə olunan struktura adi (qeyri səlis olmayan) linqvistik dəyişən deyilir: $(X, U, R(X, u))$; burada X-dəyişənin adı, U-universal çox-luq, u - U çoxluğunun elementlərinin ümumi adı, $R(X, u)$ - U çoxluğunun u qiyməti üzərinə qoyulmuş və X dəyişəni ilə şərtlənən altçoxluğudur.

Bəzən əlverişli olması məqsədilə $R(X, u)$ əvəzinə sa-dəcə $R(X)$, $R(u)$ yaxud $R(x)$ kimi işarələmələrdən istifadə edəcəyik; harada ki, x X dəyişənin qiymətlərinin ümumi adını bildirir, $R(X)$ u üzərinə qoyulmuş məhdudiyyət, ya-xud X dəyişəni ilə şərtlənmiş məhdudiyyətdir.

$$x = u : R(X) \qquad (2.1)$$

və ya

$$x = u,\ u \in R(X) \qquad (2.2)$$

tənliyində x dəyişəninin $R(X)$-lə şərtlənmiş u qiyməti ilə eyni olması faktı nəzərdə tutulur.

Misal. Dəyişənin ümumi adı olaraq **futbolçu** termini götürək.

Fərz edək ki, **Qarabağ** futbol komandasının 36 nəfər futbolçusu var və onlar 1-dən 100-ə qədər nömrələnmiş formalarda çıxış edirlər. Bu halda U universal çoxluğu olaraq $U = N$ natural ədədlər çoxluğunu, göstərsək, $R(X)$ $\{1, 2, ..., 100\}$ altçoxluğundan ibarət olacaqdır.

$$x = u,\ \ u \in R(X)$$

tənliyi isə onu göstərir ki, x U universal çoxluğun u elementidir və həm də 1-dən 100-ə qədər nömrə ilə çıxış edən futbolçulardan biridir.

X linqvistik dəyişənin qiyməti hər bir $u \in U$ elementinə bu elementin X-lə birgəlik qiymətini uyğun qoyan $c : U \to [0,1]$ funksiyası ilə xarakterizə olunur. Misal üçün, əgər **Qarabağ** futbol komandasının oyunçuları yaş həddinə görə 19-30 arasında dəyişirsə, onda $R(x) = \{19, 20, ..., 30\}$ altçoxluğunda ən gənc X oyunçunun $R(x)$ çoxluğunun u elementi ilə birgəliyini xarakterizə edən c funksiyası $c : U \to [0,1]$ inikasında $c = 0 \cdot 9$, ən yaşlı oyunçusu isə $c = 0 \cdot 3$ qiymətlərilə təyin oluna bilər.

§ 3. Qeyri səlis linqvistik dəyişən anlayışı

Yuxarıda haqqında danışdığımız adi linqvistik dəyi-şən anlayışını ümumiləşdirək və **qeyri səlis** linqvistik dəyişən anlayışı daxil edək.

Tərif. Aşağıdakı üçlüklə təyin olunan struktura qeyri səlis linqvistik dəyişən deyilir:

$$(X, U, R(X, u)).$$

Burada X -dəyişənin adı, U -sonlu və ya sonsuz universal çoxluq, $R(X,u)$ U çoxluğunun u dəyişəni üzərinə qo-yulmuş və X -lə şərtlənən qeyri səlis məhdudiyyəti ifadə edir. $R(X,u)$ yazılışında u - U universal çoxluğu element-lərinin ümumi adı, X isə onun qiymətləri üzərinə qoyulmuş qeyri səlis məhdudiyyətdir. Adi linqvistik dəyişənin tərifində olduğu kimi burada da $R(X,u)$ əvəzinə bəzən $R(X)$, $R(u)$ yaxud $R(x)$ kimi yazılışlardan istifadə edəcəyik. Burada x X dəyişəninin qiymətlərinin ümumi adıdır. Onu da qeyd edək ki, U çoxluğunun u elementlərinə X -in baza dəyişən-ləri deyilir. X üçün təyinat tənliyi

$$x = u : R(X) \tag{3.1}$$

və ya

$$x = u,\ u \in R(X) \tag{3.2}$$

şəklindədir.

(3.1) və ya onunla ekvivalent olan (3.2) tənliyi belə bir faktı əks etdirir ki, x elementi $R(X)$ məhdudiyyəti nə-zərə alınmaqla U çoxluğunun u qiyməti ilə təyin olunur.

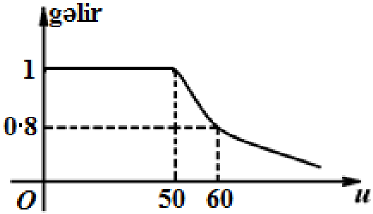
(3.2) bərabərliyinin ödənilməsinin mümkünlüyü dərə-cəsini u qiymətinin $R(X)$ məhdudiyyət şərti ilə birgəliyi adlandırıb, özünü də

$$c(u) = \chi_{R(X)}(u),\ u \in U \tag{3.3}$$

kimi işarə edirlər. Bir daha qeyd edək ki, burada $\chi_{R(X)}(u)$ u elementinin $R(X)$ məhdudiyyətinə mənsubluq dərəcəsidir.

Qeyd. u qiymətinin $R(X)$-lə birgəliyini, onun ehtimalından fərqləndirmək lazımdır. Belə ki, u qiymətinin $R(X)$-lə birgəliyi o deməkdir ki, u qiyməti $R(X)$ məhdudiyyət şərtini nə dərəcədə ödəyir və onun qeyd olunmuş qiymətinin nə qədər ehtimallı və ya qeyri ehtimallı olması ilə heç bir əlaqəsi yoxdur.

Misal. Gəlir adlandırdığımız qeyri səlis linqvistik dəyişəni nəzərdən keçirək.



Şəkil 10.

Fərz edək ki, ayrı-ayrı illər üzrə Azərbaycanın neft hasilatının gəlirinin göstəricilərini təhlil etmək lazımdır.

Tutaq ki, neft hasilatının gəliri ilk 50 ildə sabit ol-maqla maksimum məbləğdə, sonrakı illərdə isə şəkil 10-da göstərilən əyri üzrə dəyişir.

U universal çoxluq olaraq $U = N$ natural ədədlər çoxluğunu götürək və $R(x)$ məhdudiyyətini

$$R(\textbf{Gəlir}) = \int_{1}^{50} 1/u + \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-60}{20} \right)^2 \right)^{-1} /u \qquad (3.4)$$

bərabərliyi ilə təyin edək[1)]. Burada $\int$ simvolu ilə cəmləmə nəzərdə tutulur. Bu halda (3.4) tənliyi

$$\textbf{Gəlir} = 60 : R(\textbf{Gəlir}), \qquad (3.5)$$

$u = 60$ qiymətinin $R(\textbf{Gəlir})$ məhdudiyyəti ilə birgəliyi isə

$$c(60) = \chi_{R(\textbf{Gəlir})}(60) = 0 \cdot 8$$

[1)] α / u yazılışında $u \in U$ elementinin $\alpha \in [0,1]$ ədədilə birgəliyi və yaxud mənsubluq dərəcəsi nəzərdə tutulur.

olar.

Gəlir qeyri səlis dəyişənin birgəlik funksiyası şəkil 10-da göstərilmişdir.

İndi mürəkkəb qeyri səlis dəyişən anlayışı ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, X_1 və X_2 uyğun olaraq U_1 və U_2 universal çoxluqlarında qeyri səlis dəyişənlərdir, onda $X=(X_1,X_2)$ cütünü $U=U_1\times U_2$ Dekart hasilində mürək-kəb qeyri səlis dəyişən adlandıracağıq. Buna uyğun olaraq binar təyinat tənliyi

$$(x_1,x_2)=(u_1,u_2):R(X_1,X_2) \qquad (3.6)$$

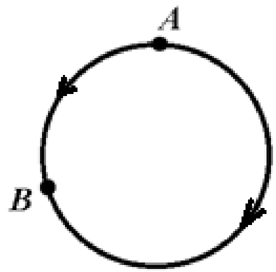
kimi olar. Burada x_1,x_2 uyğun olaraq X_1,X_2 dəyişənləri qiymətlərinin ümumi adı, u_1,u_2 isə uyğun olaraq U_1,U_2 universal çoxluqları elementlərinin ümumi adıdır. $R(X)=R(X_1,X_2)$ ifadəsi $X=(x_1,x_2)$ dəyişəni ilə şərtlənən məhdudiyyət olmaqla U-da qeyri səlis binar münasibətdir.

(u_1,u_2) cütünün $R(X_1,X_2)$ məhdudiyyəti ilə birgəliyi

$$c(u_1,u_2)=\chi_{R(X)}(u_1,u_2) \qquad (3.7)$$

kimi olar.

Misal. Tutaq ki, çevrə üzrə hərəkətdə A nöqtəsindən B nöqtəsinə **sağdan sola yaxınlıq** X_1, **soldan sağa yaxınlıq** X_2-dir (şəkil 11).



Şəkil 11.

$U_1,\ U_2$ universal çoxluqları olaraq

$$U_1 = U_2 = [0, 2\pi]$$

götürək və u üzərinə qoyulmuş $R(X)$ məhdudiyyətini isə aşağıdakı şəkildə təyin edək:

$$R(X) = \int_{U_1 \times U_2} (1 + (u_1 + u_2)^2)^{-1} / (u_1, u_2)\,. \qquad (3.8)$$

Burada $\int_{U_1 \times U_2}$ – yazılışı U_1 və U_2 çoxluqlarının $U_1 \times U_2$ Dekart hasili üzrə birləşməni göstərir.

Əgər (u_1, u_2) cütü olaraq $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ götürsək, onda

$$R(X) = \int_{U_1 \times U_2} \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{-1} / \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.9)$$

alarıq. Bu halda $(u_1, u_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cütü üçün təyinat tənliyi

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : R(X)\,, \qquad (3.10)$$

$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cütünün $R(X)$ məhdudiyyəti ilə birgəliyi

$$c = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \chi_{R(X)}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot (2\pi)^{-2} \qquad (3.11)$$

olacaqdır.

§ 4. Qeyri səlis çoxluqlar

Haqqında söhbət açacağımız qeyri səlis (bəzən qeyri-dəqiq) çoxluqların elementləri adi çoxluqlardan fərqli ola-raq hər hansı verilmiş U universal çoxluğun və $\chi : U \to [0,1]$ inikasının verilməsilə təyin edilir.

Belə çoxluqlar L.Zadənin qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsində mürəkkəb vəziyyətlərdə verilmiş məsələlərin təqribi həllinin tapılması və qərar qəbul edilməsində mühüm tətbiqi əhəmiyyətə malikdir.

Tərif. Fərz edək ki, U universal çoxluq,

$$\chi_A : U \to [0,1] \qquad (4.1)$$

isə U çoxluğunun hər bir elementinə $[0,1]$ aralığından $\chi_A(u)$ ədədini qarşı qoyan inikasdır.

U universal çoxluğun u elementinin A altçoxlu-ğuna mənsubluq (birgəlik) dərəcəsini xarakterizə edən $\chi_A(u)$ mənsubluq funksiyası ilə təyin olunan A altçoxluğu qeyri səlis çoxluq adlanır.

Adından da göründüyü kimi qeyri səlis A çoxluğu universal U çoxluğun u elementləri və onun $\chi(u)$ obrazları vasitəsilə düzəldilir və həm də $u \in U$ elementi A çoxluğuna $\chi_A(u)$ göstəricisi ilə $\chi_A(u)/u$ şəklində daxil olur.

U çoxluğunun $\chi_A(u) > 0$ şərtini ödəyən elementləri çoxluğuna qeyri səlis A çoxluğunun daşıyıcısı, $\sup\limits_U \chi(u)$ kəmiyyətinə onun hündürlüyü deyilir.

U universal çoxluğun A altçoxluğunda mənsubluq dərəcəsi 0·5-ə bərabər olan elementi qeyri səlis A çoxluğu-nun keçid nöqtəsi adlanır.

Misal. U universal çoxluq olaraq bir semestrdə tələbənin imtahana qədərki ballar + imtahanda topladığı bal-ların cəmini götürək, yəni $U = [0,100]$.

Məlumdur ki, toplanan ümumi balların miqdarı ≤ 50 olduqda tələbənin biliyi qeyri-kafi, > 50 olduqda isə müsbət qiymətləndirilir.

$U = [0,100]$ aralığındakı ədədlərə bərabər qiymətlər alan u dəyişənini «**tələbənin biliyinin meyarı**» kimi şərh edək. Bunu biz sonralar qısa şəkildə TBM kimi işarə edə-cəyik.

«**Qeyri-kafi**» və «**müsbət**» sözlərini uyğun olaraq **pis** və **yaxşı** sözləri ilə əvəz edək. Aydındır ki, TBM={…,**çox pis, pis, pisə yaxın,…,yaxşı, bir az yaxşı, çox yaxşı,…,əla**} çoxluğunun elementləri linqvistik dəyişənlər olacaqdır.

U universal çoxluğun, məsələn, **yaxşı** termi ilə ifadə olunan *A* qeyri səlis altçoxluğunu aşağıdakı mənsubluq funksiyası ilə təyin edək.

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{ÿýÿð } 0 \le u \le 50 \text{ î ëàðñà,} \\ \left(1 + \left(\dfrac{u-50}{20}\right)^{-2}\right)^{-1}, & \text{ÿýÿð } 50 < u \le 100 \text{ î ëàðñà.} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Bu misalda **yaxşı** termini ilə ifadə etdiyimiz qeyri səlis *A* çoxluğunun daşıyıcısı $[50,100]$ aralığı, hündürlüyü $\chi_{\text{éàõøû}}(u) = 0 \cdot 5$, keçid nöqtəsi $u = 70$ olacaq.

Qeyri səlis altçoxluğun göstərilişinin daha aydın olması üçün aşağıdakı kimi işarələmələrdən istifadə edək.

Əvvəlcə fərz edək ki, *U* adi çoxluqdur:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}\ .$$

Bu çoxluğu

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{éàõóä} \quad U = \sum_{i=1}^{n} u_i \qquad (4.3)$$

kimi göstərməyi şərtləşək; harada ki, + işarəsi hesabi cəm deyil, birelementli çoxluqların birləşməsidir.

(4.3) yazılışına analoji olaraq, əgər universal *U* çoxluğunun $u_i\ (i = \overline{1,n})$ elementinin qeyri səlis *A* altçoxluğuna mənsubluq dərəcəsini $\chi_i\ (i = \overline{1,n})$ ilə işarə etsək, on-da A altçoxluğunu

$$A = \chi_1 u_1 + \chi_2 u_2 + \cdots + \chi_n u_n \quad \text{éàõóä} \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_i u_i \qquad (4.4)$$

kimi yaza bilərik.

Əgər U universal çoxluq ədədi çoxluq olarsa, onda u_i və χ_i ədədlərini fərqləndirmək üçün şaquli xətt çəkib sol tərəfdə χ_i, sağ tərəfdə isə u_i ədədlərini yazacağıq:

$$A = \chi_1 / u_1 + \chi_2 / u_2 + \cdots + \chi_n / u_n \text{ éàõóä } \sum_{i=1}^{n} \chi_i / u_i \quad (4.4')$$

Misal. Tutaq ki, T universal çoxluğun elementləri havanın temperaturunu Selsi dərəcə ilə ifadə edən ədəd-lərdir:

$$T = 1 + 2 + \cdots + 40. \qquad (4.5)$$

Əgər növbəti gündə temperaturun «**yüksək**» olması ehtimalının mənsubluq funksiyasının qiymətini «0·7» götürsək, onda $\underset{\text{éöêñÿê}}{A}$ qeyri səlis çoxluğunu aşağıdakı kimi vermək olar

$$\underset{\text{éöêñÿê}}{A} = 0\cdot1/2 + 0\cdot3/7 + 0\cdot5/20 +$$
$$+ 0\cdot7/32 + 0\cdot8/35 + 1/40. \qquad (4.6)$$

Əgər U çoxluğunun elementləri ədədlər deyilsə, məsələn,

$$U = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ éàõóä } U = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \;, \quad (4.7)$$

onda U universal çoxluğun A qeyri səlis altçoxluğunu düzəldərkən universal çoxluğun elementlərini mənsubluq funksiyasının qiymətlərindən şaquli düz xəttlə ayırmağa ehtiyac qalmır.

Belə ki, (4.7) universal çoxluğun elementlərini uy-ğun olaraq 0·3; 0·8; 1; 0·5 göstəriciləri ilə qeyri səlis A altçoxluğunu aşağıdakı kimi təsvir etmək olar

$$A = 0\cdot3a_1 + 0\cdot8a_2 + 1a_3 + 0\cdot5a_4. \qquad (4.8)$$

Ola bilərki, universal çoxluğun dəyişən elementləri hər hansı təbii və ya süni qurulmuş dilin sözləri və ya müla-hizələridir. Belə dəyişənlərə linqvistik dəyişənlər demişik. Məsələn, əsas linqvistik dəyişən olaraq **güc** və onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu

$G=$ **güclü + çox güclü + hədsiz güclü + fövqəladə güclü +$\cdots$+ zəif+çox zəif+çox-çox zəif+$\cdots$**

olarsa, G çoxluğuna daxil olan söz və ya mülahizələri (linqvistik dəyişənləri) $g_1, g_2, ...$ simvolları ilə işarə etsək, onda

$$G = g_1 + g_2 + g_3 + \cdots$$

kimi yazarıq. Əgər fərz etsək ki, qeyri səlis A altçoxluğuna g_1-in mənsubluq dərəcəsi 0·4, g_2-nin mənsubluq dərəcəsi 0·3, g_3-ün mənsubluq dərəcəsi 0·6 və s., onda A altçoxlu-ğunu belə göstərə bilərik:

$$A = 0\cdot 4/g_1 + 0\cdot 3/g_2 + 0\cdot 6/g_3 + \cdots \qquad (4.9)$$

Aşkardır ki, (4.9) şəklində göstərdiyimiz qeyri səlis A çoxluğunun gücünü istənilən hesabi çoxluğun gücü ilə müqayisə etmək olar və bu halda A çoxluğunu

$$A = \sum_G \chi_A(g)/g \qquad (4.10)$$

şəklində yaza bilərik

§ 5. Qeyri səlis çoxluqlar üzərində əməllər

Qeyri səlis çoxluqlar üzərində də adi çoxluqlar üçün olan əməlləri təyin etmək, onların tabe olduğu qanun-ları göstərmək və beləliklə də, qeyri səlis çoxluqlar cəbri yarat-maq olar.

Tutaq ki,

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \qquad (5.1)$$

universal çoxluq

$$A = \sum_U \chi_A(u)/u, \qquad (5.2)$$

$$B = \sum_U \chi_B(u)/u \qquad (5.3)$$

onun qeyri səlis altçoxluqlarıdır.

I. Qeyri səlis A çoxluğunun tamamlayıcısı $\overline{A}$ şəklin-də işarə edilir və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\overline{A} = \sum_{U} (1 - \chi_A(u)) / u \qquad (5.4)$$

Misal 1. Əgər U universal çoxluq

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5,$$

$$A = 0{\cdot}2 / u_1 + 0{\cdot}6 / u_3 + 1 / u_5$$

kimi verilərsə, onda $\overline{A}$ çoxluğu belə olacaq:

$$\overline{A} = 0{\cdot}8 / u_1 + 1 / u_2 + 0{\cdot}4 / u_3 + 1 / u_4.$$

II. Qeyri səlis A və B çoxluqlarının birləşməsi $A \bigcup B$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$A \bigcup B = \sum_{U} (\chi_A(u) \vee \chi_B(u)) / u \qquad (5.5)$$

burada $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$.

Misal 2. Tutaq ki, $U = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$,

$$A = 0 \cdot 3 / u_4 + 0 \cdot 8 / u_5 + 1 / u_6 + 0 \cdot 2 / u_{10},$$

$$B = 0 \cdot 2 / u_3 + 0 \cdot 6 / u_4 + 1 / u_5 + 0 \cdot 8 / u_8 + 0 \cdot 5 / u_9.$$

Bu halda $A \bigcup B$ birləşməsi aşağıdakı kimi olar:

$$A \bigcup B = 0 \cdot 2 / u_3 + 0 \cdot 6 / u_4 + 1 / u_5 + 1 / u_6 +$$

$$+ 0 \cdot 8 / u_8 + 0 \cdot 5 / u_9 + 0 \cdot 2 / u_{10}.$$

III. A və B qeyri səlis çoxluqların kəsişməsi:

$$A \bigcap B = \sum_{U} (\chi_A(u) \wedge \chi_B(u)) / u \qquad (5.6)$$

kimi təyin olunur; burada $\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Misal 3. Əgər U, A və B misal 2-dəki çoxluqlar olarsa, onda

$$A \bigcap B = 0{\cdot}3 / u_4 + 0{\cdot}8 / u_5.$$

IV. İki A və B qeyri səlis çoxluqların hasili aşağı-dakı kimi təyin olunan $A \cdot B$ çoxluğuna deylir.[1)]

$$A \cdot B = \sum_U (\chi_A(u) \cdot \chi_B(u)) / u. \qquad (5.7)$$

Misal 4. Misal 2-də verilmiş U, A və B qeyri səlis çoxluqları üçün:

$$A \cdot B = 0 \cdot 18 / u_4 + 0 \cdot 8 / u_5.$$

Xüsusi halda $B = A$ olduqda

$$\sum_U (\chi_A(u))^\alpha / u = A^\alpha. \qquad (5.8)$$

Göstərmək olar ki, universal çoxluğun qeyri səlis altçoxluq-ları yuxarıda təyin etdiyimiz I – IV əməllərə nəzərən cəbr əmələ gətirir.

Sonuncu bərabərlik göstərir ki, α müsbət ədəd olduqda A^α yazılışı

$$A^\alpha = \sum_U (\chi_A(u))^\alpha / u \qquad (5.9)$$

kimi başa düşülməlidir.

Analoji olaraq, əgər α $\alpha \sup \chi_A(u) \leq 1$ şərtini ödəyən istənilən mənfi olmayan ədəd olarsa, onda

$$\alpha A = \sum_U \alpha \chi_A(u) / u, \qquad (5.10)$$

xüsusi halda (5.9)-dan $\alpha = 2$ olduqda

$$A^2 = \sum_U (\chi_A(u))^2 / u \qquad (5.11)$$

$\alpha = 0 \cdot 5$ olduqda isə

$$A^{0 \cdot 5} = \sum_U (\chi_A)^{0 \cdot 5} / u \qquad (5.12)$$

olduğunu alarıq.

A^2 və $A^{0 \cdot 5}$ ifadələrinə A qeyri səlis çoxluğun qüvvətləri deyərək, özlərini də uyğun olaraq A^2-konsentrləşmə və

---

1) Belə hasil adi çoxluqlar üçün təyin edilməyib.

$A^{0\cdot5}$ -dartılma adlandırıb $A^2 = CON(A)$ və $A^{0\cdot5} = DIL(A)$ kimi işarə edirlər.

Misal 5. Fərz edək ki,

$$U = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$A = 0\cdot8/u_1 + 0\cdot5/u_2 + 1/u_3.$$

Onda

$$A^2 = 0\cdot64/u_1 + 0\cdot25/u_2 + 1/u_3,$$

$$A^{0\cdot5} = 0\cdot9/u_1 + 0\cdot7/u_2 + 1/u_3.$$

§ 6. Qeyri səlis çoxluqlar üzərində əməllərin xassələri

Adi çoxluqlarla qeyri səlis çoxluqlar arasında fərqli cəhətlərdən biri də onlar üzərində aparılan əməllərdə özünü göstərir.

§5-də gördük ki, əgər U universal çoxluq, A və B onun

$$A = \sum_{U} \chi_A(u)/u \tag{6.1}$$

$$B = \sum_{U} \chi_B(u)/u \tag{6.2}$$

kimi təyin olunmuş qeyri səlis altçoxluqlardırsa, onda

$$A \cap B = \sum_{u} (\chi_A \wedge \chi_B)/u, \tag{6.3}$$

$$A \cup B = \sum_{u} (\chi_A \vee \chi_B)/u, \tag{6.4}$$

$$\overline{A} = \sum_{u} (1 - \chi_A)/u \tag{6.5}$$

şəklində təyin olunurlar; harada ki, $\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$, $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$.

Göstərək ki, adi çoxluqlar üzərində aparılan kəsişmə, birləşmə binar əməlləri, habelə tamamlayıcı əməlinin tabe olduğu qanunlar (xassələr) qeyri səlis çoxluqlar üçün də doğrudur.

I. A və B qeyri səlis çoxluqların kəsişməsi

$$A\bigcap B=\sum_U(\chi_A\wedge\chi_B)/u=\sum_U(\min(\chi_A\wedge\chi_B))/u=$$
$$=\sum_U(\min(\chi_B,\chi_A))/u=\sum_U(\chi_B\wedge\chi_A)/u=B\bigcap A \quad (6.6)$$

II. A və B qeyri səlis çoxluqların birləşməsi üçün də yuxarıdakına analoji olaraq

$$A\bigcup B=B\bigcup A \quad (6.7)$$

yaza bilərik. (6.7) bərabərliyinin isbatı

$$\chi_A\vee\chi_B=\max(\chi_A,\chi_B)=\max(\chi_B,\chi_A)=\chi_B\vee\chi_A \quad (6.8)$$

bərabərliyindən və (6.4) düsturundan alınır.

Eyni qayda ilə aşağıdakı xassələrin doğruluğunu isbat etmək olar.

III. $$\left.\begin{array}{l}A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C\\ A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C\end{array}\right\} \quad (6.9)$$

IV. $$\left.\begin{array}{l}A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\\ A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\end{array}\right\} \quad (6.10)$$

V. $$\left.\begin{array}{l}A\bigcap A=A\\ A\bigcup A=A\end{array}\right\}, \quad (6.11)$$

VI. $$\left.\begin{array}{l}A\bigcap E=A\\ A\bigcup E=E\end{array}\right\}, \quad (6.12)$$

VII. $$\left.\begin{array}{l}A\bigcap\varnothing=\varnothing\\ A\bigcup\varnothing=A\end{array}\right\}, \quad (6.13)$$

VIII. $$\left.\begin{array}{l}\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}\\ \overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}\\ \overline{\overline{A}}=A\end{array}\right\}. \quad (6.15)$$

Lakin adi çoxluqlarda

$$\left.\begin{array}{l} A\bigcap\overline{A}=\varnothing \\ A\bigcup\overline{A}=E \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

(burada E ilə vahid çoxluq işarə edilmişdir) olduğu halda (6.15) bərabərlikləri qeyri səlis çoxluqlar üçün, ümumiy-yətlə, doğru deyil. Belə ki, $A=\varnothing$ yaxud $A=E$ qiymətlərin-dən başqa istənilən qeyri səlis A çoxluğu üçün

$$\left.\begin{array}{l} A\bigcap\overline{A}\neq\varnothing \\ A\bigcup\overline{A}\neq E \end{array}\right\}. \qquad (6.16)$$

(6.16) bərabərsizliklərinə inanmaq üçün $\chi_A = 0\cdot 5$ götürmək kifayətdir. Bu halda

$$\chi_{A\bigcap\overline{A}} = \min(\chi_A, \chi_{\overline{A}}) = \min(\chi_A, 1-\chi_A) =$$
$$= \min(0\cdot 5, 0\cdot 5) = 0\cdot 5 \neq 0 = \chi_{\varnothing}, \qquad (6.17)$$

beləcə də

$$\chi_{A\bigcup\overline{A}} = \max(\chi_A, \chi_{\overline{A}}) = \max(\chi_A, 1-\chi_A) =$$
$$= \max(0\cdot 5, 0\cdot 5) = 0\cdot 5 \neq 1 = \chi_E. \qquad (6.18)$$

Beləliklə, qeyri səlis çoxluqlar küllyatı Bul cəbri əmələ gətirmir. Bu isə o deməkdir ki, qeyri səlis çoxluqlar üzərində qurulan məntiq, klassik məntiqdən fərqlidir.

§ 7. Qeyri səlis altçoxluğun səviyyə çoxluğu

Tutaq ki, U universal çoxluq, A onun qeyri səlis altçoxluğu və $\alpha \in [0,1]$.

Tərif. A qeyri səlis çoxluğun $A_\alpha - \alpha$ səviyyə çoxluğu U universal çoxluğun bütün elə elementləri çoxluğuna deyilir ki, həmin elementlərin A qeyri səlis altçoxluğuna mənsubluq dərəcəsi α -ya bərabər və ya ondan böyük olsun.

Tərifə görə

$$A_\alpha = \{\exists u \in U : \mu_A(u) \geq \alpha\}. \qquad (7.1)$$

Tərifdən görünür ki, A_α çoxluğu qeyri səlis deyil, adi məna-da çoxluqdur. Belə halda deyirlər ki, A qeyri səlis altçoxluq aşağıdakı kimi səviyyə çoxluqlarına ayrılır:

$$A = \sum_{\alpha} \alpha A_\alpha \ \text{éàõóä} \ A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \,. \qquad (7.2)$$

Burada

$$\alpha A_\alpha = \int_U \alpha \mu_A(u)/u \qquad (7.3)$$

kimi işarə edilmişdir.

$\sum\limits_{\alpha}$ yaxud $\int\limits_0^1$ simvolları A_α çoxluqlarının $\alpha, (0 \le \alpha \le 1)$ üzrə birləşməsini ifadə edir.

(7.2) ayrılışlarına

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / u_i \qquad (7.4)$$

ifadəsində hər biri müəyyən səviyyəyə malik altçoxluqların hədlərinin qruplaşdırılması kimi baxmaq olar; məsələn, tutaq ki, A altçoxluğu

$$A = 0 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/1 + 0 \cdot 5/4 + 0 \cdot 6/8 + 0 \cdot 9/10 \qquad (7.5)$$

şəklində verilmişdir. Əgər əvvəlki paraqraflardan məlum olan

$$\chi_i / u_i + \chi_j / u_i = (\chi_i \vee \chi_j)/u_i \qquad (7.6)$$

düsturundan istifadə etsək, onda (7.5) çoxluğunun hədlərini aşağıdakı kimi qruplaşdıra bilərik.

$$\begin{aligned}A = {} & 0\cdot1/3+0\cdot1/1+0\cdot1/4+0\cdot1/8+0\cdot1/10+\\ & +0\cdot2/1+0\cdot2/4+0\cdot2/8+0\cdot2/10+\\ & +0\cdot5/4+0\cdot5/8+0\cdot5/10+\\ & +0\cdot6/8+0\cdot6/10+\\ & +0\cdot9/10=\\ & =0\cdot1(1/3+1/4+1/8+1/10)+\\ & +0\cdot2(1/1+1/4+1/8+1/10)+\\ & +0\cdot5(1/4+1/8+1/10)+\\ & +0\cdot6(1/8+1/10)+\\ & +0\cdot9(1/10)\end{aligned} \tag{7.7}$$

Beləliklə, (7.7) bərabərliyindən (7.2)-yə əsasən aşağıdakı səviyyə çoxluqlarını alarıq:

$$\left.\begin{aligned} A_{0\cdot1} &= 3+1+4+8+10,\\ A_{0\cdot2} &= 1+4+8+10,\\ A_{0\cdot5} &= 4+8+10,\\ A_{0\cdot6} &= 8+10,\\ A_{0\cdot9} &= 10.\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

(7.8)-dən bir daha görünür ki, qeyri səlis çoxluğun səviyyə çoxluqları adi mənada bildiyimiz çoxluqlardır. Bu da onu göstərir ki, qeyri səlis çoxluğun səviyyə çoxluqları üzrə ayrılışı adi çoxluqlar nəzəriyyəsinin bir çox anlayış və təklif-lərinin qeyri səlis çoxluqlara köçürülməsinə imkan verir.

§ 8. Ümumiləşmə prinsipi

Fərz edək ki, U və V ixtiyari çoxluqlar, A isə U çoxluğunun qeyri səlis altçoxluğudur:

$$A=\chi_1 u_1+\chi_2 u_2+\cdots+\chi_n u_n \tag{8.1}$$

$f:U\to V$ inikasına baxaq.

Ümumiləşmə prinsipi təsdiq edir ki,

$$f(A)=f(\chi_1 u_1+\dots+\chi_n u_n)=\chi_1 f(u_1)+\dots+\chi_n f(u_n)\,. \quad (8.2)$$

Deməli, U çoxluğunun $u_1,...,u_n$ elementlərinin f inikasının obrazlarını bilərək A qeyri səlis altçoxluğun obrazını (8.2) şəklində tapa bilərik.

Beləliklə, ümumiləşmə prinsipi, mahiyyət etibarilə, verilmiş inikasın və ya münasibətin təyin olunduğu U çoxluğunun dəyişilməsinə xidmət edir.

Misal 1. Tutaq ki, U universal çoxluq aşağıdakı kimi verilir:

$$U=1+2+3+4+\dots+25\,. \qquad (8.3)$$

Fərz edək ki, f inikası $f(u)=u^{0\cdot 5}$, $u\in U$, A altçoxluğu isə bu şəkildədir:

$$A=1/1+0\cdot 5/4+0\cdot 2/9+0\cdot 3/25\,. \qquad (8.4)$$

Bu halda

$$f(A)=1/1+0\cdot 5/2+0\cdot 2/3+0\cdot 3/5\,, \qquad (8.5)$$

$$V=1+2+3+5\,. \qquad (8.6)$$

Misal 2. Tutaq ki, U universal çoxluq

$$U=5+10+12+15+20 \qquad (8.7)$$

kimi verilir, (8.7) universal çoxluğun $A=$ **böyük** qeyri səlis altçoxluğu isə

$$A=0\cdot 2/5+0\cdot 4/10+0\cdot 5/12+0\cdot 8/15+1/20 \quad (8.8)$$

şəklindədir. f inikası olaraq kvadrata yüksəltmə əməli qəbul edək. Onda

$$f(A)=A^2=\mathbf{áþéöê}^{2}=$$

$$=0\cdot 2/25+0\cdot 4/100+0\cdot 5/144+0\cdot 8/400\,. \quad (8.9)$$

Bu halda $V=25+100+144+400$ alarıq.

Göründüyü kimi f inikasının tətbiqi nəticəsində A qeyri səlis çoxluğun elementlərinin mənsubluq dərəcələri dəyişmir, lakin obrazları çoxluğu 1-ci misalda daralır, 2-ci misalda isə genişlənir.

Ümumiyyətlə, tutaq ki, f inikası $f : u \to u^n$ şəklində verilmişdir. Əgər

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_k, \qquad (8.10)$$

çoxluğunun qeyri səlis altçoxluğu

$$A = \chi_1 u_1 + \chi_2 u_2 + \cdots + \chi_k u_k \qquad (8.11)$$

kimi verilmişdirsə, onda

$$f(A) = f(\chi_1 u_1 + \cdots + \chi_k u_k) = \chi_1 u_1^n + \cdots + \chi_k u_k^n \quad (8.12)$$

şəklində olacaqdır.

Misal 3. Tutaq ki,

$$U = 1 + 2 + 3 + 4, \qquad (8.13)$$

$$A = \mathbf{\text{÷î õ}} = 0\cdot 1/1 + 0\cdot 5/2 + 0\cdot 8/3 + 1/4\,. \qquad (8.14)$$

Bu halda (8.12)-ə əsasən alarıq:

$$f(A) = \mathbf{\text{÷î õ}}^3 = 0\cdot 1/1 + 0\cdot 5/8 + 0\cdot 8/27 + 1/64\,. \quad (8.15)$$

Əgər U çoxluğunun A altçoxluğunun daşıyıcısı kontinium güclü, yəni

$$A = \int_U \chi_A(u)/u \qquad (8.16)$$

olarsa, onda onun f inikasında obrazı

$$f(A) = f\left(\int_U \chi_A(u)/u\right) = \int_V \left(\chi_A(u)/f(u)\right) \qquad (8.17)$$

kimi təyin edilir; burada, $f(u)$ V çoxluğunun elementi, $\chi_A(u)$ isə onun $f(A)$ qeyri səlis altçoxluğuna mənsubluq dərəcəsidir. İndi fərz edək ki, $f : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to V$ n-yerli predikat, A $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ Dekart hasilində $\chi_A(u_1, u_2, ..., u_n)$ mənsubluq dərəcəsinə malik qeyri səlis altçoxluqdur; hara-da ki, $u_i \in U_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

(8.17) düsturunun bilavasitə tətbiqi nəticəsində alarıq:

$$f(A) = f\left(\int_{U_1 \times \cdots \times U_n} \chi_A(u_1, ..., u_n)/(u_1, ..., u_n)\right) =$$

$$= \int_V \chi_A(u_1,...,u_n) / f(u_1,...,u_n) \qquad (8.18)$$

(8.18) düsturunun bir çox tətbiqləri zamanı A qeyri səlis altçoxluğun $U_1, U_2, ..., U_n$ çoxluqları üzərində proyeksiya-larından ibarət $A_1, A_2, ..., A_n$ qeyri səlis altçoxluqlarına bax-maq lazım gəlir.

Belə olan halda qəbul edəsəyik ki, A predikatının mənsubluq funksiyası aşağıdakı kimi hesablanır.

$$\chi_A(u_1,u_2,...,u_n) =$$
$$= \chi_{A_1}(u_1) \wedge \chi_{A_2}(u_2) \wedge \cdots \wedge \chi_{A_n}(u_n), \qquad (8.19)$$

harada ki, χ_{A_k}, $k = \overline{1,n}$ A_k predikatlarının mənsubluq funk-siyalarıdır.

(8.19) düsturu ancaq o halda mümkündür ki, A predikatı $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ Dekart hasili üzərində $A_1, A_2, ..., A_n$ proyeksiyalarının düz hasili olsun.

Misal 4. Tutaq ki,

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 2+3+4+5 \\ U_2 = 5+6+7+8+10 \end{array}\right\} \qquad (8.20)$$

$$A = A_1 \times A_2, \quad U = U_1 \times U_2$$

və

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \textbf{òÿãðèáÿí} \;\; 3 = 1/3 + 0\cdot8/2 + 0\cdot9/4, \\ A_2 = \textbf{òÿãðèáÿí} \;\; 7 = 1/7 + 0\cdot8/6 + 0\cdot7/8. \end{array}\right\} \qquad (8.21)$$

ρ münasibətini $\rho(u_1,u_2) = u_1 \odot u_2$ adi vurma əməli kimi qəbul etsək, onda (8.21) düsturundan istifadə edərək alarıq:

$$\mathbf{3} \times \mathbf{7} = (1/3 + 0\cdot8/2 + 0\cdot9/4) \odot (1/7 + 0\cdot8/6 + 0\cdot7/8) =$$
$$= 1/21 + 0\cdot8/18 + 0\cdot7/24 + 0\cdot8/14 + 0\cdot8/12 + 0\cdot7/16 +$$
$$+ 0\cdot9/28 + 0\cdot8/24 + 0\cdot7/32 = 0\cdot8/12 + 0\cdot8/14 + 0\cdot7/16 +$$

$$+0\cdot 8/18+1/21+0\cdot 8/24+0\cdot 9/28+0\cdot 7/32\,. \qquad (8.22)$$

Burada

$$\chi_A(u_1,u_2)=\chi_{A_1}(u_1)\wedge\chi_{A_2}(u_2)=\min(\chi_{A_1}(u_1),\chi_{A_2}(u_2))$$

düsturu ilə hesablanmışdır.

(8.22) düsturundan alarıq ki,

$$V=12+14+16+18+21+24+28+32\,.$$

Beləliklə, **təqribən** 3 və **təqribən** 7 qeyri səlis ədədlərin hesabi hasili (8.22) düsturu ilə ifadə olunan qeyri səlis (qeyri dəqiq) ədəddir.

Ümumi şəkildə tutaq ki, $*$ $U\times U'$ Dekart hasilində təyin olunmuş və qiymətləri V çoxluğundan olan binar əməldir. Belə ki, $u\in U,\ u'\in U'$ olduqda $\upsilon=u*u',\ \upsilon\in V$. Fərz edək ki, A və B uyğun olaraq U və U' çoxluqlarının qeyri səlis altçoxluqlarıdır:

$$A=\chi_1u_1+\chi_2u_2+\cdots+\chi_nu_n\,, \qquad (8.23)$$

$$B=\chi_1'u_1'+\chi_2'u_2'+\cdots+\chi_m'u_m'\,. \qquad (8.24)$$

Ümumiləşmə prinsipindən və həm də (8.24) düsturundan istifadə edərək A və B qeyri səlis altçoxluqları üçün $*$ əməlini aşağıdakı kimi təyin edək.

$$A*B=\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_iu_i\right)*\left(\sum_{k=1}^{m}\chi_j'u_j'\right)=\sum_{i,j}(\chi_i\wedge\chi_j')(u_i*u_j')\,. \qquad (8.25)$$

Qeyd edək ki, (8.23) düsturu (8.24) düsturunun istənilən A və B qeyri səlis altçoxluqları üçün ümumiləşməsindən iba-rətdir.

§ 9. Linqvistik dəyişənin formal tərifi

Yuxarıda, §3-də linqvistik dəyişəni qeyri-formal tərif edərək qeyd etdik ki, belə dəyişənin aldığı qiymətlər adi dəyişəndən fərqli olaraq hər hansı təbii və ya qeyri formal qurulmuş süni dilin sözləri və ya cümlələridir. Necə ki, müəyyən bir kəmiyyət xarakterli tədqiqat apararkən işlədi-lən sözlər və cümlələr ədədlərə nisbətən kifayət qədər dəqiq olmur, deməli linqvistik dəyişən anlayışı da tədqiq etdiyimiz obyekti dəqiq deyil, təqribi təsvir etmək imkanı yaradır. Xüsusi halda, linqvistik dəyişənin qiymətləri ilə əlaqələn-dirilən qeyri səlis çoxluğa, universal çoxluğun elementlə-rinin müxtəlif altsinifləri xarakteristikalarının məcmuu kimi baxacağıq.

Məsələn, dilimizdə sifət kimi işlətdiyimiz **gözəl** termini ilə ifadə edilən qeyri səlis çoxluq fərdin xarici görkəminin kompleks cizgilərini əks etdirir. Həmin bu sifətə eyni zamanda **gözəllik** sözü ilə məhdudlaşmış **gözəl** qeyri səlis dəyişənin şərtləndirdiyi qeyri səlis çoxluq kimi baxmaq olar. Bu nöqteyi-nəzərdən **çox gözəl, hədsiz gözəl, fövqəladə gözəl, tamamilə gözəl, gözəl deyil** və s. şəklində kimi qeyri səlis çoxluqlar **gözəl** qeyri səlis çoxluğundan **çox, hədsiz, fövqəladə, tamamilə, yox, deyil** və s. önlük və sonluqların köməyilə alınır. Məhz bu qeyri səlis çoxluqlar **gözəl** qeyri səlis çoxluqla birlikdə **gözəllik** linqvistik dəyişənin qiymətləri rolunu oynayır.

Qeyd edək ki, linqvistik dəyişən və qeyri səlis dəyişən iki müxtəlif və fərqli anlayışlardır. Belə ki, linqvistik dəyişən qeyri səlis dəyişəndən o mənada yüksək tərtibli hesab olu-nur ki, linqvistik dəyişənin qiymətləri qeyri səlis dəyişən-lərdir.

Məsələn, linqvistik dəyişən olaraq **sürət** fiziki kəmiyyətini götürsək, onun linqvistik qiymətləri **sürətli, çox sürətli, hədsiz sürətli, işıq sürətli, kosmik sürətli, az sürətli, zəif sürətli** və s. olacaqdır. Bu qiymətlərdən hər biri qeyri səlis dəyişənin adlarıdır.

Linqvistik dəyişənin başqa bir vacib xüsusiyyəti on-dan ibarətdir ki, o, iki qrammatik qayda ilə səciyyələnir:

a) semantika qaydası – sözlərin məna çalarlarının törədil-məsi qaydası. Başqa sözlə, linqvistik dəyişənin qiymətlərinin mənasını müəyyən edən proseduranın təyin edilməsi;

b) sintaksis qayda – dəyişənin qiymətlərinin adlarını doğu-ran qrammatik forma.

Bu qaydalar linqvistik dəyişənin struktur təsvirinin əsas hissəsini təşkil edir. Bütün bu deyilənlərdən sonra linqvistik dəyişənin formal tərifinin verilməsi alqoritmini müəyyən etmək olar.

Tərif. $(x, T(x), U, S_{sem}, S_{sin})$ beşliyi ilə xarakterizə olunan yığıma linqvistik dəyişən deyilir; burada x -dəyişənin adı, $T(x)$ - x dəyişəninin termlər çoxluğu, yəni x dəyişə-ninin linqvistik qiymətlərinin adları çoxluğudur. Bu qiymət-lərin hər biri, U universal çoxluğun u baza dəyişəninin qiymətləri ilə birlikdə X qeyri səlis dəyişənini təyin edir. S_{sem}-semantik qayda, hər bir qeyri səlis X dəyişəninə onun $S_{sem}(X)$ mənasını qarşı qoyur; başqa sözlə $S_{sem}(X)$ uni-versal U çoxluğunun qeyri səlis altçoxluğudur.

S_{sin}-sintaksis qayda; bu qayda x dəyişəninin X adlarını doğurur. S_{sin}-sintaksis qaydanın doğurduğu X qeyri səlis çoxluğunu **term** adlandırmaq qəbul edilmişdir. Bir sözdən ibarət olan termə *atomar term*, bir-birini tamam-layan (önlük, yaxud sonluq) sözlərdən ibarət olan termə *mürəkkəb term* deyilir.

Mürəkkəb termi təşkil edən ayrı-ayrı komponentlərə *altterm* deyirlər.

Əgər $X_1, X_2, X_3, \dots$ T-də termlərdirsə, onda T çoxluğunu birelementli çoxluqların birləşməsi şəklində

$$T = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots \qquad (9.1)$$

yazacağıq.

X terminin $S_{sem}(X)$ mənası U universal çoxluğun u baza elementləri üzərinə qoyulmuş və X qeyri səlis dəyişənlə şərtlənən məhdudiyyət kimi təyin edilir; yəni,

$$S_{sem}(X) = R(X). \qquad (9.2)$$

Beləliklə, $S_{sem}(X)$ və $R(X)$ yazılışlarının hər birinə U universal çoxluğun X adlandırılmış qeyri səlis altçoxluğu kimi baxmaq olar.

Misal. Məsafə linqvistik dəyişənini götürək:

$x =$ **Məsafə** və $U = \{1, 2, ..., 360\}$.

Məsafə dəyişəninin linqvistik qiyməti $X =$ **uzaq** olsun.

$$T(X) = \textbf{uzaq + çox uzaq + çox çox uzaq +}$$
$$\textbf{+fövqəladə uzaq + hədsiz uzaq + az və ya çox uzaq +}$$
$$\textbf{+uzaq deyil + tamamilə uzaq deyil +} \cdots \qquad (9.3)$$

U universal çoxluğu da

$$U = 1 + 2 + 3 + \cdots + 360 \qquad (9.4)$$

kimi yazmağı şərtləşək.

(9.3) və (9.4) ifadələrində + işarəsi ilə bildiyimiz cəbri toplama əməli deyil, çoxluğun birelementli altçoxluqlarının birləşməsi nəzərdə tutulmuşdur.

(9.3) termlər çoxluğunda, məsələn, **uzaq** atomar term, **az və ya çox uzaq** mürəkkəb termdir, **az və ya çox** alt-termdir.

(9.3) çoxluğunun hər bir termi U universal çoxluğunda qeyri səlis dəyişənin adıdır.

Məsələn, **uzaq** termi ilə şərtlənən R (**uzaq**) məhdudiyyəti **uzaq** linqvistik qiymətin mənasını ifadə edir. Əgər **uzaq** qeyri səlis dəyişən ilə şərtlənmiş məhdudiyyət

$$U = 1 + 2 + 3 + \cdots + 360$$

universal çoxluğun qeyri səlis altçoxluğunu

$$R(\textbf{óçàã}) = \int_{60}^{360} \left(1 + \left(\frac{u - 60}{10} \right)^{-2} \right)^{-1} / u, \quad u \in U \qquad (9.5)$$

şəklində təyin etsək, onda bu qeyri səlis altçoxluğu **uzaq** qeyri səlis dəyişənin mənası hesab etmək olar. (9.5) yazılışı əvəzinə tənliyin sol tərəfini bəzən M (**uzaq**), yaxud, sadəcə olaraq, **uzaq** kimi yazacağıq.

Məsələn, **çox uzaq** qeyri səlis altçoxluğunu

$$R(\textbf{÷î õ óçàã}) = M(\textbf{÷î õ óçàã}) = \textbf{÷î õ óçàã} =$$

$$= \int_{60}^{360} \left(1 + \left(\frac{u-60}{10}\right)^{-2}\right)^{-2} /u, \quad u \in U \qquad (9.6)$$

kimi göstərmək olar.

Bu halda X linqvistik dəyişəni üçün təyinat tənliyi belə olar:

$X = T(x)$-də term= S_{sin} qramatikasının doğurduğu ad. (9.7)

Buradan alarıq ki, X termi üçün təyinatın mənası

$$S_{\text{sem}}(X) = R(T(x) - \text{äÿ òåðì}) \qquad (9.8)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Başqa sözlə X terminin mənası onun qiymətinə semantik qaydanın tətbiqi yolu ilə alınır.

Qeyd 1. Gələcəkdə (9.7) təyinat tənliyini bir qədər sadə şəkildə

$$x = T(x) - \text{äÿ ad} \qquad (9.9)$$

kimi yazacağıq. Məsələn, əgər $x =$ **məsafə, uzaq** isə $T(x)$-də termdirsə, onda

Məsafə=uzaq (9.10)

kimi yazıb özünü də belə başa düşəcəyik ki, **uzaq** u baza dəyişənin qiymətləri üzərinə (9.5) şəklində qoyulmuş məhdudiyyət olmaqla **məsafə** linqvistik dəyişənin təyinatıdır.

Qeyd 2. Nəzərə almaq lazımdır ki, (9.10) tənliyindəki bərabərlik işarəsi klassik hesabda olduğu kimi simmetrik deyil. Belə ki, **uzaq=məsafə** yazılışı mənasızdır.

Linqvistik dəyişən anlayışını daha bir sadə misal üzərində nümayiş etdirək.

Misal. Tutaq ki,

$$x = \textbf{êöòëÿ} \qquad (9.11)$$

ümumi adla verilmiş linqvistik dəyişənin termləri çoxluğu

$$T(x) = T(\textbf{êöòëÿ}) = \textbf{az} + \textbf{az deyil} + \textbf{÷î õ deyil} + \textbf{÷î õ} \qquad (9.12)$$

kimi dörd elementdən ibarətdir. U universal çoxluq

$$U = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 \qquad (9.13)$$

kimi olsun. Aydındır ki, $T(\textbf{êöòëÿ})$ çoxluğunun hər bir termi U universal çoxluğun u baza elementlərinin qiyməti üzə-rinə qoyulmuş məhdudiyyəti ifadə edir və bu məhdudiy-yətlərin hər biri U çoxluğunun qeyri səlis altçoxluğudur.

Fərz edək ki, bu qeyri slis altçoxluqlar aşağıdakı kimi təyin olunurlar.

$$\textbf{az} = 0.3/1 + 0.6/3 + 0.5/2 + 0.1/5, \qquad (9.14)$$

$$\textbf{az deyil} = 0.2/1 + 0.4/2 + 0.3/4 + 0.5/8, \qquad (9.15)$$

$$\textbf{÷î õ deyil} = 0.5/1 + 0.6/3 + 0.7/5 + 0.9/8 + 1/9, \qquad (9.16)$$

$$\textbf{÷î õ} = 0.3/3 + 0.7/5 + 0.9/8 + 0.8/9 + 1/10. \qquad (9.17)$$

Beləliklə, məsələn, **az deyil** termi üçün alarıq:

$$R(\textbf{az deyil}) = M(\textbf{az deyil}) =$$
$$= 0.2/1 + 0.4/2 + 0.3/4 + 0.5/8. \qquad (9.18)$$

Analoji olaraq digər termlər üçün də (9.18) kimi göstərişlər alarıq. (9.18) bərabərliyinin mənası ondan ibartdir ki, **az deyil** termi, **kütlə** linqvistik dəyişənin qiymətindən ibarət qeyri səlis dəyişənin adıdır. Ona görə də **kütlə** linqvistik dəyişənin **az deyil** kimi qiymətinin təyinat tənliyini

$$\textbf{Êöòëÿ = az deyil} \qquad (9.19)$$

şəklində yazasağıq.

§ 10. Strukturlanan linqvistik dəyişən

Yuxarıda göstərdiyimiz misalda term çoxluq ancaq dörd elementdən ibarət idi. Ona görə də $T(x)$ term çox-luğun hər bir elementilə onun mənası arasındakı uyğun-luğu birbaşa göstərə bilirdik. Ancaq ümumi halda, $T(x)$-in elementləri sayı kifayət qədər böyük, hətta sonsuz ola bilər. Belə olduqda $T(x)$ çoxluğunun elementlərinin törədilməsini və onların mənasının

təsvirini adi qayda ilə vermək müm-kün olmur, ona görə də alqoritmik göstərişlərdən istifadə et-
mək zərurəti yaranır.

Əgər $T(x)$ term çoxluğunun hər bir elementinə onun mənasını qarşı qoyan S_{sem} funksiyası alqoritmik verilərsə, onda deyirlər ki, x linqvistik dəyişəni strukturlanmışdır.

Bu halda, aydındır ki, linqvistik dəyişənin struktur-lanması ilə əlaqədar sintaksis və semantik qaydalara $T(x)$ çoxluğunun elementlərinin törədilməsi və mənasının tapıl-ması alqoritmi kimi baxmaq olar.

Bundan sonrakı işlərimizdə baxılan linqvistik dəyi-şəni strukturlanmış hesab deyəcəyik.

Misal. Deyilənləri aşağıdakı nümunə üzərində nüma-yiş etdirək.

Ümumi adı **dad** olan linqvistik dəyişənin $T(\mathbf{dad})$ çoxluğunu aşağıdakı kimi təyin edək:

$$T(\mathbf{dad}) = \mathbf{şirin} + \textbf{÷î õ øèðèí} + \textbf{÷î õ ÷î õ øèðèí} + \\ + \cdots + \textbf{÷î õ ÷î õ}\ldots\textbf{÷î õ øèðèí} + \cdots. \qquad (10.1)$$

Göründüyü kimi bu misalda $T(\mathbf{dad})$ term çoxluğun hər bir termi **şirin** yaxud **çox çox…çox şirin** şəklindədir. $T(\mathbf{dad})$ çoxluğunun hər bir term elementinin **şirin** termin-dən düzəldilməsi qaydasını müəyyən etmək üçün aşağıdakı
kimi hərəkət edək.

Tutaq ki, $x_1x_2x_3\ldots x_n$ ifadəsi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ simvolların göstərilən ardıcıllıqla yazılışıdır. Məsələn, $n = 2$ olduqda və

$$x_1 = \textbf{÷î õ},\ x_2 = \textbf{øèðèí} \ \text{ isə } \ x_1x_2 = \textbf{÷î õ øèðèí}.$$

Əgər X və Y aşağıdakı kimi verilərsə:

$$X = x_1 + x_2 + \cdots, \qquad (10.2)$$

$$Y = y_1 + y_2 + \cdots, \qquad (10.3)$$

o halda

$$XY = (x_1 + x_2 + \cdots)(y_1 + y_2 + \cdots) = \sum_{i,j} x_i y_j \, . \qquad (10.4)$$

Məsələn, $X = \textbf{÷îõ ÷îõ}$, $Y = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ øèðèí}$ şəklində isə onda

$$XY = \textbf{÷îõ ÷îõ} \ (\textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ øèðèí}) =$$

$$= \textbf{÷îõ ÷îõ øèðèí} + \textbf{÷îõ ÷îõ ÷îõ øèðèí} \, . \qquad (10.5)$$

Bu cür işarələmələrdən istifadə edərək $T(\textbf{dad})$ üçün (10.5) göstərilişinə

$$T = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ}\, T \qquad (10.6)$$

tənliyinin həlli kimi baxmaq olar.

(10.6) tənliyi göstərir ki, T çoxluğu **şirin** termi ilə T-dən olan hər hansı termlə **çox** sözünün birləşməsindən təşkil edilmişdir.

$$T^{k+1} = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ}\ T^k, \ k = 0,1,2,... \qquad (10.7)$$

rekurent düsturlarından istifadə etməklə (10.6) tənliyini iterasiya qaydası ilə həll etmək olar.

Doğrudan da başlanğıc çoxluq olaraq θ boş çoxluğu qəbul etsək, onda

$$\left.\begin{array}{l} T^0 = \theta, \\ T^1 = \textbf{øèðèí}, \\ T^2 = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ øèðèí}, \\ T^3 = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ øèðèí} + \textbf{÷îõ ÷îõ øèðèí}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (10.8)$$

Ümumiyyətlə,

$$T = T^{\infty} = \textbf{øèðèí} + \textbf{÷îõ øèðèí} + \textbf{÷îõ ÷îõ øèðèí} +$$

$$+ \textbf{÷îõ ÷îõ ÷îõ øèðèí} + \cdots \qquad (10.9)$$

ifadəsi (10.6) tənliyinin həlli olacaqdır. Baxdığımız misalda sintaksis qayda (10.6) tənliyi və onun (10.9) həlli şəklində ifadə olunur.

O ki, qaldı semantik qaydaya, **dad** linqvistik dəyişəni üçün **çox çox…çox şirin** şəklində termin mənasını bilmək üçün **şirin** terminin və **çox** önlüyünün (modifikatorunun) mənasını bilmək lazım gəlir. Hansı ki, **şirin** ilkin term rolu oynayır, onun mənası əvvəlcədən məlum olur, **çox** modifikatoru isə linqvistik qeyri-müəyyənlik kimi təsir edir; başqa sözlə özündən sonra gələn termin mənasını izah edən modifikatordur. Əgər belə təqribi qərar qəbul etsək ki, **çox şirin=şirin**^{2}**, çox çox şirin=şirin**^{3} və s., onda **dad** linqvistik dəyişəni üçün semantik qayda aşağıdakı kimi olar.

$$S_{sem}(\text{÷î õ ÷î õ ÷î õ} \cdots \text{÷î õ øèðèí}) = \text{øèðèí}^{\,n+1}. \qquad (10.10)$$

Burada n $\text{÷î õ ÷î õ} \cdots \text{÷î õ øèðèí}$ terminə daxil olan **çox** operatorlarının sayı, $S_{sem}(\text{÷î õ ÷î õ} \cdots \text{÷î õ øèðèí})$ isə mötərizə daxilindəki termin mənasıdır.

§ 11. Bul linqvistik dəyişəni

Tərif. Əgər linqvistik dəyişənlərin X termlər çox-luğu X_p, qX_p yaxud qX şəklində Bul ifadələrindən ibarət olarsa, onda belə dəyişənlərə Bul linqvistik dəyişənləri deyilir. Burada q-linqvistik qeyri müəyyənlik, X_p-ilkin term, qX- q linqvistik qeyri müəyyənliyin X terminə təsiri nəticəsində alınan qeyri səlis çoxluğun adıdır. Adətən belə dəyişənlər sonlu sayda ilkin termlərə **qeyri müəyyənliklərin, və, yaxud** bağlayıcılarının, habelə **deyil** inikarının tətbiqi nəticəsində alınır.

Məsələn, insanların yaşını **gənc, cavan, orta yaşlı, qoca, çox qoca** və s. təsnifata bölürlər. Bu o deməkdir ki, əgər Bul linqvistik dəyişəni olaraq **yaş** sözünü götürsək, onda onun term çoxluğu

$$\begin{aligned} T(\text{éàø}) &= \text{ýÿí ú} + \text{úàâàí} + \text{qoca} + \text{çox gənc} + \\ &+ \text{çox çox úàâàí} + \text{úàâàí deyil} + \text{qoca deyil} + \\ &+ \text{çox úàâàí deyil âÿ çox qoca deyil} + \\ &+ \text{tamamilə cavan} + \text{hədsiz qoca} + \cdots \end{aligned} \qquad (11.1)$$

şəklində olacaqdır.

Burada $X_p -$ **gənc** yaxud $X_p -$ **cavan**, $q -$ **çox** yaxud $q -$ **hədsiz** və s. şəklində Bul ifadələridir. Misal üçün, **çox úàâàí** $= qX_p$, **tamamilə qoca** $= qX$ və i.a.

Təbii dilimizdə işlətdiyimiz bir çox sözləri və cümlələri Bul cəbrində işlətdiyimiz ifadələr şəklinə köçürmək mümkün olduğundan Bul dəyişənləri ilə işləmək xüsusilə, əlverişlidir. Fikirimizi üç dənə ilkin term və iki dənə qeyri müəyyənlik iştirak edən aşağıdakı sadə misalla izah edək.

Misal. Tutaq ki, **yaş** Bul linqvistik dəyişənin termlər çoxluğu aşağıdakı kimidir:

$$T(\textbf{éàø}) = \textbf{ýÿí ú} + \textbf{ýÿí ú deyil} + \textbf{úàâàí} +$$
$$+\textbf{çox úàâàí} + \textbf{qoca} + \textbf{ùÿäñèç qoca} + \cdots.$$

Burada ilkin termlər **gənc, cavan** və **qoca,** qeyri müəyyənliklər isə **çox** və **hədsiz**dir.

Əgər burada **və** bağlayıcısını kəsişmə ilə, **yaxud** bağlayıcısını birləşmə, **deyil** sonluğunu tamamlayıcı ilə eyniləşdirsək, eyni zamanda **çox** və **hədsiz** qeyri müəyyənliklərini ilkin termlərə tətbiq edilmiş xətti operatorlar qəbul etsək, onda **yaş** linqvistik dəyişənin qiymətlərinin mənasını hesablamaq olar.

Misal üçün,

$$\left.\begin{array}{l} S_{sem}(\textbf{gÿnc deyil}) = \neg\,\textbf{ýÿí ú} \\ S_{sem}(\textbf{÷î õ úàâàn deyil}) = \neg(\textbf{úàâàn}^2) \\ S_{sem}(\textbf{÷î õ úàâàn deyil âÿ ÷î õ ãî úà äåéèë}) = \\ = \neg(\textbf{úàâàn}^2) \cap \neg(\textbf{qocà}^2) \\ S_{sem}(\textbf{gÿnc yaxud cavan}) = \textbf{ýÿí ú} \cup \textbf{cavan} \end{array}\right\} \qquad (11.2)$$

kimi göstərə bilərik.

(11.2) tənlikləri, əslində mürəkkəb termlərin məna-sını onun ilkin təşkiledici termlərinin mənasının Bul funksi-yaları vasitəsilə ifadə edir.

Belə ki, əgər **gənc, cavan** və **qoca** termlərini aşağıdakı kimi təyin etsək

$$\textbf{gÿnc} = \int_0^{20} 1/u + \int_{20}^{30} \left(1+\left(\frac{u-20}{5}\right)^2\right)^{-1} /u \qquad (11.3)$$

$$\textbf{cavan} = \int_{30}^{50} \left(1+\left(\frac{u-30}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} /u, \qquad (11.4)$$

onda

S_{sem}(**gÿnc yaxud cavan**) =

$$= \int_0^{20} 1/u + \int_{20}^{30} \left(1+\left(\frac{u-20}{5}\right)^2\right)^{-1} /u \vee \int_{30}^{50} \left(1+\left(\frac{u-30}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} /u \qquad (11.5)$$

olduğunu alarıq.

Bu misalda linqvistik dəyişənə tətbiq olunmuş **çox** və **hədsiz** kimi qeyri müəyyənliklər linqvistik dəyişənin qiymətlərinə təsir edən xətti operator rolunu oynayır. Bunlar-dan əlavə **tamamilə, fövqəladə, az və ya çox** və s. kimi qeyri müəyyənliklərin təsir mexanizmləri bir qədər mürəkkəb olmaqla, adətən, tətbiq olunan termin qiymətini müəyyən qədər təqribi hesablamağa imkan verir.

Məsələn, **az və ya çox** operatoru $X =$ **cavan** terminin qeyri səlisliyini (qeyri dəqiqliyini) artıran operator kimi təsir edir. Doğrudan da əgər $X =$ **qoca** termi

$$\textbf{qoca} = \int_{60}^{90} \left(1+\left(\frac{u-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} /u \qquad (11.6)$$

şəklində ifadə olunarsa, onda

$$\textbf{az və ya çox qoca} = \int_{60}^{90} \left(1+\left(\frac{u-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.5} /u \qquad (11.7)$$

kimi təyin olunar.

Bəzi hallarda termlərə tətbiq edilmiş qeyri müəyyənliklər böyüdən və ya kiçildən operatorlar rolu oynayırlar. Məsələn, tutaq ki, **məsafə** linqvistik dəyişəninin **yaxın** ilkin termi ilə verilmiş qeyri səlis çoxluğun mənsubluq funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\textbf{yaxın} = 0\cdot 7/\text{Gəncə} + 0\cdot 8/\text{Şəki} + \\ +0\cdot 6/\text{Şamaxı} + 0\cdot 3/\text{Bakı}. \qquad (11.8)$$

Burada U universal çoxluq olaraq

$$U = \text{Gəncə} + \text{Şəki} + \text{Şamaxı} + \text{Bakı}$$

götürmüşük. Əgər kiçildən operatoru F, bu operatorun nüvəsini $K(u)$ ilə işarə etsək, onda

$$K(u) = F(1/u\,; K)$$

kimi təyin edə bilərik.

(11.8)-dən görünür ki, K nüvəsi üçün

$$\left.\begin{aligned} &K(\text{Gəncə}) = 1/\text{Gəncə} + 0\cdot 5/\text{Şəki}, \\ &K(\text{Şəki}) = 1/\text{Şəki} + 0\cdot 5/\text{Şamaxı}, \\ &K(\text{Şamaxı}) = 1/\text{Şamaxı} + 0\cdot 4/\text{Şəki} + 0\cdot 3/\text{Bakı}. \end{aligned}\right\}(11.9)$$

Bu halda

$$F(\textbf{éàõű}\ ; K) = \int_U \chi_{\textbf{éàõű}}(u) K(u), \quad u \in U \qquad (11.10)$$

yaxud bir qədər açıq şəkildə

$$F(\textbf{éàõű}\ ; K) = 0\cdot 7(1/\text{Gəncə} + 0\cdot 5/\text{Şəki}) +$$
$$+0\cdot 8(1/\text{Şəki} + 0\cdot 6/\text{Şamaxı}) +$$
$$+0\cdot 3(1/\text{Şamaxı} + 0\cdot 4/\text{Şəki}) + 0.3/\text{Bakı} =$$
$$= 0\cdot 7/\text{Gəncə} + 0\cdot 8/\text{Şəki} + 0\cdot 48/\text{Şamaxı} + 0\cdot 3/\text{Bakı}.$$

§ 12. Qeyri səlis predikat anlayışı

Klassik məntiqdən məlum olan predikat anlayışını qeyri səlis məntiq üçün də ümumiləşdirək.

Tutaq ki, $U_1, U_2, ..., U_k$ verilmiş universal çoxluqlar

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \qquad (12.1)$$

onların k-qat Dekart hasilidir.

Tərif. U Dekart hasilinin hər hansı qeyri səlis altçoxluğuna k yerli qeyri səlis predikat və ya k-ar qeyri səlis münasibət deyilir.

Əgər k-yerli predikatı R-lə, onun elementlərinin R qeyri səlis çoxluğa mənsubluq funksiyasını χ_R-lə işarə et-sək, onda

$$R = \int\limits_{U_1 \times \cdots \times U_k} \chi_k(u_1, ..., u_k) / (u_1, ..., u_k) \qquad (12.2)$$

yaza bilərik; burada $\int$ işarəsi qeyri səlis birelementli

$$\chi_k(u_1, ..., u_k) / (u_1, ..., u_k)$$

çoxluqların birləşməsini göstərir.

Xüsusi halda $k = 2$ götürsək ikiyerli predikat və ya binar münasibət alarıq. İkiyerli predikatlara (binar münasibətlərə) nümunə olaraq, məsələn, u_1 **çox böyükdür** u_2, u_1 **oxşardır** u_2, u_1 **münasibətdədir** u_2, u_1 **yaxındır** u_2, u_1 **çox şirindir** u_2 və s. predikatları (münasibətləri) göstərmək olar.

Misal.

$$U_1 = U_2 = \{\text{í àáàò, õóðì à, øÿêÿð, áàë}\}$$

universal çoxluqların Dekart hasilində u_i **çox şirindir** u_j ikiyerli predikatı (binar münasibəti) $R(u_i, u_j)$ $i, j = \overline{1,4}$ ilə işarə edək. Yəni,

$$R(u_i, u_j) = u_i \text{ **çox şirindir** } u_j. \qquad (12.3)$$

Fərz edək ki, U çoxluğunun elementləri **şirinliyinə** görə aşağıdakı kimi nizamlanmışdır: nabat, xurma, şəkər, bal. (12.3) şəklində təyin edilmiş $R(u_i, u_j)$ qeyri səlis predi-katının $\chi_k(u_i, u_j)$ $(i, j = \overline{1,4})$ mənsubluq funksiyasını aşağı-dakı cədvəllə təyin edək.

R	**nabat**	**xurma**	**şəkər**	**bal**
nabat	**0**	**0·2**	**0·4**	**1**
xurma	**0**	**0**	**0·3**	**0·6**
şəkər	**0**	**0**	**0**	**0·5**
bal	**0**	**0**	**0**	**0**

(12.4)

Burada $\chi_k(u_i, u_j)$ i-ci sətr və j-cu sütunun kəsişməsində yerləşən ədəddir.

Məsələn, χ_R(şəkər, xurma)=0·6.

İndi $\boldsymbol{U}^2$ Dekart kvadratının cütlər çoxluğunu yazaq: sadəlik üçün nabat, xurma, şəkər, bal sözlərini uyğun olaraq u_1, u_2, u_3, u_4-lə işarə edək və $\boldsymbol{U}^2$ cütlər çoxluğunu düzəldək:

$$\boldsymbol{U}^2 = (u_1, u_1) + (u_1, u_2) + (u_1, u_3) + (u_1, u_4) +$$
$$+(u_2, u_1) + (u_2, u_2) + (u_2, u_3) + (u_2, u_4) +$$
$$+(u_3, u_1) + (u_3, u_2) + (u_3, u_3) + (u_3, u_4) +$$

$$+(u_4,u_1)+(u_4,u_2)+(u_4,u_3)+(u_4,u_4). \qquad (12.5)$$

(12.4) və (12.5)-i (12.2) bərabərliyində nəzərə alsaq, R predikatı üçün alarıq:

$$R=\int_{U_1\times U_2}\chi_k(u_1,u_2)/(u_1,u_2)=0\cdot 2/(u_2,u_2)+0\cdot 4/(u_3,u_1)+$$

$$+0\cdot 3/(u_4,u_2)+1/(u_4,u_1)+0\cdot 6/(u_4,u_2)+0\cdot 5/(u_4,u_3). \qquad (12.6)$$

İndi fərz edək ki, R $U\times V$-də, Q isə $V\times S$-də verilmiş qeyri səlis predikatlardır. Bu halda $U\times S$ Dekart hasilində R və Q qeyri səlis predikatlarının $R\odot Q$ kompozisiyası aşağıdakı kimi təyin olunan qeyri səlis predikata (münasi-bətə) deyəcəyik.

$$R\odot Q=\int_{U\times S}\bigvee_V(\chi_R(u,\upsilon)\wedge\chi_Q(\upsilon,s))/(u,s) \qquad (12.7)$$

(12.7) ifadəsi R və Q qeyri səlis predikatların $R\odot Q$ kompozisiyasının maxminini ifadə edir.

Xüsusi halda, əgər U,V,S sonlu çoxluqlar olarsa, onda $R\odot Q$ kompozisiyasının matrisi R və Q predikat-larının matrislərinin maxmin hasilindən ibarət olacaqdır.

(12.7) bərabərliyindən görünür ki, matrislərin maxmin hasilində toplama və vurma əvəzinə uyğyn olaraq $\vee$ və $\wedge$ əməllərindən istifadə olunur.

Misal. Fərz edək ki, R qeyri səlis predikatının matrisi $R=\begin{bmatrix}0\cdot 4 & 0\cdot 7\\ 0\cdot 5 & 0\cdot 8\end{bmatrix}$, Q qeyri səlis predikatının matrisi

$Q=\begin{bmatrix}0\cdot 6 & 1\\ 0\cdot 3 & 0\cdot 9\end{bmatrix}$ şəklində verilir.

Bu halda R və Q matrislərinin maxmin hasili

$$R \odot Q = \begin{bmatrix} 0\cdot 4 & 0\cdot 7 \\ 0\cdot 5 & 0\cdot 8 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0\cdot 6 & 1 \\ 0\cdot 3 & 0\cdot 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 4 \odot 0\cdot 6 \oplus 0\cdot 7 \odot 0\cdot 3 & 0\cdot 4 \odot 1 \oplus 0\cdot 7 \odot 0\cdot 9 \\ 0\cdot 5 \odot 0\cdot 6 \oplus 0\cdot 8 \odot 0\cdot 3 & 0\cdot 5 \odot 1 \oplus 0\cdot 8 \odot 0\cdot 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \max(\min(0\cdot 4, 0\cdot 6), \min(0\cdot 7, 0\cdot 3)) & \max(\min(0\cdot 4, 1), \min(0\cdot 7, 0\cdot 9)) \\ \max(\min(0\cdot 5, 0\cdot 6), \min(0\cdot 8, 0\cdot 3)) & \max(\min(0\cdot 5, 1), \min(0\cdot 8, 0\cdot 9)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0\cdot 4, 0\cdot 3) & \max(0\cdot 4, 0\cdot 7) \\ \max(0\cdot 5, 0\cdot 3) & \max(0\cdot 5, 0\cdot 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 4 & 0\cdot 7 \\ 0\cdot 5 & 0\cdot 8 \end{bmatrix}$$

matrisindən ibarət olasaq.

II FƏSİL. QEYRİ SƏLİS MƏNTİQ

§ 13. Qeyri səlis məntiqin yaranması

Əsası böyük mütəffəkir Aristotel tərəfindən qoyul-muş, C.Bul, D.Hilbert, A.Çerç, P.Novikov, R.Rassel və s. kimi dünya şöhrətli alimlərin inkişaf etdirdiyi klassik məntiqdə hər bir mülahizə ancaq 0 və ya 1 qiymətini alır. Beləliklə, ənənəvi məntiq təbii və ya süni qurulmuş dilin bütün mülahizələri çoxluğunu $\{0,1\}$ çoxluğuna inikas et-dirir. Başqa sözlə, ətrafımızda baş verən bütün hadisələr, əldə edilmiş məlumatlar, gördüyümüz və duyduğumuz nə varsa ya mütləq doğru, ya da mütləq yalandır.

Bu məntiqin qanununa görə üçüncü hal istisna edilir. Lakin əsası dünya elminin karifeyi adlandırılan L.Zadə tərəfindən qoyulmuş qeyri səlis məntiqə görə, məsələn, X=**əşyanın rəngi** linqvistik dəyişəninin ilkin qiymətləri olaraq **ağ** və **qara** rənglərini qəbul etsək, istifadə etdiyimiz dilin sintaksis qaydası ilə onlardan bir çox yeni sözlər törətmək olar ki, onların külliyatını term çoxluq adlandırıb özünü də T ilə işarə edək.

$T(X)=T($**rəng**$)=$**ağ + çox ağ + çox çox ağ +**
+çox çox çox ağ + kifayət qədər ağ +
+hədsiz ağ +···+ qara + çox qara +
+tamamilə qara + ağ da deyil və qara da deyil +
+ çox ağ deyil və çox qara deyil +···. (13.1)

Əgər bu term çoxluğun hər bir elementinə [0,1] parçasından bir ədədi qarşı qoysaq (bunu biz birgəlik ədədi adlan-dıracağıq), onda **ağ** və **qara** ilkin termlər uyğun olaraq 1 və 0 ədədlərilə, sintaksis qayda ilə düzəldilmiş termlər isə parçanın daxili nöqtələri ilə təsvir ediləcəkdir. Linqvistik dəyişənin köməyilə verilən bu cür şərh bizi qeyri səlis məntiq anlayışına gətirir ki, bu da ikiqiymətli, hətta çoxqiymətli klassik məntiqdən fərqli olmaqla onları xüsusi hal kimi özündə saxlayır.

Beləliklə, qeyri səlis məntiq bizə imkan verir ki, ədədi qiymətlərilə təsvir edilə bilməyən, məsələn, humanitar, sosioloji, tibbi, ictimai, siyasi proseslər və hadisələr haqqında təqribi mühakimə aparaq və əqli nəticə çıxaraq.

Qeyri səlis məntiqin təfərrüatları haqqında ətraflı məlumat almaq üçün əvvəlcə qeyri səlis dəyişən və qeyri səlis çoxluq anlayışlarını bir qədər dəqiqləşdirək.

Tərif 1. $(X,U,R(X,u))$ üçlüyünə qeyri səlis dəyişən deyilir; burada X -dəyişənin adı, U -universal çoxluq, u - U çoxluğu elementlərinin ümumi adı, $R(X,u)$ - u elementi üzərinə qoyulmuş və X -lə şərtlənən qeyri səlis məhdudiyyətdir.

Tərif 2. Tutaq ki, U -universal çoxluq, $\chi_A : U \to [0,1]$ isə hər bir $u \in U$ elementinə [0,1] parçasının $\chi_A(u)$ ədədini qarşı qoyan funksiyadır.

U universal çoxluğun u elementlərindən $\chi_A(u_i)/u_i$ şəklində düzəldilmiş külliyyata U universal çoxluğun qeyri səlis altçoxluğu deyilir və

$$A = \{\chi_A(u_i)/u_i\} = \chi_A(u_1)/u_1 + \\ +\chi_A(u_2)/u_2 + \cdots + \chi_A(u_n)/u_n = \sum_U \chi_A(u)/u \qquad (13.2)$$

kimi işarə edilir; burada $\chi_A(u)$ ədədi $u \in U$ elementinin A altçoxluğuna mənsubluq dərəcəsi adlanır. Bəzən A qeyri səlis altçoxluğunun

$$\int_U \chi_A(u)/u = \chi_1/u_1 + \chi_2/u_2 + \cdots + \chi_n/u_n \qquad (13.3)$$

kimi yazılışından istifadə edilir. Burada $\int$ işarəsi $\chi_A(u)/u$, $u \in U$ birelementli qeyri səlis çoxluqların birləşməsini göstərir.

$\chi_A(u) : U \to [0,1]$ mənsubluq funksiyası hər bir verilmiş U universal çoxluq üçün xüsusi şəkildə təyin olunur;

məsələn,

$$U = 1 + 2 + \cdots + 10 \qquad (13.4)$$

universal çoxluğunda $\chi_A(u): U \to [0,1]$ funksiyasını

$$\chi_A(u) = \int_5^{10} \left(1 + \left(\frac{u-5}{5} \right)^2 \right)^{-1} \qquad (13.5)$$

kimi təyin etsək, onda

$A = \tilde{5} =$ **təqribən** 5 qeyri səlis çoxluğu

$$A = \tilde{5} = 0 \cdot 8 / 4 + 1/5 + 0 \cdot 9/6 \qquad (13.6)$$

şəklində göstərə bilərik. Burada + işarəsi hesabi deyil, birləşməsi birelementli çoxluqların mənasında başa düşülür. Bu yeni anlayış və məlumatlardan sonra qeyri səlis məntiq haqqında söhbətimizi davam etdirə bilərik.

Bir çox proseslər və ya hadisələr var ki, onlar ya korrekt təyin olunmur, yaxud da miqdari təsvirini vermək mümkün deyil. Məsələn, havanın hərarətini termometr deyi-lən fiziki cihazla ölçə bildiyimiz halda, beynəlxalq vəziyyəti müəyyən etmək üçün ixtiyarımızda heç bir ölçü vasitəsi yoxdur və onun haqqında ancaq politoloqların şərhləri əsasında təqribi mühakimə aparmaqla nəticə cıxarmaq olar. Belə məsələlərə aydınlıq gətirmək üçün «u A-dır» və ya onunla eynigüclü olan «u elementi A xassəsinə malikdir» mülahizəsinə baxaq. Burada u-predmetin adı, A isə U universal çoxluğun qeyri səlis altçoxluğunun adıdır. «u A-dır» mülahizəsini u linqvistik dəyişənin A qeyri səlis çox-luğunda qiymətinin təyinatı kimi interpretasiya etmək olar; məsələn,

«Bal şirindir», «X **kəsilməzdir»**,

«Ermənistan təcavüzkardır»

mülahizələrini onlarla eynigüclü olan aşağıdakı kimi təyinat tənlikləri ilə ifadə etmək olar:

Balın dadı = şirin; (13.7)

X **əyrisi = kəsilməz;** (13.8)

Ermənistan dövləti = təcavüzkar. (13.9)

Hər bir «u A-dır» tipli mülahizə iki dənə qeyri səlis altçoxluqla xarakterizə olunur:
a) $M(A)$ - U universal çoxluğun A qeyri səlis altçoxlu-ğunun mənası;
b) Qeyri səlis A çoxluğunun $\upsilon(A) \in V$ kimi işarə edilmiş doğruluq qiyməti.
Burada V çoxluğu olaraq [0,1] parçasını qəbul edəcəyik, yəni V=[0,1]; xüsusi halda klassik ikiqiymətli məntiq üçün

$$V = D + Y = 1 + 0 . \qquad (13.10)$$

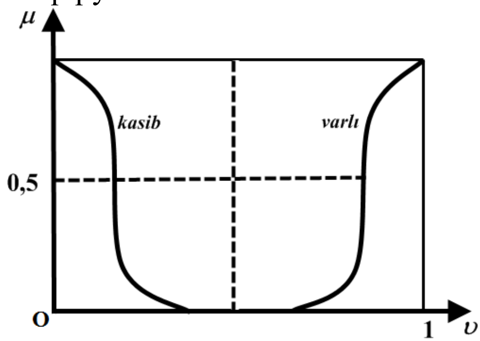
[0,1] parçasından olan, məsələn, $\upsilon(A) = 0 \cdot 6$ ədədini doğruluğun ədədi qiyməti adlandıracağıq. Doğruluğun ədədi qiyməti linqvistik dəyişən üçün baza dəyişəni rolunu oynayır.

Məsələn, fərz edək ki, Bul linqvistik dəyişəninin ümumi adı **zənginlikdir. Varlı** və **kasıb** ilkin termlərini isə onun [0,1] parçasının orta nöqtəsinə nəzərən güzgüvari əksi kimi təyin edək.

Aydındır ki, **zənginlik** linqvistik dəyişəninin term çoxluğu belə olar:

T (**zənginlik**)=**varlı + varlı deyil + çox varlı + çox çox varlı + çox varlı deyil + mükəmməl varlı + hədsiz varlı +···+ kasıb + çox kasıb + çox varlı deyil və çox kasıb deyil +···;**

Bu termlər çoxluğunun elementləri **zənginlik** linqvistik dəyişənlərin doğruluq qiymətləridir.



Şəkil 12.

Əgər universal çoxluq olaraq [0,1] parçasını qəbul etsək, onda aydın olar ki, **varlı** və **kasıb** ilkin termlərin mənası *V*=[0,1] intervalının şəkildə göstərilən mənsubiyyət funksiyaları ilə təsvir olunan qeyri səlis çoxluqlardır (şə- kil 12). Bu halda **varlı** və **kasıb** termlərinin mənsubluq qiymətləri aşağıdakı münasibəti ödəyər:

$$\chi_{\text{êàñûá}}(\upsilon) = \chi_{\text{âàðëû}}(1-\upsilon),\ \ 0 \le \upsilon \le 1. \qquad (13.11)$$

Bəzən universal çoxluq olaraq $V = [0,1]$ parçası deyil, onun

$$V = 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + \cdots + 0\cdot 9 + 1 \qquad (13.12)$$

kimi altçoxluğu götürülür. Belə olan halda **varlı** qeyri səlis çoxluğunu, məsələn, belə təyin etmək olar:

$$\textbf{âàðëû} = 0\cdot 3/0\cdot 5 + 0\cdot 8/0\cdot 9 + 1/1\ , \qquad (13.13)$$

harada ki, hər bir i/j şəklində cütün sol tərəfi birgəlik (mənsubiyyət) funksiyasının qiyməti, sağ tərəfi isə **varlı** terminin V çoxluğundakı qiymətidir. Misal üçün $0\cdot 8/0\cdot 9$ o deməkdir ki, **varlı** termi ilə $0\cdot 9$ doğruluq qiymətinin birgəliyi $0\cdot 8$ -dir.

Məsələn, Amerika, Rusiya, Türkiyə, Ermənistan, Somali dövlətlərinin **varlılıq** meyarlarını

$$V = 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + \cdots + 0\cdot 9 + 1$$

universal çoxluğun uyğun olaraq $1, 0\cdot 8, 0\cdot 7, 0\cdot 2, 0\cdot 1$ elementləri kimi interpretasiya etmiş olsaq, onda uyğun olaraq $1, 0\cdot 6, 0\cdot 9, 0\cdot 3, 0\cdot 1$ birgəlik qiymətlərilə **varlı** terminin qeyri səlis çoxluğunu

$$\textbf{âàðëû} = 1/1 + 0\cdot 8/0\cdot 6 + 0\cdot 7/0\cdot 9 + 0\cdot 2/0\cdot 3 + 0\cdot 1/0\cdot 1 \qquad (13.14)$$

şəklində göstərə bilərik.

§ 14. Doğruluğun linqvistik dəyişəni

Gündəlik fəaliyyətimizdə biz bir qayda olaraq söylənilən mülahizələrin doğruluq meyarını xarakterizə etmək üçün bilavasitə doğru, çox doğru, tamamilə doğru, az və ya çox doğru, yalan, mütləq yalan, tam yalan, hədsiz yalan və s. kimi ifadələr işlədirik. Bu cür ifadələrlə linqvistik dəyi-şənin qiymətləri arasında bənzərlik, bizdə belə bir təssürat yaradır ki, verilmiş mülahizənin doğru və ya yalan olması kifayət qədər yaxşı təyin edilmədiyi hallarda məqsədə- uyğundur ki, **doğruluğu**, ilkin termləri **doğru** və **yalan** qəbul edilən linqvistik dəyişən kimi şərh edək. Həm də nəzərə alaq ki, **doğru** və **yalan** ancaq kənar termlər olmaqla, bu linq-vistik dəyişənin qiymtləri çoxluğu yalnız bir cüt kənar nöq-tələrdən ibarət olmayıb, ilkin termlərdən sintaksis qayda ilə alınan bütün termlər çoxluğudur.

Belə dəyişəni **doğruluğun** linqvistik dəyişəni, onun qiymətlərini isə **doğruluğun** linqvistik qiymətləri adlandıra-cağıq. **Doğruluğun** linqvistik dəyişən kimi şərhi bizi qeyri səlis linqvistik məntiq və ya sadəcə qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsinin qurulmasına gətirir. Yeni quracağımız mən-tiq nəzəriyyəsi ənənəvi ikiqiymətli və hətta çoxqiymətli mən-tiqdən fərqlidir.

Bu qeyri səlis məntiqin əsasında təxmini mühaki-mələr durur; başqa sözlə, elə mühakimə formaları ki, onla-rın doğruluq qiymətləri və çıxarılış qaydaları dəqiq deyil, təqribidir, qeyri səlisdir.

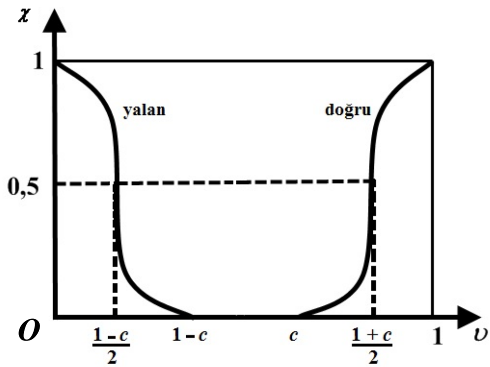
Təqribi mühakimələr bir qayda olaraq insanların korrekt təyin edə bilmədiyi və ya miqdarı təsvirə tabe ol-mayan mühakimələrə bənzəyir. Doğrudan da, əksər hallar-da mürəkkəb vəziyyətlərdə insanların apardıqları mühaki-mələr öz təbiətinə görə dəqiq deyil, ancaq təqribi xarakterli olur. **Doğruluq** linqvistik dəyişəninin [0,1] parçasından olan (məsələn, $\upsilon(A) = 0 \cdot 6$) qiymətinə doğruluğun ədədi qiyməti deyəcəyik. Doğruluğun ədədi qiymətləri **doğruluq** linqvistik dəyişəninin baza qiymətləri rolunu oynayır.

Doğruluğun linqvistik dəyişənin qiymətlərini doğru-luğun linqvistik qiymətləri adlandırırlar.

Fikirimizi bir qədər dəqiqləşdirmək üçün fərz edək ki, **doğruluq** Bul linqvistik dəyişənin adıdır və **doğru** onun ilkin termi, **yalan** isə **doğru** terminin inkarı deyil, [0,1] par-çasının 0·5 nöqtsinə nəzərən güzgüvari əksi kimi təyin olu-nur. **Doğruluq** linqvistik dəyişənin termlər çoxluğu, aydındır ki,

T(**äî üðóëó ã**) = **äî üðó** + **äî üðó äåéëë** + **÷î õ äî üðó** +
+ **÷î õ ÷î õ äî üðó** + **àç ÷î õ äî üðó** + **ì öòëÿã äî üðó** +
+ **÷î õ äî üðó äåéëë** + ⋯ + **éàëàí** + **÷î õ éàëàí** + **éàëàí äåéëë** +
+ ⋯ + **÷î õ äî üðó äåéëë âÿ ÷î õ éàëàí äåéëë** + ⋯ (14.1)

şəklində olacaqdır; harada ki, bu termlər doğruluq linq-vistik dəyişənin **doğruluq** qiymətlərinin adlarıdır.



Şəkil 13.

Göründüyü kimi **doğru** ilkin terminin mənası [0,1] seqmentinin şəkildə göstərilən kimi mənsubluq funksiyasına malik qeyri səlis altçoxluğudur (bax şəkil 13). Daha dəqiq desək, **doğru** terminə şəkildə göstərilən qeyri səlis çoxluqla məhdudlaşmış qeyri səlis dəyişənin adı kimi baxmaq olar. **Doğru** terminin qiymətinin mənsubluq funksiyasına müm-kün olan yaxınlaşmalardan birini, məsələn, aşağıdakı düs-turla ifadə etmək olar.

$$\chi_{\textbf{doğru}}(\upsilon)=\begin{cases}0, & 0<\upsilon<c\\ 4\left(\dfrac{\upsilon-c}{1-c}\right)^2, & c\le\upsilon\le\dfrac{c+1}{4}\\ 1-2\left(\dfrac{\upsilon-1}{1-c}\right)^2, & \dfrac{c+1}{2}\le\upsilon\le 1.\end{cases}\qquad(14.2)$$

Burada $\upsilon=\dfrac{1+c}{2}$ keçid nöqtəsi, $[c,1]$ intervalı **doğru** qeyri səlis çoxluğun daşıyıcısıdır, **yalan** termi üçün mənsubluq funksiyasının qiyməti isə aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\chi_{\textbf{yalan}}(\upsilon)=\chi_{\textbf{äî üðó}}(1-\upsilon),\ 0\le\upsilon\le 1.\qquad(14.3)$$

Bəzi hallarda sadəlik üçün **doğru** terminin qiymət-lərini $V=[0,1]$ qapalı interval kimi deyil, onun

$$V=0+0\cdot1+0\cdot2+\cdots+0\cdot9+1\qquad(14.4)$$

sonlu alt çoxluğu şəklində göstərmək əlverişli olur.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alsaq **doğru** qeyri səlis çoxluğu, məsələn, belə təyin etmək olar:

$$\textbf{äî üðó}=0\cdot2/0\cdot6+0\cdot4/0\cdot8+0\cdot9/0\cdot9+1/1,$$

haradakı, $0\cdot\alpha/0\cdot\beta$ yazılışı onu göstərir ki, $0\cdot\beta$ doğruluq qiymətinin **doğru** termi ilə birgəliyi $0\cdot\alpha$-ya bərabərdir. Gələcəkdə biz ümumi şəkildə verilmiş belə ifadələrdən istifadə edəcəyik:

$\upsilon(u$ - X Bul linqvistik dəyişəninin linqvistik qiyməti)=
$=\mathscr{F}$ Bul linqvistik dəyişənin linqvistik doğruluq qiyməti. (14.5)

Məsələn, υ(Əli - **ağıllı, talantlı** və **işgüzar**)=**çox doğru deyil** və **çox yalan deyil** münasibətini nəzərdən keçirək. Burada **ağıllı və talantlı və işgüzar** ifadələri X=**qabiliyyət** dəyişəninin linqvistik qiyməti, **çox doğru deyil** və **çox yalan deyil isə** $\mathscr{F}$ doğruluq dəyişənin linqvistik qiymətidir.

(14.5) münasibətini bir qədər sadələşdirilmiş şəkildə

$$\upsilon(X) = F \qquad (14.6)$$

kimi yazmaq olar; harada ki, X - X dəyişəninin linqvistik qiyməti, F - $\mathscr{F}$ dəyişəninin linqvistik qiymətidir.

§ 15. Qeyri səlis məntiqdə məntiqi əlaqələr

Qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsini əsaslandırmaq və onun tətbiq sahələrini genişləndirmək üçün klassik mən-tiqdən bildiyimiz inkar, konyunksiya, dizyunksiya və impli-kasiya əməllərini yalnız ədədi qiymətlər alan mülahizələrə deyil, linqvistik doğruluq qiymətləri alan mülahizələrə tət-biq etməyi bacarmalıyıq. Ona görə də A və B mülahizə-lərinin linqvistik doğruluq qiymətlərini bilərək, onların inkar, konyunksiya, dizyunksiya və implikasiyalarının linq-vistik doğruluq qiymətlərinin hesablanması qaydası ilə tanış olaq. Belə məsələlərin həlli üçün fərz edəcəyik ki, əgər A universal U çoxluğunun qeyri səlis altçoxluğu və $u \in U$ isə, onda aşağıdakı iki hökm eynigüclüdür:

1) u åëåì åí òëí ëí ãåéðèñÿëèñ $\grave{A}$ ÷î õëóüóí à ì ÿí ñóáëóã äÿðÿúÿñè $\chi_A(u)$ - äóð.
2) Ãåéðèñÿëèñ A ï ðåäèêàòû í ûí äî üðóëóã ãèéì ÿòè $\chi_A(u)$ - äóð.

(15.1)

Beləliklə, məsələn, klassik məntiqdə qoyulmuş «A və B mülahizələrinin doğruluq qiymətləri verildikdə $A \wedge B$ mülahizəsinin doğruluq qiyməti necə tapılır?» sualına ana-loji sual qeyri-səlis məntiqdə belə qoyulur: «Əgər u elemen-tinin A və B qeyri səlis çoxluqlarına mənsubluq dərəcəsi məlum olarsa, həmin u elementinin $A \cap B$ çoxluğuna mən-subluq dərəcəsi necə hesablanır?» Əvvəlki sualın savabı klassik məntiqdən məlumdur. O ki, qaldı sonrakı sualın cavabına, burada biz ümumiləşmə prinsipindən istifadə edəcəyik. Bu prinsipin **deyil, və, yaxud, alınır** kimi məntiqi əlaqələrin linqvistik doğruluq qiymətlərinin mənasının aydınlaşdırılmasında xüsusi əhəmiyyəti vardır. Xüsusi halda, əgər «u elementi A xassəsinə malikdir» mülahizəsinin doğruluq qiymətini $\upsilon(A)$ kimi işarə etsək və $\upsilon(A)$ $V=[0,1]$ parçasının hər hansı nöqtəsi isə, onda A **deyil** (yaxud $\rceil A$) mülahizəsinin doğru-luq qiyməti aşağıdakı kimi təyin ediləcəkdir:

$$\upsilon(A\,\textbf{deyil}) = 1 - \upsilon(A)\,. \qquad (15.2)$$

Müqayisə üçün qeyd edək ki, ənənəvi ikiqiymətli məntiqdə, əgər $\upsilon(A)=1$ olarsa, onda $\upsilon(\rceil A)=0$ olacaq.

İndi fərz edək ki, $\upsilon(A)$ $[0,1]$-də nöqtə deyil, həmin parçanın

$$\upsilon(A) = \chi_1/\upsilon_1 + \chi_2/\upsilon_2 + \cdots + \chi_k/\upsilon_k \qquad (15.3)$$

şəklində verilmiş qeyri səlis altçoxluğudur; burada υ_i-lər $[0,1]$ parçasının nöqtələri, χ_i-lər isə onların $\upsilon(A)$ çoxlu-ğuna mənsubluq dərəcəsidir.

Bu halda ümumiləşmə prinsipini (15.2)-yə tətbiq etsək, $\upsilon(A\,\textbf{deyil})$ üçün $[0,1]$ parçasının qeyri səlis altçoxluğu kimi aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\upsilon(A\,\textbf{deyil}) = \chi_1/(1-\upsilon_1) + \chi_2/(1-\upsilon_2) + \cdots + \chi_k(1-\upsilon_k)\,. \quad (15.4)$$

Xüsusi halda, əgər $\upsilon(A) =$ **äî üðó** isə **yalanın** doğruluq qiymətini **éàëàí** $= \upsilon(A\,\textbf{deyil})$ kimi hesablaya bilərik. Məsələn, əgər

$$\upsilon(A) = \textbf{äî üðó} =$$
$$= 0\cdot3/0\cdot4 + 0\cdot8/0\cdot7 + 0\cdot9/0\cdot5 + 1/1 \qquad (15.5)$$

olarsa, onda (15.4) düsturuna görə

$$\upsilon(A\,\textbf{deyil}) = \textbf{éàëàí} =$$

$$= 0\cdot 3/0\cdot 6 + 0\cdot 8/0\cdot 3 + 0\cdot 9/0\cdot 5 + 1/0\,. \qquad (15.6)$$

Qeyd edək ki, qeyri səlis məntiqdə A **deyil** və $\rceil A =$ **éàëàí** qeyri səlis çoxluqları, ümumiyyətlə, fərqlidirlər.

Deməli, (15.3) və (15.4) göstərilişindən fərqli olaraq **doğru** və **doğru deyil** qeyri səlis çoxluqlar üçün fərqli göstərişlər alarıq:

$$\textbf{äî üðó} = \chi_1/\upsilon_1 + \chi_2/\upsilon_2 + \cdots + \chi_k/\upsilon_k \qquad (15.7)$$

olduğu halda,

äî üðó deyil =

$$= (1-\chi_1)/\upsilon_1 + (1-\chi_2)/\upsilon_2 + \cdots + (1-\chi_k)/\upsilon_k. \qquad (15.8)$$

İndi tutaq ki, $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ uyğun olaraq A və B mülahizələrinin doğruluğunun linqvistik qiymətləridir.

Sadəlik üçün $\upsilon(A)$, $\upsilon(B)$-ni $[0,1]$ parçasının nöqtələ-ri hesab edərək aşağıdakı kimi işarələmələrdən istifadə edək.

$$\upsilon(A\ \textbf{âÿ}\ B)\ \text{ÿâÿçäè ÿ}\ \upsilon(A)\wedge\upsilon(B), \qquad (15.9)$$

$$\upsilon(A\ \textbf{éàõóä}\ B)\ \text{ÿâÿçäè ÿ}\ \upsilon(A)\vee\upsilon(B), \qquad (15.10)$$

$$\upsilon(A \Rightarrow B)\ \text{ÿâÿçäè ÿ}\ \upsilon(A)\Rightarrow\upsilon(B), \qquad (15.11)$$

$$\upsilon(A\ \textbf{äåéèë})\ \text{ÿâÿçäè ÿ}\ \rceil\upsilon(A). \qquad (15.12)$$

Onu da qeyd edək ki, $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ $[0,1]$ parçasının daxili nöqtələri olduqda $\rceil, \wedge, \vee$ əməlləri uyğun olaraq vahiddən çıxma, min, max əməllərinə gətirilir (bax.II hissə §5).

Əgər $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ üçün doğruluğun linqvistik qiymətləri aşağıdakı kimi ifadə olunarsa,

$$\upsilon(A) = \alpha_1/u_1 + \alpha_2/u_2 + \cdots + \alpha_k/u_k\,, \qquad (15.13)$$

$$\upsilon(B) = \beta_1/\upsilon_1 + \beta_2/\upsilon_2 + \cdots + \beta_m/\upsilon_m\,, \qquad (15.14)$$

harada ki, $u_i\,(i=\overline{1,k})$ və $\upsilon_j\,(j=\overline{1,m})$ $[0,1]$ parçasının nöqtələridir, α_i, β_j isə onların uyğun olaraq A və B çoxluqla-rına mənsubluq dərəcəsidir.

Onda $\upsilon(A\,\textbf{âÿ}\,B)$-yə ümumiləşmə prinsipini tətbiq edərək, alarıq:

$$\upsilon(A\,\textbf{âÿ}\,B)=\upsilon(A)\wedge\upsilon(B)=$$

$$=(\alpha_1/u_1+\alpha_2/u_2+\cdots+\alpha_k/u_k)\wedge(\beta_1/\upsilon_1+\beta_2/\upsilon_2+\cdots+\beta_m/\upsilon_m)=$$

$$=\sum_{i,j}(\alpha_i\wedge\beta_j)/(u_i\wedge\upsilon_j),\quad (i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}). \qquad (15.15)$$

Beləliklə, A **və** B mülahizələrinin doğruluq qiyməti [0,1] parçasının qeyri səlis altçoxluğu olmaqla, onun daşıyıcısı mənsubluq dərəcəsi $(\alpha_i\wedge\beta_j)$ olan $(u_i\wedge\upsilon_j)$, $(i=\overline{1,k},\, j=\overline{1,m})$ şəklində nöqtələrdən ibarətdir.

Misal. Fərz edək ki, υ $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ aşağıdakı kimi verilir.

$$\upsilon=0+0\cdot1+0\cdot2+\cdots+0\cdot9+1,$$

$$\left.\begin{aligned}&\upsilon(A)=\textbf{äî üðó}=0\cdot6/0\cdot5+0\cdot7/0\cdot9+1/1,\\&\upsilon(B)=\textbf{äî üðu deyil}=0\cdot3/0\cdot2+1/0\cdot1+0\cdot5/0\cdot5+0\cdot1/0\cdot8\end{aligned}\right\}(*)$$

(15.15) bərabərliyindən istifadə etsək alarıq:

$$\upsilon(A\,\textbf{âÿ}\,B)=\textbf{äî üðó}\wedge\textbf{äî üðu deyil}=$$
$$=(0\cdot6/0\cdot5+0\cdot7/0\cdot9+1/1)\wedge$$
$$\wedge(0\cdot3/0\cdot2+1/0\cdot1+0\cdot5/0\cdot5+0\cdot1/0\cdot8). \qquad (15.16)$$

Əgər (15.15)-in sağ tərəfini buraya tətbiq edib və $(\alpha\wedge\beta)=\min(\alpha,\beta)$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$\upsilon(A\,\textbf{âÿ}\,B)=\textbf{äî üðó}\wedge\textbf{äî üðu deyil}=$$
$$=0\cdot3/0\cdot2+1/0\cdot1+0\cdot5/0\cdot5+0\cdot1/0\cdot8=$$
$$=\textbf{äî üðu deyil} \qquad (15.17)$$

olar.

A **yaxud** *B* mülahizəsinin doğruluq qiyməti üçün (15.15)-ə analoji olaraq

$$\upsilon(A\,\textbf{yaxud}\,B)=\upsilon(A)\vee\upsilon(B)=$$

$$= (\alpha_1 / u_1 + \cdots + \alpha_k / u_k) \vee (\beta_1 / \upsilon_1 + \cdots + \beta_m / \upsilon_m) =$$

$$= \sum_{i,j} (\alpha_i \vee \beta_j) / (u_i \vee \upsilon_j) \qquad (15.18)$$

harada ki, $(\alpha \vee \beta) = \max(\alpha, \beta)$ nəzərdə tutulur.

Əgər (15.18) düsturunu (*) ifadələrinə tətbiq etsək, onda

$$\upsilon(A\,\mathbf{yaxud}\,B) = \upsilon(A) \vee \upsilon(B) =$$

$$= \textbf{äî üðó éàõóä äî üðó äåéë} =$$

$$= (0\cdot 6 / 0\cdot 5 + 0\cdot 7 / 0\cdot 9 + 1/1) \vee$$

$$\vee (0\cdot 3 / 0\cdot 2 + 1/0 + 0\cdot 5 / 0 + 1 / 0\cdot 8) =$$

$$= 0\cdot 6 / 0\cdot 5 + 0\cdot 7 / 0\cdot 9 + 1/1 = \textbf{äî üðó} \qquad (15.19)$$

olduğunu alarıq.

$A \Rightarrow B$ mülahizəsinin doğruluq qiyməti $\Rightarrow$ məntiqi əlaqənin ədədi qiymətinin necə təyin edilməsindən asılıdır. Belə ki, $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ [0,1] parçasının nöqtələri olan halda, yəni $\upsilon(A)$ və $\upsilon(B)$ [0,1] parçasının qeyri səlis çoxluğu isə,

$$\upsilon(A \Rightarrow B) = \neg\upsilon(A) \vee \upsilon(A) \wedge \upsilon(B) \qquad (15.20)$$

şəklində qəbul edib, sonra da ümumiləşmə prinsipini tətbiq etsək,

$$\upsilon(A \Rightarrow B) = (\alpha_1 / u_1 + \cdots \alpha_k / u_k) \Rightarrow (\beta_1 / \upsilon_1 + \cdots + \beta_m / \upsilon_m) =$$

$$= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j) / (1 - u_i) \vee (u_i \wedge \upsilon_i) \qquad (15.21)$$

olduğunu alarıq.

§ 16. Qeyri səlis məntiq əməllərinin əsas xassələri

Qeyri səlis məntiq əməllərinin xassələrini öyrənmək üçün əvvəlcə qeyri səlis propozisional dəyişən və qeyri səlis düstur anlayışı verək.

Qeyri səlis propozisional dəyişənlər olaraq $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

işarə edib özlərini də $\alpha = \chi_A(u),\ \beta = \chi_B(u), \gamma = \chi_C(u),...$ şəklində təyin edək. Burada u U universal çoxluğun elementidir. U universal çoxluğun $\alpha = \chi_A(u)$, $\beta = \chi_B(u)$, $\gamma = \chi_C(u)$ mənsubluq funksiyaları ilə təsvir olunan qeyri səlis altçoxluqları uyğun olaraq A, B, C ilə işarə edək. $\alpha, \beta, \gamma, ...$ dəyişənlərinin təyinatından görünür ki, onlar klas-sik məntiqdən fərqli olaraq 0, 1 qiymətindən başqa (0,1) intervalından götürülmüş istənilən qiyməti də ala bilərlər; xüsusi halda, $0 = \chi_{\varnothing}(u), 1 = \chi_E(u)$; burada E ilə vahid çox-luq işarə edilmişdir.

A, B, C qeyri səlis çoxluqların mənsubluq funksiya-ları vasitəsilə $\wedge, \vee$ və $\rceil$ qeyri səlis məntiq əməllərini aşağı-dakı kimi təyin edək.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta), \\ &\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta), \\ &\rceil\alpha = 1 - \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (16.1)$$

İndi isə qeyri səlis düstur anlayışı verək.

Tərif. Aşağıdakı 1)-3) şərtlərini ödəyən obyektlərə və ancaq onlara qeyri səlis düstur deyəcəyik:

1) Qeyri səlis propozisional dəyişənlər düsturlardır.
2) α, β qeyri səlis düsturlar olduqda $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $\rceil\alpha$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ ifadələri qeyri səlis məntiqin düsturlarıdır.
3) Başqa heç bir obyekt qeyri səlis məntiqdə düstur deyil.

Əgər qeyri səlis propozisional dəyişənlərin [0,1] par-çasından götürülmüş istənilən qiymətləri üçün α və β düs-turları eyni olarsa, onda onları eynigüclü qeyri səlis düstur-lar adlandırıb özünü də $\alpha \equiv \beta$ kimi yazacağıq.

İndi qeyri səlis məntiq əməllərinin aşağıdakı xassələ-rini qeyd edək. İstənilən α, β, γ düsturları üçün

$1.\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha,$

$2.\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha,$

$3.(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$

$4.(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$

$5.\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$

$6.\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma),$

$7.\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha,$

$8.\alpha \vee \alpha \equiv \alpha,$

$9.\alpha \wedge 1 \equiv \alpha,$

$10.\alpha \vee 1 \equiv 1,$

$11.\alpha \wedge 0 \equiv 0,$

$12.\alpha \vee 0 \equiv \alpha,$

$13.\overline{\alpha \wedge \beta} \equiv \overline{\alpha} \vee \overline{\beta},$

$14.\overline{\alpha \vee \beta} \equiv \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta},$

$15.\overline{\overline{\alpha}} = \alpha,$

eynigüclülükləri doğrudur.

Lakin klassik məntiqdən fərqli olaraq $\alpha = 0$ və $\alpha = 1$ qiymətlərindən başqa α -nın bütün qiymətlərində

$$16.\alpha \wedge \overline{\alpha} \neq 0; \alpha \vee \overline{\alpha} \neq 1. \qquad (16.2)$$

Bu eynigüclülüklərdən, məsələn,

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

olduğunu isbat edək. Doğrudan da $\wedge$, $\vee$ əməllərinin (16.1) şəklində təyinindən istifadə etsək

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv \min(\alpha, (\beta \vee \gamma)) = \min(\alpha, \max(\beta, \gamma)) =$$
$$= (\min(\alpha, \beta), \max(\min(\alpha, \gamma)) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

İndi isə (16.2) bərabərsizliklərinin doğruluğunu göstərək.

$$\alpha \wedge \overline{\alpha} = \min(\alpha, 1-\alpha) \neq 0, \text{ əgər } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1 \text{ olarsa,}$$

$$\alpha \vee \overline{\alpha} = \max(\alpha, 1-\alpha) \neq 1, \text{ əgər } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1 \text{ olarsa.}$$

Məsələn, xüsusi halda $\alpha = 0 \cdot 3$ götürsək, $\overline{\alpha} = 0 \cdot 7$ olar və ona görə də

$$\alpha \wedge \overline{\alpha} = \min(\alpha, 1-\alpha) = \min(0\cdot 3, 0\cdot 7) = 0\cdot 3 \neq 0,$$

$$\alpha \vee \overline{\alpha} = \max(\alpha, 1-\alpha) = \max(0\cdot 3, 0\cdot 7) = 0\cdot 7 \neq 1.$$

Yada salaq ki, sonuncu bərabərsizliklərdən fərqli olaraq klassik məntiqdə $\alpha \wedge \overline{\alpha} = 0,\ \alpha \vee \overline{\alpha} = 1$ bərabərlikləri doğrudur.

Beləliklə, qeyri səlis məntiq, klassik məntiqdən fərqli olmaqla onu xüsusi hal kimi özündə saxlayır.

§ 17. Səlis və qeyri səlis məntiq əməllərinin əsas təfərrüatları

Klassik məntiq əməlləri ilə qeyri səlis məntiqdə istifadə edilən məntiqi əlaqələr arasındakı mühüm fərqləri izah etmək çox vacibdir.

Bunu, məsələn, mülahizələr məntiqində işlədilən **və** bağlayıcısı ilə termlər çoxluğunda istifadə edilən **və** üçün aydınlaşdıraq.

Ümumi adı **temperatur** olan termin ala biləcəyi linqvistik qiymətlər çoxluğunu T (**temperatur**) kimi işarə edək:

$$T(\textbf{temperatur}) = \textbf{èñòè} + \textbf{÷î õ èñòè} + \textbf{èñòè äåéèë} + \textbf{÷î õ èñòè äåéèë} +$$
$$+ \cdots + \textbf{ñî éóã} + \textbf{ùÿäñèç ñî éóã} + \cdots .$$

Termlər çoxluğundan götürülmüş **isti və isti deyil** termi və klassik məntiqdə istifadə olunan, $\wedge$ simvolu ilə göstərilən **isti** $\wedge$ **isti deyil** mülahizələrini nəzərdən keçirək.

Birinci halda bizi **isti və isti deyil** termlərinin mənası maraqlandırır, eyni zamanda **və** bağlayıcısı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$M(\textbf{èñòè vÿ èñòè äåéèë}) = M(\textbf{èñòè}) \cap M(\textbf{èñòè äåéèë}). \qquad (17.1)$$

İkinci halda isə bizi, əslində, **isti** $\wedge$ **isti deyil** mülahizəsinin

$$\upsilon(A\,\text{âÿ}\,B)=\upsilon(A)\wedge\upsilon(B) \qquad (17.2)$$

düsturu ilə hesablanan doğruluq qiyməti maraqlandırır. Beləliklə, (17.1)-də $\bigcap$ simvolu qeyri səlis çoxluqların kəsişməsini (17.2)-də isə $\wedge$ simvolu mülahizələr üzərində konyuksiya əməlini təsvir edir. Bu müxtəlifliyi aşağıdakı sadə misal üzərində nümayiş etdirək.

Misal. Tutaq ki,

$$V = 0+0\cdot1+0\cdot2+\cdots+0\cdot9+1,$$

A və B isə aşağıdakı kimi təyin edilmiş V çoxluğunun qeyri səlis altçoxluqlarıdır:

$$A = 0\cdot5/0\cdot3+0\cdot8/0\cdot3+0\cdot9/1, \qquad (17.3)$$

$$B = 0\cdot2/0\cdot3+0\cdot5/0\cdot7+1/1. \qquad (17.4)$$

Bu halda

$$A\bigcap B = 0\cdot2/0\cdot3+0\cdot5/0\cdot7+0\cdot9/1, \qquad (17.5)$$

lakin

$$A\wedge B = 0\cdot5/0\cdot3+0\cdot5/0\cdot7+0\cdot9/1. \qquad (17.6)$$

Beləcə də, əgər

$$\textbf{isti} = \chi_1\upsilon_1+\chi_2\upsilon_2+\cdots+\chi_k\upsilon_k \qquad (17.7)$$

kimi verilərsə, onda

$$\textbf{isti deyil} = (1-\chi_1)/\upsilon_1+\cdots+(1-\chi_k)/\upsilon_k, \quad (17.8)$$

$$\rceil(\textbf{isti}) = \chi_1/(1-\upsilon_1)+\cdots+\chi_k/(1-\upsilon_k) \qquad (17.9)$$

şəkildə olacaq. Deməli, bu halda **deyil** operatoru $\rceil$ əməli ilə eyni olmayacaqdır.

Məlumdur ki, ikiqiymətli məntiqdə A və B sadə mülahizələrin doğruluq qiymətləri verildikdə A **və** B, A **yaxud** B, A-dan B **alınır** kimi mürəkkəb mülahizələrin aldıqları doğruluq qiymtlərinə əsasən $\wedge,\vee,\Rightarrow$ binar əməllərin doğruluq cədvəli qurulur.

Ancaq qeyri səlis məntiqdə doğruluq qiymətləri, ümumiyyətlə desək, sonsuz çoxluq olduğundan $\wedge,\vee,\Rightarrow$ əməllərini cədvəllə təyin etmək olmaz.

Lakin lazım gələrsə, məsələn, $\vee$ əməlini,

T = **èñòè** + **èñòèäåéèë** + **÷îõ èñòè** + **äåì ÿê îëàð êè èñòè** +

+**àç âÿ éà ÷îõ èñòè** + $\cdots$ (17.10)

sonlu termlər çoxluğu üçün cədvəlləşdirmək mümkündür. Əgər elə bir cədvəl qursaq ki, onun *i*-ci sətrinin hər bir elementi, tutaq ki, **isti deyil**-in qiyməti, *j*-cu sütunun hər bir elementi **demək olar ki isti**-nin qiymətidir, bu halda

i-ci sətrlə *j*-cu sütunun kəsişməsində yerləşən (*i,j*) yerli element=*i*-ci sərt elementi (**isti deyil**) qiyməti $\vee$ *j*-cu sütun elementi (**demək olar ki istidir**) qiyməti olar. (17.11)

Bu cür qurulmuş cədvəldə **isti** ilkin termindən **deyil** və **demək olar ki** modifikatorlarının köməyilə alınmış (17.11) ifadəsinin sağ tərəfinin qiymətini, (15.15)-dən istifadə edə-rək

èñòèäåéèë $\vee$ **äåì ÿê îëàð êè èñòè** (17.12)

şəklində hesablamaq olar.

Lakin burada çətinlik ondan ibarətdir ki, bir çox hallarda hesablama nəticəsində aldığımız qeyri səlis altçox-luğun doğruluq qiyməti, **isti** dəyişəninin termləri çoxlu-ğunun heç bir terminin doğruluq qiyməti ilə üst-üstə düşməyə bilər. Beləliklə, əgər biz doğruluğun linqvistik qiy-mətini cədvəllə təsvir ediriksə, o zaman cədvəlin (*i, j*) nöm-rəli elementinin təxmini qiymətilə kifayətlənmək məcburiy-yətindəyik. Belə yaxınlaşmanı **linqvistik yaxınlaşma** adlan-dırmaq qəbul olunmuşdur. Dediklərimizi aşağıdakı misal üzərində nümayiş etdirək.

Misal. Fərz edək ki, doğruluğun universal çoxluğu

$$U = 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + \cdots + 0\cdot 1 + 1, \qquad (17.13)$$

isti, az çox isti və **demək olar isti** qeyri səlis altçoxluqları isə aşağıdakı kimi verilir:

isti $= 0\cdot 5/0\cdot 6 + 0\cdot 8/0\cdot 7 + 1/1,$ (17.14)

az ÷îõ èsti $= 0\cdot 7/0\cdot 8 + 0\cdot 8/0\cdot 6 + 1/0\cdot 9 + 1/1,$ (17.15)

äåì ÿê îëàð èsti $= 0\cdot 5/0\cdot 6 + 1/0\cdot 9 + 1/1.$ (17.16)

Qəbul edək ki, $\vee$ məntiqi əlaqə üçün doğruluq cədvəlində *i*-ci sətri **az çox isti** terminin qiymətinə, *j*-cu sütun isə **demək olar isti** terminin qiymətinə uyğundur. Bu halda cədvəlin (*i,j*) nömrəli elementi üçün alarıq:

$$\textbf{az ÷î õ èsti} \vee \textbf{äåì ÿê î ëàð èsti} =$$
$$=(0{\cdot}7/0{\cdot}8+0{\cdot}8/0{\cdot}6+1/0{\cdot}9+1/1)\vee$$
$$\vee(0{\cdot}5/0{\cdot}6+0{\cdot}1/0{\cdot}9+1/1)=$$
$$=0{\cdot}8/0{\cdot}6+1/0{\cdot}9+1/1. \qquad (17.17)$$

(17.14) və (17.17)-nin müqayisəsindən görünür ki, (17.17)-də bərabərliyin sağ tərəfi **isti** terminin doğruluq qiymətilə təqribən üst-üstə düşür. Başqa sözlə

az çox isti $\vee$ demək olar isti=isti.

§ 18. Qeyri səlis impilikasiya

Klassik məntiqdə $\Rightarrow$ simvolu propozisional dəyişən-lər üçün məntiqi əlaqə kimi təyin olunur və $\{0,1\}$ çoxluğu-nun elementlərinə bərabər qiymətlər alır. Belə ki, x və y propozisional dəyişənləri $\{0,1\}$ çoxluğunda dəyişdikdə $\Rightarrow(x,y)$ funksiyası da $\Rightarrow:\{0,1\}\to\{0,1\}$ inikasını yaradır.

Ənənəvi məntiqdə «**Əgər** x, **onda** y» yaxud onunla ekvivalent olan $x\Rightarrow y$ mülahizəsi üçün doğruluq cədvəli bildiyimiz kimi aşağıdakı şəkildədir.

$\Rightarrow$	x	y
x	x	y
y	x	x

Əgər x və y elementlərini uyğun olaraq 1 və 0 ədədləri ilə əvəz etsək, onda yuxarıdakı cədvəli məzmunlu formada aşağıdakı kimi yazarıq.

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Cədvəldən görünür ki, $x = 0$ və $x \Rightarrow y = 1$ olduqda y bir-qiymətli təyin olunmur; məlum deyil ki, y mülahizəsinin doğruluq qiyməti 0 və 1 simvollarının hansına bərabərdir.

Həmçinin də x, y dəyişənləri, məsələn, $\{0,1,2\}$ çoxlu-ğunda dəyişərkən $x \Rightarrow y$ üçün doğruluq cədvəlini aşağıdakı kimi tərtib edək.

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
0	2	1
2	0	0
1	2	0
2	1	1
2	2	1

Yenə də cədvəlin sonuncu iki sətrlərindən görünür ki, $x = 2$, $x \Rightarrow y = 1$ qiymətlərində $y = 1$, yaxud $y = 2$ seçilməsi sual altında qalır. Belə olan halda y dəyişəninə $[0,1]$ parçasın-dan tamamilə müəyyən bir ədədi qarşı qoymaqla «**məlum deyil**»i məluma çevirmək və beləliklə də y-in birqiymət-liliyini təmin etmək olar.

Yuxarıdakı cədvəllərdən göründüyü kimi onlardan **ikincisi birincinin** genişlənməsidir, yəni ikinci cədvəl $\Rightarrow$ əməlini üçqiymətli məntiq üçün ümumiləşdirir.

Aydındır ki, ikiqiymətli məntiqdən üçqiymətli və oradan da çoxqiymətli məntiqə keçid ümumiləşmə prin-sipinin tətbiqi ilə, məhz, qeyri səlis məntiq anlayışına gətirir ki, **məlum deyil-**in doğruluq qiyməti yalnız $\{0,1\}$ çoxluğu olmayıb bütün $[0,1]$ parçasıdır.

Bu yeni məntiqdə də adi hallarda mühakimələr apararkən «əgər x onda y» ifadəsindən istifadə edirik. Lakin burada x və y propozisional dəyişənlər deyil, qeyri səlis çoxluqlar və ya qeyri səlis predikatlar kimi işlədilir.

Məsələn, əgər funksiya **diferensiallanandırsa,** onda o, **kəsilməzdir** mülahizəsini qısa olaraq belə yazmaq olar:

diferensallanan ⇒ kəsilməz.

Burada **diferensiallanan** və **kəsilməz**, mahiyyətcə qeyri səlis çoxluğun adıdır.

Eynilə gündəlik həyatımızda işlətdiyimiz əgər maddə **baldırsa,** onda, o **şirindir** ifadəsində **bal** və **şirin** sözləri qeyri səlis çoxluq rolunu oynayır.

Klassik məntiqdən məlum olan implikasiyanı qeyri səlis çoxluğa ümumiləşdirmək üçün, fərz edək ki, U və V verilmiş universal çoxluqlar (ola bilər ki, eyni), A, B və C uyğun olaraq U, V, V çoxluqlarının qeyri səlis altçoxluqları-dır. Əvvəlcə «**əgər** $\boldsymbol{A}$**, onda** $\boldsymbol{B}$**, əks halda** $\boldsymbol{C}$» mülahizəsinin mənasını izah edək. Aydındır ki, «**əgər** $\boldsymbol{A}$**, onda** $\boldsymbol{B}$» mülahizəsi əvvəlki mülahizənin xüsusi halıdır, çünki ikiqiymətli məntiqdə başqa hal mümkün deyil.

Tərif. Əgər $\boldsymbol{A}$**, onda** $\boldsymbol{B}$**, əks halda** $\boldsymbol{C}$ mülahizəsi $U \times V$ Dekart hasilində aşağıdakı şəkildə təyin olunmuş qeyri səlis binar münasibətə deyilir:

$$\textbf{Əgər } \boldsymbol{A}\textbf{, onda } \boldsymbol{B}\textbf{, əks halda } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \urcorner \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}. \quad (18.1)$$

Başqa sözlə A, B, C uyğun olaraq U, V, V çoxluqlarında qeyri səlis unar münasibətlər olduqda əgər A onda B, əks halda C

mülahizəsi A və B, habelə, $\rceil A$ və C çoxluq-larının Dekart hasillərinin birləşməsindən ibarət $U \times V$ -də təyin edilmiş qeyri səlis binar münasibətdir.

Əgər A, onda B, əks halda $C = A\times B + \rceil A \times C$

ifadəsində C çoxluğu V çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə, bu halda

Əgər A, onda $B = A \times B + \rceil A \times V$ (18.2)

şəklində alarıq. Beləliklə, tərifə görə

Əgər A, onda B, əks halda $V = A \times B + \rceil A \times V$. (18.3)

Deməli, mahiyyətcə **əgər A, onda B, əks halda V mülahizəsi əgər A, onda B, əks halda fərqi yoxdur**

mülahizəsilə ekvivalent interpretasiyalardır.

Qeyd edək ki, A, B, C münasibətləri verildikdə (18.1) bərabərliyini A və B, eləcə də, $\rceil A$ və C-nin cüt-cüt Dekart hasillərinin sətir-vektorları və sütun-vektorlarından düzəl-dilmiş matrislər hasilinin cəmi şəklində göstərmək fayda-lıdır.

Ona görə də

Əgər A, onda B, əks halda $C = [A] \times [B] + [\rceil A] \times [C]$. (18.3)

Misal. Fərz edək ki, universal çoxluqlar

$$U = V = 1 + 2 + 3 + 4,$$

A, B, C qeyri səlis altçoxluqlar isə

Kiçikdir$= A = 0\cdot 1/2 + 0\cdot 3/3$,
Böyükdür$= B = 0\cdot 4/1 + 0\cdot 5/3$,
Böyük deyil$= C = 0\cdot 6/1 + 0\cdot 8/3 + 0\cdot 2/4$

kimi verilir. Bu halda yuxarıda qeyd etdiyimizə əsasən

Əgər A, onda B, əks halda $C = A \times B + \rceil A \times C =$

$$= (0\cdot 1/2 + 0\cdot 3/3) \times (0\cdot 4/1 + 0\cdot 5/3) +$$
$$+(0\cdot 6/1 + 0\cdot 8/3 + 0\cdot 2/4) \times (1/1 + 0\cdot 9/2 + 0\cdot 7/3 + 1/4) =$$
$$= 0\cdot 1/(2,1) + 0\cdot 1/(2,3) + 0\cdot 3/(3,1) + 0\cdot 3/(3,3) + 0\cdot 6/(1,1) +$$
$$+0\cdot 6/(1,2) + 0\cdot 6/(1,3) + 0\cdot 6/(1,4) + 0\cdot 8/(3,1) + 0\cdot 8/(3,2) +$$
$$+0\cdot 7/(3,3) + 0\cdot 8/(3,4) + 0\cdot 2/(4,1) + 0\cdot 2/(4,2) + 0\cdot 2/(4,3) +$$
$$+0\cdot 2/(4,4) = 0\cdot 6/(1,1) + 0\cdot 6/(1,2) + 0\cdot 6/(1,3) + 0\cdot 6/(1,4) +$$
$$+0\cdot 1/(2,1) + 0\cdot 1/(2,3) + 0\cdot 8/(3,1) + 0\cdot 8/(3,2) + 0\cdot 7/(3,3) +$$
$$+0\cdot 8/(3,4) + 0\cdot 2/(4,1) + 0\cdot 2/(4,2) + 0\cdot 2/(4,3) + 0\cdot 2/(4,4).$$

Deməli, baxdığımız misalda **əgər** A**, onda** B**, əks halda** C qeyri səlis implikasiyanı aşağıdakı matris şəklində verə bilərik:

Əgər A**, onda** B**, əks halda** $\boldsymbol{C = [A][B] + [\neg A][C] =}$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 6 & 0\cdot 6 & 0\cdot 6 & 0\cdot 6 \\ 0\cdot 1 & 0 & 0\cdot 1 & 0 \\ 0\cdot 8 & 0\cdot 8 & 0\cdot 7 & 0\cdot 8 \\ 0\cdot 2 & 0\cdot 2 & 0\cdot 2 & 0\cdot 2 \end{bmatrix}. \qquad (18.4)$$

Qeyd. (18.2) bərabərliyinə diqqət yetirsək görərik ki, əgər biz $\neg A \times B \subset \neg A \times V$ olduğunu nəzərə alsaq, onda (18.2)-ni

Əgər A**, onda** $\boldsymbol{B = A \times B + \neg A \times B + \neg A \times V =}$

$$\boldsymbol{= (A + \neg A) \times B + \neg A \times V} \qquad (18.5)$$

olduğunu alarıq.

Burada A U çoxluğunun adi altçoxluğu olduqda

$$A + \neg A = U \qquad (18.6)$$

olduğu üçün

Əgər A**, onda** $\boldsymbol{B = U \times B + \neg A \times V}$ (18.7)

şəklində ifadə edə bilərik.

A və B propozisional dəyişənlər olduqda (18.7) bərabərliyi formaca klassik məntiqdən məlum olan

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \qquad (18.8)$$

düsturuna analojidir.

§ 19. Ümumiləşmiş modus ponens qaydası

Ənənəvi məntiqdə istifadə edilən, ən çox tətbiqi əhəmiyyətə malik çıxarılış qaydasını yada salaq. A və $A \Rightarrow B$ mülahizələri doğrudursa, onda B mülahizəsi də doğrudur. Yəni

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \models B. \qquad (19.1)$$

Bu qaydanı qeyri səlis məntiqə köçürmək üçün tutaq ki, A_1, A_2 və B uyğun olaraq U, U və V çoxluqlarının qeyri səlis altçoxluqlarıdır. Əlavə olaraq fərz edək ki, A_1 altçox-luğu üzərinə

$$A_1 = R(u), u \in U, \qquad (19.2)$$

$A_2 \Rightarrow B$ münasibəti üzərinə isə

$$A_2 \Rightarrow B = R(u,\upsilon), \quad u \in U, \upsilon \in V \qquad (19.3)$$

məhdudiyyət şərtləri qoyulmuşdur.

Göstərək ki, (19.2) və (19.3) tənliklərini υ üzərinə qoyulmuş məhdudiyyət şərtinə görə aşağıdakı kimi həll etmək olar.

$$R(\upsilon) = A_1 \odot (A_2 \Rightarrow B), \qquad (19.4)$$

burada $\odot$ kompozisiyanı ifadə edir.

(19.4) bərabərliyini isbat etmək üçün tutaq ki, U və V baza dəyişənləri uyğun olaraq u və υ olan universal çoxluqlar, $R(u), R(u,\upsilon), R(\upsilon)$ isə uyğun olaraq $U, U \times V$ və V-də təyin olunmuş qeyri səlis münasibətlər üzərinə qoyul-muş məhdudiyyət şərtləridir.

Bu halda kompozisiya çıxarılış qaydası təsdiq edir ki,

$$\left.\begin{array}{l} R(u) = A, \\ R(u,\upsilon) = B \end{array}\right\} \qquad (19.5)$$

təyinat tənliklərinin həlli

$$R(\upsilon) = A \odot B \qquad (19.6)$$

şəklində olar.

Bu halda deyirlər ki, $R(\upsilon)$ $R(u) = A$ və $R(u,\upsilon) = B$ tənliklərindən **kompozisiya** çıxarılış qaydası ilə alınmışdır.

İndi isə qayıdaq (19.4) düsturunun çıxarılışına.

Bu çıxarılış aşağıdakı sxemlə aparılır.

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 & \text{ôÿðçèééÿ} \\ A_2 \Rightarrow B & \text{èì ïëèêàñèéà} \\ \hline A_1 \odot (A_2 \Rightarrow B) & \text{÷ûõàðûëûø.} \end{array}\right\} \qquad (19.7)$$

(19.7) çıxarılışı **ümumiləşmiş modus ponens** qaydası adlanır.

Ümumiləşmiş modus ponens qaydasının formulirovkası ilə klassik məntiqdə istifadə olunan modus ponens qaydasının formulirovkası arasındakı fərq aşağıdakı iki şərtlə xarakterizə olunur.

Əvvəla ümumiləşmiş modus ponens qaydasında fərz olunur ki, A_1, A_2 və B klassik məntiqdə olduğu kimi propozisional dəyişənlər olmayıb, qeyri səlis çoxluqlardır. İkincisi vacib deyil ki, A_1 və A_2 çoxluqları eyni olsunlar. Əgər qəbul etsək ki, $A_1 = A_2 = A$ qeyri səlis çoxluqlar deyil, adi çoxluqlardır, onda bunları (19.4) tənliyində nəzərə alsaq

$$A \odot (A \Rightarrow B) = A \odot (A \times B + \rceil A \times V) =$$
$$= A_n A_k B_n + A_n (\rceil A_k) V_n \qquad (19.8)$$

alarıq. Burada A_n və A_k A çoxluğunun uyğun olaraq sətir-vektor və sütun-vektor matrislərini göstərir; matrislərin hasili isə **maxmin hasili** kimi başa düşülür.

Sonra, qəbul etdiyimizə görə A adi (qeyri səlis olmayan) çoxluq olduğundan

$$A_n (\rceil A_k) = 0 \qquad (19.9)$$

və yenə də A normal ($\sup \mu_A(u) = 1$) çoxluq olduğu üçün

$$A_n A_k = 1 \qquad (19.10)$$

alarıq.

Beləliklə, (19.8)-(19.10) bərabərliklərindən

$$A \odot (A \Rightarrow B) \vDash B \tag{19.11}$$

alınır ki, bu da klassik məntiqdən məlum olan modus po-nens qaydası ilə üst-üstə düşür.

Buradan bir daha aydın olur ki, qeyri səlis məntiqdə fəaliyyət gösətərən modus ponens qaydası ənənəvi məntiqin modus ponens qaydasının ümumiləşməsidir. (19.11) düstu-runu sadə bir misal üzərində nümayiş etdirək.

Misal. Tutaq ki, söhbət maddi cismin kütləsindən gedir. T (**kütlə**) termlər çoxluğunun **yüngül, ağır, az və ya çox yüngül** qeyri səlis çoxluqlarını götürək

$$V = U = 1 + 2 + 3 \tag{19.12}$$

universal çoxluqların A_1, A_2, B qeyri səlis altçoxluqlarını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$A_2 = \textbf{éöí ýöë} = 1/1 + 0\cdot 5/2\,, \tag{19.13}$$

$$A_1 = \textbf{àç âÿ éà ÷î õ éöí ýöë} = 1/1 + 0\cdot 4/2 + 0\cdot 3/3\,, \tag{19.14}$$

$$B = \textbf{àüûð} = 0\cdot 5/2 + 1/3\,. \tag{19.15}$$

(19.8), (19.13) və (19.15) bərabərliklərindən istifadə edərək əvvəlcə $A_2 \Rightarrow B = \textbf{éöí ýöë} \Rightarrow \textbf{àüûð}$ implikasiyasını hesablayaq:

$$\begin{aligned}
\textbf{Éöí ýöë} \Rightarrow \textbf{àüûð} = {} & (1/1 + 0\cdot 5/2) \times (0\cdot 5/2 + 1/3) + \\
& + (0\cdot 5/2 + 1/3) \times (1/1 + 1/2 + 1/3) = \\
& = 0\cdot 5/(1,2) + 1/(1,3) + 0\cdot 5/(2,2) + 0\cdot 5/(2,3) + \\
& + 0\cdot 5/(2,1) + 0\cdot 5/(2,2) + 0.5/(2,3) + \\
& + 1/(3,1) + 1/(3,2) + 1/(3,3).
\end{aligned}$$

Buradan da **yüngül⇒ağır** implikasiyanı aşağıdakı matrislə vermək olar:

$$\textbf{Éöí ýöë} \Rightarrow \textbf{àüûð} = \begin{bmatrix} 0 & 0\cdot5 & 1 \\ 0\cdot5 & 0\cdot5 & 0\cdot5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sonra, (19.7) çıxarılışına əsasən

$$A_1 \odot (A_2 \Rightarrow B) = \textbf{az ÷î õ éöí ýöë} \odot (\textbf{éöí ýöë} \Rightarrow \textbf{àüûð}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0\cdot5 & 1 \\ 0\cdot5 & 0\cdot5 & 0\cdot5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0\cdot4\ 0\cdot3] \begin{bmatrix} 0 & 0\cdot5 & 1 \\ 0\cdot5 & 0\cdot5 & 0\cdot5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0\cdot3\ \ 0\cdot3\ \ 1].$$

Beləliklə, baxdığımız halda ümumiləşmiş modus po-nens qaydası aşağıdakı təqribi çıxarılışı müəyyən edir:

yüngül	- fərziyyə,
az və ya çox yüngül	- fərziyyə,
ağır	- fərziyyə,
əgər yüngül, onda ağır	- implikasiya,
ağır	- təqribi çıxarılış.

Bu sonuncu ifadə klassik məntiqdən məlum olan hipotezlərdən çıxarılış qaydasını xatırladır.

III FƏSİL. QEYRİ SƏLİS MƏNTİQİN TƏTBİQLƏRİ

§ 20. Linqvistik ehtimal

Ehtimalın klassik tərifinə görə əgər P ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzası üzərində normallaşmış ölçüdürsə, onda A hadisəsinin $P(A)$ ehtimalı A çoxluğunun ölçüsü kimi təyin olunur və $[0,1]$ parçasından olan ədədə bərabər qiymət alır.

Bir çox real problemlər var ki, orada ehtimalın yuxarıda verdiyimiz tərifində qeyd olunan şərtlərdən bir və ya bir neçəsi pozulur, yaxud dəqiq ifadə olunmur.

Belə ki, əvvəla bəzi hallarda A hadisəsinin özü dəqiq təyin olunmur; məsələn, 3 gündən sonra səyahətə çıxmaq arzusunda olan hər kəsi belə bir sual düşündürə bilər. Həmin günün **günəşli olması** ehtimalı necədir? Bu halda **günəşli olmaq** hadisəsi o mənada qeyri səlis hadisədir ki, bu hadisə pis təyin olunub, çünki 3 gün sonra havanın günəşli olub olmamasını əvvəlcədən dəqiq proqnozlaşdırmaq im-kanına malik deyilik; bu təbiət hadisəsi bizim iradəmizdən asılı olmayaraq baş verir. Ona görə də belə hadisəni Ω elementar hadisələr fəzasının mənsubluq funksiyası χ_A olan ölçülən qeyri səlis altçoxluğu kimi xarakterizə etmək olar.

İkincisi əgər, hətta A tamamilə dəqiq təyin olunan adi hadisə olarsa, ola bilər ki, onun $P(A)$ ehtimalı pis təyin olunsun.

Misal üçün, hansı ehtimal var ki, növbəti ildə Azərbaycanda **infilyasiyanın səviyyəsi** iki rəqəmli ədədlə ifadə edilməyəcək? sualına yəqindir ki, birqiymətli olaraq, məsə-lən, $0{\cdot}8$ cavabını vermək olmaz.

Belə olan halda **çox ehtimal ki**, **böyük ehtimalla** və s. tipli cavablar az dəqiq görünsə belə, bizim düşüncəmizə görə gözlədiyimiz ehtimalı reallığa daha yaxın xarakterizə edər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin pis təyin olunmuş vəziyyətlərdə hadisələrə tətbiqini təmin etmək üçün P ehtimalının linqvistik dəyişən kimi fərz edilməsi mühüm amillərdən biridir. İndi biz bunun necə edildiyini göstərməklə, P-nin linqvistik dəyişən kimi fərz edilməsi zamanı qarşıya çıxan bəzi sadə nəticələri də tədqiq edəcəyik. Bu məqsədlə sonlu

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \qquad (20.1)$$

universal çoxluğun elementlərinə bərabər qiymətlər alan X dəyişənini nəzərdən keçirək. Bundan əlavə həm də fərz edək ki, X üzərinə qoyulmuş məhdudiyyət şərtləri U universal çoxluqla üst-üstə düşür. Bu o deməkdir ki, U çoxluğunun istənilən elementi X dəyişəninin qiyməti olaraq seçilə bilər. Hər bir $u_i, i = \overline{1,n}$ elementinə $\mathscr{P}_i$ linqvistik ehtimalını qarşı qoyaq. $\mathscr{P}_i$ Bul linqvistik dəyişənlərin baza qiymətləri P_i $(0 \le P_i \le 1)$ olsun.

Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\mathscr{P}_i$ linqvistik dəyişənlərə uyğun V universal çoxluq ya $[0,1]$ seqmentidir, yaxud da

$$V = 0 + 0\cdot 1 + \cdots + 0\cdot 9 + 1 \qquad (20.2)$$

sonlu çoxluqdan ibarətdir.

$\mathscr{P}_i$ dəyişənlərinin ümumi adı olaraq $\mathscr{P}$=**ehtimal** qəbul edək. $\mathscr{P}$ üçün term-çoxluğu aşağıdakı kimi seçək:

$T(\mathscr{P})$ = **ùÿãèãÿòÿ î õøàð + ùÿãèãÿòÿ î õøàð äåéèë+**
+÷î õ ùÿãèãÿòÿ î õøàð + àç âÿ éà ÷î õ
ùÿãèãÿòÿ î õøàð + ⋯ + åùòèì àëëû+ åùòèì àëëûäåéèë+
+÷î õ åùòèì àëëû+ í ÿ ÷î õ åùòèì àëëû, í ÿ äÿ ÷î õ åùòèì àëëû
äåéèë+ …+ åùòèì àëëûñûõðà éàõû äûð + åùòèì àëëû0 · 5 - ÿ
éàõû äûð + åùòèì àëëû0 · 8 - ÿ ÷î õ éàõû äûð +
+åùòèì àëëû1 - äèð + … (20.3)

Burada **həqiqətə oxşar, ehtimallı və 0·α-ya yaxındır** ilkin terminlər rolunu oynayır, qalan termlər onlardan sintaksis nəticəsində düzəldilir.

Ehtimal qeyri səlis çoxluğun mənsubluq funksiyası-nın mümkün olan yaxınlaşmalarından birini, məsələn, aşa-ğıdakı düsturlarla təyin etmək olar:

$$\chi_{\text{ehtimallı}}(P) = \begin{cases} 0, & 0 \le P \le \alpha; \\ 3\left(\dfrac{P-\alpha}{1-\alpha}\right)^2, & \alpha \le P \le \dfrac{\alpha+1}{2}; \\ 1-3\left(\dfrac{P-1}{1-\alpha}\right)^2, & \dfrac{\alpha+1}{2} \le P \le 1; \end{cases} \qquad (20.4)$$

$$\chi_{\text{az ehtimallı}}(P) = 1 - \chi_{\text{ehtimallı}}(P), \qquad (20.5)$$

$$\chi_{\text{ehtimallı deyil}}(P) = \chi_{\text{ehtimallı}}(1-P), \qquad (20.6)$$

harada ki P P_i dəyişənlərinin ümumi adıdır.

Misal. Fərz edək ki, **ehtimallı** ilkin termin ədədi ifadəsi

$$\chi_{\text{ehtimallı}} = 0\cdot4/0\cdot6 + 0\cdot6/0\cdot5 + 0\cdot8/0\cdot9 + 1/1 \qquad (20.7)$$

şəklindədir; buradan da (20.5)-(20.7) düsturlarından istifadə etsək alarıq:

$$\chi_{\text{ehtimallı deyil}} = 1/(0 + 0\cdot1 + 0\cdot4 + 0\cdot5 + 0\cdot6) +$$
$$+0\cdot6/0\cdot6 + 0\cdot4/0\cdot5 + 0\cdot2/0\cdot9, \qquad (20.8)$$

$$\chi_{\text{az ehtimalsız}} = 1/0 + 0\cdot4/0\cdot4 + 0\cdot6/0\cdot5 + 0\cdot8/0\cdot1, \qquad (20.9)$$

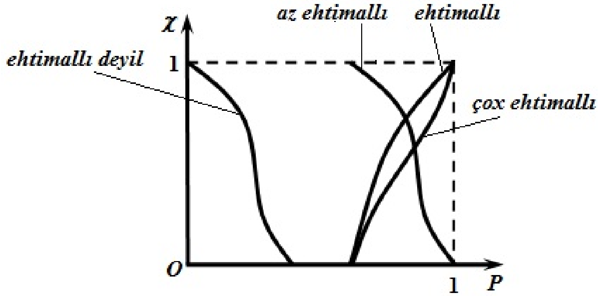
$$\chi_{\div\text{ox ehtimallı}} = 0\cdot16/0\cdot6 + 0\cdot36/0\cdot5 + 0\cdot64/0\cdot9 + 1/1. \qquad (20.10)$$

Aşağıda **ehtimallı, az ehtimallı** və **ehtimallı deyil** termlərinin təqribi qrafiki təsviri verilmişdir (şəkil 14).

Şəkildə oxlarla göstərilən əyrilər **ehtimallı, az ehtimallı, ehtimallı deyil** və **çox ehtimallı** termlərin birgəlik funksiyaları qiymətlərinin təqribi mənzərəsini ifadə edir.

Sonrakı işlərimizdə **ehtimallı** termini bu və ya digər dərəcədə elə **həqiqətə oxşar** termi ilə sinonim kimi qəbul edəcəyik.

Eyni zamanda y**axındır** α (haradaki α [0,1] seqmentindən götürülmüş istənilən ədəddir) termini ixtisar edilmiş şəkildə «$\to\alpha$» kimi işarə edəcəyik.



Şəkil 14.

Dediklərimizi nəzərə alsaq belə yazarıq:

həqiqətə oxşardır=yaxındır 1=«$\to$ 1» (20.12)

az ehtimallıdır=yaxındır 0=«$\to$ 0» (20.13)

yaxındır 0·8=«$\to$ 0·8»=

$$=0\cdot7/0\cdot7+0\cdot8/0\cdot9+1/0\cdot8 \quad (20.14)$$

çox yaxın 0·8=çox«$\to$ 0·8»$=(\to 0\cdot 8)^2=$

$$=0\cdot49/0\cdot7+0\cdot64/0\cdot9+1/0\cdot8\,. \quad (20.15)$$

Tutaq ki, X təsadüfi linqvistik dəyişən, (P_1,P_2) isə X-ə uyğun ehtimalın linqvistik qiymətini göstərən binar dəyişən-dir. Linqvistik ehtimalın P_1 və P_2 qiymətlərini ehtimalın paylanması adlandıracağıq. $\mathscr{P}_i$ dəyişəninə uyğun P_j ehtimalını aşağıdakı təyinat tənliyi şəklində vermək olar:

$$\mathscr{P}_i = P_j \quad (i,j=1,2,3)\,. \quad (20.16)$$

Burada $\mathscr{P}_i$ qeyri səlis dəyişənin ümumi adı, P_j isə linqvistik ehtimalın qiymətidir.

Məsələn, $\mathscr{P}_2 = P_3$, $\mathscr{P}_1 = P_2$ və s.

Daha açıq şəkildə, misal üçün, $\mathscr{P}_3 = P_2 =$**həqiqətə oxşar deyil** kimi yaza bilərik.

Əgər $R(P_1+P_2+P_3=1)$ $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]=[0,1]^3$ Dekart hasilində verilmiş ternar münasibətdirsə və $R(P_i)$ P_i dəyişə-ni üzərinə goyulmuş məhdudiyyətdirsə, onda ternar (P_1,P_2,P_3) qeyri səlis dəyişənlə şərtlənmiş məhdudiyyəti

$$R(P_1,P_2,P_3)=R(P_1)\times R(P_2)\times R(P_3)\cap$$
$$\cap R(P_1+P_2+P_3=1) \qquad (20.17)$$

şəklində yaza bilərik.

Misal. Fərz edək ki, $V=0\cdot1+0\cdot2+\cdots+0\cdot9+1$

$$P_1=\textbf{ehtimallı}=0\cdot6/0\cdot8+0\cdot8/0\cdot9+1/1, \qquad (20.18)$$

$$P_2=\textbf{az ehtimallı}=1/0\cdot1+0\cdot2/0\cdot5, \qquad (20.19)$$

$$P_3=\textbf{ehtimallı deyil}=1/0+0\cdot5/0\cdot3. \qquad (20.20)$$

Onda (20.17) ayrılışlarından istifadə etsək,

$$R(P_1)\times R(P_2)\times R(P_3)=(0\cdot4/0\cdot8+0\cdot8/0\cdot9+1/1)\times$$
$$\times(1/0\cdot1+0\cdot2/0\cdot5)\times(1/0+0\cdot5/3)=$$
$$=[0\cdot6/(0\cdot8,0\cdot1)+0\cdot2/(0\cdot8,0\cdot5)+0\cdot8/(0\cdot9,0\cdot1)+$$
$$+0\cdot2/(0\cdot9,0\cdot5)+1/(1,0\cdot1)+0\cdot2/(1,0\cdot5)](1/0+0\cdot5/0\cdot3)=$$
$$=0\cdot2/(0\cdot9,0\cdot5,0)+0\cdot2/(0\cdot9,0\cdot5,0\cdot3)+1/(1,0\cdot1,0)+$$
$$+0\cdot5/(1,0\cdot5,0\cdot3)+0\cdot2/(1,0\cdot5,0)+0\cdot2/(1,0\cdot5,0\cdot3). \qquad (20.21)$$

$R(P_1+P_2+P_3=1)$ məhdudiyyət şərtini, məsələn,

$$R(P_1,P_2,P_3)=\sum_k 1/(k,1-k,0);\ k=0,0\cdot1,0\cdot2,...,0\cdot9,1 \qquad (20.22)$$

şəklində ifadə edə bilərik.

(20.17) düsturundan istifadə edərək

$$R(P_1,P_2,P_3)=R(k+1-k+0=1)$$

şərtini ödəyən k-ları seçməklə, (20.21) və (20.22) çoxluqlarının kəsişməsini götürüb (P_1,P_2,P_3) dəyişənləri üzərinə qoyulmuş məhdudiyyətin ifadəsini tapa bilərik.

Qeyd. Ola bilər ki, (20.17) düsturunda iştirak edən

$$R(P_3)\cap R(P_1+P_2+P_3=1)$$

kəsişməsi boş çoxluq olsun, bu halda deyirlər ki, (20.18)-

(20.20) ayrılışları $R(P_1 + P_2 + P_3 = 1)$ məhdudiyyət şərtlərinə tabe olmur.

§ 21. Linqvistik ehtimallarla hesablamalar

Ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox tətbiqləri, məsələn, orta qiymətin hesablanması, dispersiyanın tapılması, riyazi gözləmələrin ehtimallığının təyini və s. kimi məsələlərin həlli zamanı aşağıdakı kimi xətti kombinasiyaya baxılır.

$$Y = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n, \qquad (21.1)$$

harada ki, + hesabi cəmdir, $\alpha_i, i = \overline{1,n}$ həqiqi ədədlər, $P_i, i = \overline{1,n}$ ehtimalın $[0,1]$ seqmentindən olan qiymətləridir. Aydındır ki, P_i-lər $[0,1]$-dən götürülmüş ədədlər olduqda (21.1) şəklində xətti kombinasiyanın qiymətini verilmiş α_i, P_i ədədlərinə görə hesablamaq çətinlik törətmir.

Ancaq baxılan ehtimallar öz təbiəti etibarilə linq-vistik ehtimallar olduqda, başqa sözlə $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, ..., \boldsymbol{P_n}$ linqvistik dəyişənlər olan halda

$$Y = \alpha_1 \boldsymbol{P_1} + \alpha_2 \boldsymbol{P_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{P_n}, \qquad (21.2)$$

(harada ki, $\boldsymbol{P_i}, i = \overline{1,n}$ ehtimalın linqvistik qiymətləridir) şəklində xətti kombinasiyanın hesablanması tamamilə fərqli xarakter daşıyır. Bir qədər də konkret desək, əgər $\boldsymbol{P_i}$-lər, məsələn, **ehtimallı, ehtimallı deyil, çox ehtimallı, az ehtimallı** və s. kimi ehtimalın linqvistik qiymətləridirsə, onda Y (21.1) bərabərliyində olduğu kimi istənilən həqiqi qiymət deyil, ədəd oxunun hər hansı qeyri səlis alt çoxluğunu təsvir edəcəkdir. Eyni zamanda Y altçoxluğunun mənsubluq funksiyası $\boldsymbol{P_i}$-lərin mənsubluq funksiyalarından asılı olacaqdır.

Doğrudan da fərz edək ki, $P_1, P_2, ..., P_n$ qeyri səlis dəyişənləri üzərinə qoyulmuş məhdudiyyət şərtləri (20.17)-dəki kimi

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n) =$$
$$= R(P_1)\times R(P_2)\times\cdots\times R(P_n)\bigcap R(P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1) \quad (21.3)$$

şəklində verilir. Əlavə olaraq fərz edək ki, $R(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ məhdudiyyətinin mənsubluq funksiyası $\chi(P_1, P_2, ..., P_n)$ və $R(P_i)$ $(i = \overline{1,n})$ məhdudiyyətlərinin mənsubluq funksiyaları uyğun olaraq $\chi_i(P_i)$-dir. Bu halda ümumiləşmə prinsipini (21.1)-ə tətbiq etməklə Y-i qeyri səlis çoxluq şəklində

$$Y = \int_{\mathrm{Re}} \chi(P_1, P_2, \ldots, P_n)/(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n) \quad (21.4)$$

kimi yazarıq (burada + hesabi cəmdir və *Re* həqiqi ədədlər çoxluğudur). Əgər (21.3) bərabərdiyini də nəzərə alsaq sonuncu ifadədən

$$Y = \int_{\mathrm{Re}} \chi_1(P_1)\wedge\chi_2(P_2)\wedge\cdots\wedge\chi_n(P_n)/(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n) \quad (21.5)$$

alarıq. Onu da qeyd edək ki, (21.5)-də iştirak edən P_i $(i = \overline{1,n})$ ədədləri $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$ məhdudiyyət şərtini ödəyir.

Beləliklə, linqvistik ehtimalın qiymətlərinin xətti kombinasiyasını həqiqi oxun qeyri səlis altçoxluğu şəklində göstərə bilərik. Y-in yuxarıda göstərilən ifadəsini hesab-lamaq məqsədilə onu başqa, daha əlverişli şəklə gətirmək olar. Bunun üçün fərz edək ki, $\chi(y)$ Y qeyri səlis alt-çoxluğun mənsubluq funksiyasının qiymətidir və $y \in \mathrm{Re}$.

Bu halda (21.5)-dən alarıq ki, $y = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n$ olduqda, $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$ məhdudiyyət şərtləri daxilində

$$\chi(y) = \bigvee_{P_1, P_2, \ldots, P_n} \chi_1(P_1)\wedge\chi_2(P_2)\wedge\cdots\wedge\chi_n(P_n). \quad (21.6)$$

Belə olan halda Y-in hesablanması məhdudiyyət şərtləri xətti olan qeyri xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə gətirilir. Daha dəqiq desək, həmin məsələni aşağı-dakı şəkildə söyləmək olar:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1(P_1) \geq y, \\ \chi_2(P_2) \geq y, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \chi_n(P_n) \geq y, \\ y = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n \\ P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1 \end{array}\right\} \qquad (21.7)$$

məhdudiyyət şərtləri ilə verilmiş y-in maksimum qiymətini tapmaq.

Misal. Dediklərimizi aşağıdakı sadə misalda nümayiş etdirək.

Tutaq ki,

$$\begin{array}{l} P_1 = \textbf{ehtimallı}, \\ P_2 = \textbf{ehtimallı deyil}, \end{array} \qquad (21.8)$$

qeyri səlis çoxluqları belə verilir:

$$\textbf{ehtimallı} = \int_0^1 \chi_{\textbf{ehtimallı}}(P)/P, \qquad (21.9)$$

$$\textbf{ehtimallı deyil} = \urcorner\textbf{ehtimallı}, \qquad (21.10)$$

onda (20.6) düsturuna görə

$$\chi_{\textbf{ehtimallı deyil}}(P) = \chi_{\textbf{ehtimallı}}(1-P), \ \ 0 \leq P \leq 1. \qquad (21.11)$$

Fərz edək ki,

$$Y = \alpha_1 \textbf{ehtimallı} + \alpha_2 \textbf{ehtimallı deyil}, \qquad (21.12)$$

(burada + hesabi cəmi ifadə edir) şəklində riyazi gözləməni hesablamaq tələb olunur.

(21.6) düsturundan istifadə edərək alarıq ki,

$$\left.\begin{array}{l} y = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad (21.13)$$

məhdudiyyət şərtləri daxilində

$$\chi(y) = \bigvee_{P_1, P_2} \chi_{\mathbf{ehtimall\imath}}(P_1) \wedge \chi_{\mathbf{ehtimall\imath\ deyil}}(P_2)\,. \qquad (21.14)$$

(21.13)-ün ikinci sətrindən və (21.11)-dən istifadə etsək,

$$\chi_{\mathbf{ehtimall\imath}}(P_1) = \chi_{\mathbf{ehtimall\imath\ deyil}}(P_2) \qquad (21.15)$$

və deməli, (21.14)-ə görə

$$\left.\begin{array}{l} \chi(y) = \chi_{\mathbf{ehtimall\imath}}(P_1), \\ y = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 (1 - P_2), \end{array}\right\} \qquad (21.16)$$

baradan da

$$\chi(P) = \chi_{\mathbf{ehtimall\imath}}\left(\frac{y - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) \qquad (21.17)$$

olduğunu alarıq.

Xüsusi halda ehtimalın qiymətlərinin universal çoxluğu olaraq $V = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + \cdots + 0 \cdot 9 + 1$ qəbul edək.

Ehtimalın linqvistik qiymətləri olaraq

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = "\to 0 \cdot 4" = 0 \cdot 7 / 0 \cdot 3 + 1 / 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 / 0 \cdot 5 \\ P_2 = "\to 0 \cdot 6" = 0 \cdot 8 / 0 \cdot 5 + 1 / 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 / 0 \cdot 7 \end{array}\right\} \qquad (21.18)$$

götürək və

$$Y = \alpha_1 P_1 \oplus \alpha_2 P_2 \qquad (21.19)$$

($\oplus$ -hesabi cəmi göstərir) xətti kombinasiyaya baxaq.

(21.18) və (21.19) ifadələrindən istifadə etsək, alarıq:

$$\begin{aligned} Y &= \alpha_1 (0 \cdot 7 / 0 \cdot 3 + 1 / 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 / 0 \cdot 5) \oplus \\ &\oplus \alpha_2 (0 \cdot 8 / 0 \cdot 5 + 1 / 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 / 0 \cdot 7) = \\ &= (0 \cdot 7 / 0 \cdot 3\alpha_1 + 1 / 0 \cdot 4\alpha_1 + 0 \cdot 6 / 0 \cdot 5\alpha_1) \oplus \\ &\oplus \alpha_2 (0 \cdot 8 / 0 \cdot 5\alpha_2 + 1 / 0 \cdot 6\alpha_2 + 0 \cdot 8 / 0 \cdot 7\alpha_2)\,. \end{aligned} \qquad (21.20)$$

Əgər (21.20) bərabərliyinin sağ tərəfindəki cəmləmə əməlini yerinə yetirib, sonra da $P_1 + P_2 = 1$ olduğunu nəzərə alsaq, onda $\chi_1 / P_1\alpha_1 \oplus \chi_2 / P_2\alpha_2$ kimi hədlər üçün

$$\chi_1 / P_1\alpha_1 \oplus \chi_2 / P_2\alpha_2 =$$

$$= \begin{cases} (\chi_1 \wedge \chi_2) / (P_1\alpha_1 \oplus / P_2\alpha_2), P_1 + P_2 = 1 \text{ î ëàðñà}, \\ \qquad\qquad 0 \,, \qquad\qquad \text{ÿêñ ùàëäà} \end{cases} \qquad (21.20)$$

şəklində hesablamalar apararaq Y qeyri səlis çoxluğu tap-mış olarıq. Əgər (21.20)-ni (21.19)-a tətbiq etsək, onda

$$\begin{aligned} Y &= 1/(0 \cdot 4\alpha_1 \oplus 0 \cdot 6\alpha_2) + \\ &+ 0 \cdot 4(0 \cdot 5\alpha_1 \oplus 0 \cdot 5\alpha_2) + \\ &+ 0 \cdot 7/(0 \cdot 3\alpha_1 \oplus 0 \cdot 7\alpha_2) \end{aligned} \qquad (21.21)$$

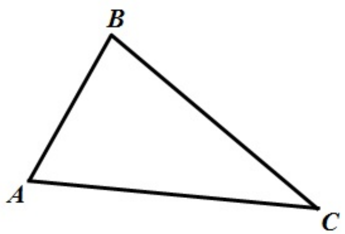
olduğunu alarıq.

Beləliklə, Y $\mathrm{Re} = (-\infty, \infty)$ həqiqi oxun qeyri səlis alt-çoxluğundan ibarətdir.

§ 22. Qeyri səlis teoremlər

Qeyri səlis teorem adı altında, ümumi halda, əgər A onda B şəklində elə müddəanı (hökmü) başa düşəcəyik ki, onun doğruluq qiyməti **doğru** qeyri səlis çoxluğundan iba-rət olsun və özü də aksiomlar sistemindən təqribi mühaki-mələrin köməyilə çıxarılsın. Dediklərimizi əyani şəkildə nümayiş etmək üçün, məsələn, elementar həndəsədən bildi-yimiz belə bir təklifi götürək.

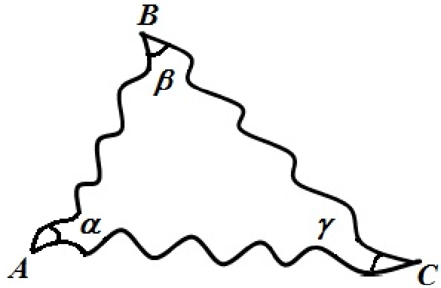
Teorem. İstənilən üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabərdir, yəni, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$ (şəkil 15).



Şəkil 15.

Bu teoremi qeyri səlis şəkildə aşağıdakı kimi təqdim etmək olar.

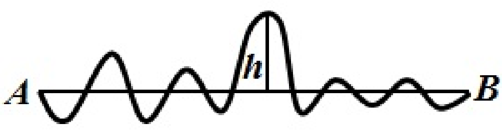
Qeyri səlis teorem. Əgər AB, BC və AC təqribi düz xətləri ABC təqribi üçbucağın tərəfləri, α, β, γ isə bu tərəflərin cüt-cüt kəsişməsindən alınan bucaqlardırsa, onda α, β, γ bucaqlarının cəmi təqribən 180^0-yə bərabərdir (şə- kil 16).



Şəkil 16.

Teoremin «isbatı»na keçməzdən əvvəl onun formulirovkasında və isbat zamanı təsadüf edilən bəzi terminləri dəqiqləşdirək.

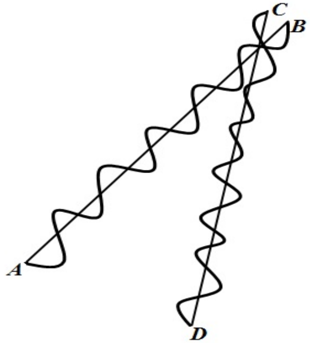
a) Təqribi AB düz xətti dedikdə A və B nöqtələrini birləşdirən elə əyrini başa düşəcəyik ki, onun istənilən nöq-təsinin AB düz xəttindən olan h məsafəsi AB parçasının uzunluğuna nisbətən **çox kiçikdir** (şəkil 17).



Şəkil 17.

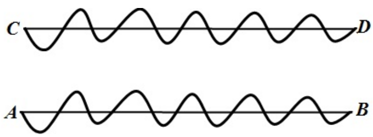
Həmin bu h məsafəni linqvistik qeyri səlis dəyişən kimi interpretasiya edib, **çox kiçik** termini isə onun linq-vistik qiyməti qəbul edək.

b) AB və CD təqribi düz xətləri arasındakı bucaq dedikdə elə bucağı nəzərdə tutacağıq ki, onun AB və CD düz xətləri arasındakı bucaqdan fərqi **çox kiçik** olsun (şəkil 18).

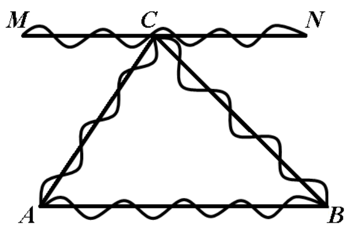


Şəkil 18.

c) AB və CD təqribi düz xətlərini o zaman «paralel» adlan-dıracağıq ki, eyni adlı AB və CD düz xətləri paralel olsun-lar (şəkil 19).



Şəkil 19.



Şəkil 20.

İndi qeyri səlis teoremin «isbatı»na keçə bilərik.

ABC təqribi üçbucaq götürək və onun C təpəsindən AB tərəfinə MN təqribi «paralel» düz xətti keçirək (şə- kil 20). Müəyyənlik üçün AB, AC, BC düz xətlərilə eyni adlı təqribi düz xətləri $\widetilde{AB}$, $\widetilde{AC}$, $\widetilde{BC}$ ilə işarə edək.

Aydındır ki, $\widetilde{AC}$ təqribi düz xəttin istənilən nöq-təsinin AC düz xəttinə qədər olan h məsafəsi a)-ya görə AB düz xətt parçasının uzunluğuna nisbətən **çox kiçikdir.**

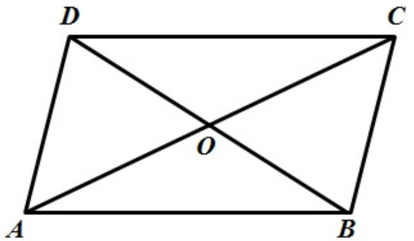
Yenə a) bəndinə görə $\widetilde{MN}$ təqribi düz xəttin istənilən nöqtəsinin MN düz xəttindən olan məsafə MN parçasının uzunluğuna nisbətən **çox kiçikdir.** Bu səbəbdən tərəfləri $\widetilde{AC}$ və $\widetilde{CM}$ təqribi düz xətləri olan $\widetilde{ACM}$ təqribi bucağın qiyməti ilə tərəfləri AC və CM düz xətləri olan ACM bucağının qiymətləri fərqi **çox(çox kiçik)=(çox)^2 kiçik** olar. Lakin CAB və ACM düzxətli bucaqlar bərabər olduğundan $\widetilde{CAB}$ və $\widetilde{ACM}$ əyrixətli bucaqların qiymətləri fərqi də **(çox)^{2}kiçik** olar. Analoji mühakiməni $\widetilde{ABC}$ və $\widetilde{BCN}$ əyrixətli bucaqlar üçün də apararaq onların uyğun olaraq ABC və BCN bucaqları ilə qiymətləri fərqinin **(çox)^{2}kiçik** olduğunu deyə bilərik.

Ona görə də əyrixətli üçbucağın bucaqlarının $\alpha+\beta+\gamma$ cəmi ilə düz xətli üçbucağın bucaqlarının $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$ cəmi-nin fərqi **çox(çox kiçik)=(çox)^2 kiçik** olacaq.

Ancaq $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$ olduğunu nəzərə alsaq, on-da $\alpha+\beta+\gamma$ cəmi ilə 180^0-nin fərqi=**çox(çox kiçik)=(çox)^2 kiçik** olduğunu alarıq.

Məktəb həndəsə kursundan bildiyimiz daha bir teoremi qeyri səlis formada ifadə və «isbat» edək.

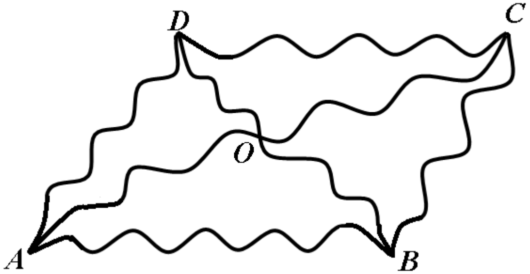
Teorem. Paraleloqramın dioqonalları bir nöqtədə kəsişir və həmin nöqtə ilə yarıya bölünür (şəkil 21).



Şəkil 21.

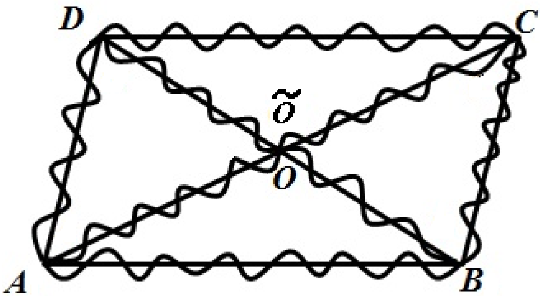
Bu teoremi qeyri səlis formada aşağıdakı kimi təq-dim etmək olar.

Qeyri səlis teorem. Tutaq ki, $\widetilde{AB}$, $\widetilde{BC}$, $\widetilde{CD}$, $\widetilde{DA}$ təqribi düz xətləri $\widetilde{ABCD}$ təqribi paraleloqramın tərəfləri və $\widetilde{AC}$, $\widetilde{BD}$ bu paraleloqramın təqribi dioqonallarıdır. Onda göstərək ki, $\widetilde{AC}$, $\widetilde{BD}$ dioqonalları bir nöqtədə kəsişir və həmin nöqtədə təqribi yarıya bölünür (şəkil 22).



Şəkil 22.

Qeyri səlis teoremin isbatı. Tərəfləri təqribi düz xətlər olan paraleloqramı təqribi paraleloqram adlandıraq. $ABCD$ düz xətli paraleloqramın dioqonallarını AC və BD, eyni adlı təqribi paraleloqramın təqribi dioqonallarını isə $\widetilde{AC}$ və $\widetilde{BD}$-lə işarə edək. Həmçinin düz xətli parale-loqramın dioqonallarının kəsişmə nöqtəsi O, təqribi parale-loqramın təqribi dioqonallarının kəsişmə nöqtəsi $\widetilde{O}$ olsun (şəkil 23).



Şəkil 23.

$\widetilde{A}$ nöqtəsi $\widetilde{AC}$ təqribi dioqonalın uc nöqtəsi olduğundan $\widetilde{A}$ nöqtəsindən A nöqtəsinə qədər məsafə **kiçikdir**. Ona görə də $\widetilde{AC}$ düz xəttinin istənilən nöqtəsindən AC təqribi düz xəttə qədər olan məsafə **kiçikdir**. Onda, deməli, $\widetilde{AC}$ təqribi düz xəttin istənilən nöqtəsinin AC düz xəttinə qədər məsafəsi **az və ya çox kiçikdir**.

Analoji mühakiməni BD düz xətti və $\widetilde{BD}$ təqribi düz xətləri üçün apararaq, deyə bilərik ki, $\widetilde{BD}$ təqribi düz xəttin istənilən nöqtəsindən BD düz xəttinə qədər olan məsafə **kiçikdir**.

Beləliklə də, alarıq ki, $\widetilde{AC}$ və $\widetilde{BD}$ təqribi düz xətlərinin $\widetilde{O}$ kəsişmə nöqtəsindən AC və BD düz xətlərinin O kəsişmə nöqtəsinə qədər olan məsafə **az və ya çox (az və ya çox kiçik)=(az və ya çox)^2 kiçik** olacaq. $\widetilde{O}$ nöqtəsindən O nöqtəsinə qədər olan məsafənin **(az və ya çox)^2 kiçik** olması isə o deməkdir ki, $\widetilde{O}$ və O nöqtələri bir-birinə kifayət qədər yaxındır və deməli $\widetilde{ABCD}$ təqribi paralelo-qramın $\widetilde{AB}$ və $\widetilde{CD}$ təqribi dioqonalları da $\widetilde{O}$ təqribi nöq-tədə kəsişməklə həmin nöqtədə yarıya bölünür.

Onu da qeyd edək ki, yuxarıda apardığımız mühaki-mə təqribi olmaqla həm də keyfiyyət xarakterlidir.

Yuxarıdakılara uyğun mühakimə aparmaqla elemen-tar həndəsədən məlum olan bir sıra (məsələn, üçbucaqların tənbölənlərinin bir nöqtədə kəsişməsi, dördbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi haqqında və s.) teoremləri qeyri səlis şə-kildə ifadə və «isbat» etmək olar. Belə mühakimə formaları müxtəlif tipli pis təyin olunmuş proseslərin tədqiqi zamanı qərar qəbul edilməsi üçün əhəmiyyətlidir.

§ 23. Süni intellekt və Lütfi Zadə nəzəriyyəsi

Qeyri səlis məntiqin maraqlı tətbiq sahələrindən biri də süni intellektlərin yaradılmasıdır.

Süni intellekt dedikdə insan kimi düşünmək qabiliy-yətinə malik, təcrübəyə və elmi biliklərə yiyələnmiş müasir maşınlar nəzərdə tutulur.

Süni intellektin yaradılmasında görkəmli Amerika riyaziyyatçısı, əslən azərbaycanlı olan Lütfi Zadənin aldığı elmi nəticələrin böyük rolu olmuşdur. L.Zadənin elmi araş-dırmalarının əsasında belə bir ideya dururdu ki, təbii dilə əsaslanan real insan mühakimələri ənənəvi formal riyazi nəzəriyyələr çərçivəsində ilişib qala bilməz. Ona görə də qeyri səlis məntiqin nəzəri və praktik tətbiqinə əsaslanan «xalis tətbiqi riyaziyyat» modelindən istifadə etmək gərək-dir. L.Zadənin «Xətti sistemlər nəzəriyyəsi», «Qeyri səlis çoxluqlar və imkanlar nəzəriyyəsi», «Ekspert sistemlərdə qeyri müəyyənliyin idarə edilməsində qeyri səlis məntiqin rolu» əsərləri elektronika texnologiyaları sahəsində əsl inqi-lab yaratmışdır.

Əsası L.Zadə tərəfindən qoyulmuş qeyri səlis çoxluq və qeyri səlis məntiq nəzəriyyələri gibernetika, informatika, elektronika və kosmik texnikanın inkişafında yeni dövrün başlanğıcını qoymuşdur.

L.Zadə qeyri səlis məntiq və imkanlar nəzəriyyəsinin intellektual sistemlərə tətbiqini də göstərmişdir. «Qeyri səlis məntiq və qeyri dəqiq qaydalar hesabı» adlı məhşur əsərin-də L.Zadə ədədi hesablamalarla yanaşı, sözlərlə hesablama metodologiyası qaydalarını da göstərmişdir. Məhz bu metodologiyalar əsasında məişətdə işlədilən rəngli fotoaparatlar, televizorlar, paltaryuyan maşınlardan tutmuş, domna soba-ları, atom enerjisi blokları, optimal süzgəclər və s. kimi mürəkkəb texnoloji proseslər işlənib hazırlanmışdır. Bun-dan əlavə metro qatarları, vertalyotlar, robotlar, kosmik aparatlar və digər dinamik obyektlər qeyri səlis məntiqə əsaslanan süni intellektlə idarə olunurlar.

Lakin onu da unutmaq olmaz ki, qeyri səlis məntiq və ümumiyyətlə, qeyri səlis riyaziyyat klassik (səlis) riyaziy-yatın bazası əsasında yaradılmışdır. Bir həqiqəti də danmaq olmaz ki, hələ qeyri səlis məntiq və onun məhsulu olan süni intellekt yaranmamışdan əvvəl, klassik təbii elmlərin (riya-ziyyat, fizika, kimya, astronomiya və s.) köməyilə insanlar kompüteri yaratmış, süni peyklər kəşf etmiş, Aya uçmuş, atom və hidrogen silahları düzəltmişlər. Ancaq hazırda və yəqin ki, sonralar da, o qədər mühüm problemlərlə qarşıla-şacağıq ki, onların həlli klassik elmlərlə bir araya sığmır. Belə ki, bu gün bəşəriyyəti, idarəetmə sistemlərinin təkmil-ləşdirilməsi, ekspert sistemlərin yaradılması, idarəetmə pro-seslərinin intelektuallığının artırılması, qeyri səlis neyron sistemlər və s. məsələlər daha çox düşündürür. Məlumdur ki, real həyatda qərar çıxarma və idarəçilik məslələrini həll edərkən mövcud qeyri müəyyənlik nəzərə alınmalıdır. Yəni insan müəyyən şəraitdə qərar qəbul etmək istəyirsə, o şəxsdə idarəçilik və qərar qəbul etməsi üçün tam müəyyənlik və yəqinlik şəraiti olmalıdır. Məsələn, gəmi düzəldərkən onun üzmə şəraiti və şərtləri barədə tam informasiyaya malik olmalıyıq. Lakin real həyatda həll ediləcək məsələ barədə tam informasiya hər vaxt olmur. Ona görə də bu və ya digər dinamik sistemlərə təsir edən əlavə faktorlar meydana çıxır ki, onlar haqqında əvvəlcədən heç bir məlumata malik deyilik. Belə hallarda elə idarəetmə qanunu tapmaq lazım-dır ki, idarə olunan sistem həmin əlavə faktorların təsirin-dən asılı olmasın. Alimlərin fikirincə artıq klassik idrak, klassik elmi metodlar özlərinin əvvəlki dayanıqlığını itirib. Onların fikirincə, məsələn, bir dildən başqa dilə tərcümə problemi, canlıların sərbəstlik dərəcəsinə və çevirkliyinə ma-lik robotların yaradılması, lazımi adekvatlığa malik iqtisadi modellərin axtarılması və s. kimi vacib problemlər yalnız klassik riyaziyyatın tətbiqi ilə öz həllini tapa bilməzdi. Ona görə də bu tipli məsələlərin həllinə yeni elmi və məntiqi ya-naşma tələb olunurdu. Belə bir yanaşma hesablama intel-lektli yanaşmadır. Hesablama intellekti isə süni intellekt və onun daha inkişaf etmiş formasıdır. Beləliklə, süni intellekt insanın proqramlaşdırılmış şəkildə süni yollarla yaratdığı və digər köməkçi vasitələrlə üzə çıxan qeyri-ənənəvi intellekt, adət etmədiyimiz bir idrak kateqoriyasıdır. Məsələn, insa-nın yaratdığı robot bəşər evladına adekvat kimi qəbul olu-nur. Əgər robot konsert salonlarında mahnı oxuyursa və yaxud suallara cavab verirsə, bu hələ süni intellekt deyil, sadəcə həmin robotun proqramlaşdırılmasından irəli gələn funksiyanın icrasıdır. Süni intellektə malik robot isə insanın hirsləndiyini görüb artıq hərəkətlərə, yersiz «söz-söhbətlərə» yol verməyən robotdur.

Başqa bir misal. Müasir elektron hesablayıcı maşın-lar insanın imkanları xaricində olan mürəkkəb riyazi hesab-lamaları bir neçə saniyə ərzində yerinə yetirir. Ancaq bura-dan belə bir nəticə çıxarmaq olmaz ki, həmin maşınlar in-sandan «ağıllı»dır. Sadəcə həmin hesablama maşınları insanın yaratdığı proqram təminatı əsasında verilən əmr və göstərişləri yerinə yetirir.

Son illər süni intellektin bir şöbəsi olan hesablama intellektinə maraq bütün dünyada olduğu kimi Azərbaycan-da da ön plana çəkilib. Bu sahədə L.Zadənin davamçıların-dan biri

– Azərbaycan riyaziyyatçısı, görkəmli məntiqçi Rafiq Əliyevin tədqiqatları xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Onun invariantlıq və intellektual robotlar sahəsində aldığı nəticələr neft emalı, neft-kimya sənayesi, metallurgiya və əlvan metalların istismarı kimi mühüm məsələlərin həl-lində geniş tətbiq olunur. R.Əliyevin süni intellekt, hesab-lama intellekti və soft kompüterlərinə aid işləri, habelə böyük sistemlərdə koordinasiya nəzəriyyəsi, təbabət, təhsil, biznes, iqtisadiyyat və ən nəhayət kosmik tədqiqatlar kimi mühüm məsələləri əhatə edir.

Bu istiqamətdə alınan nəticələr və onların tətbiqləri coğrafi baxımdan təkcə Azərbaycanda deyil, Rusiya, Uk-rayna, Özbəkistan, Almaniya, Türkiyə, Bolqarıstan və s. kimi dünyanın bir çox ölkələrini əhatə edir.

Süni intellektin ən son nümayəndəsi olan beşinci nə-sil kompüterlər də, bildiyimiz kimi, qeyri səlis məntiqə əsas-lanır. Ümumiyyətlə, qeyri səlis məntiq istedadlı alim R.Əli-yevin təbirincə obrazlı şəkildə belə izah olunur: «Aristotel məntiqi ilə mühakimə yürüdən beyin dünyanı yalnız ağ və ya qara rəngdə qavrayır, L.Zadə məntiqi isə dünyanı bütün çalarları ilə qavramağa imkan verir, ona görə ki, Aristotel məntiqi ikiqiymətlidir, Zadə məntiqi isə çoxmənalı və kəsilməzdir». Doğrudan da Aristotelə görə bir müddəa ya ancaq doğru ya da ancaq yalandır, lakin Zadəyə görə hər bir müddəanın doğruluq dərəcəsi doğru və ya yalan arasın-da ($[0,1]$ parçasında olduğu kimi) kəsilməz qiymətlər alır. L.Zadə məntiqi real həyatı, obyektiv varlığı daha dürüst əks etdirmək qabiliyyətinə malikdir. Aristotel məntiqinə görə hər hansı əşya ya pisdir, ya da yaxşıdır. Zadə məntiqinə görə isə pislə yaxşı arasında sonsuz sayda pislik və yaxşılıq meyarları var; məsələn, çox pis, pis deyil, pis də deyil, yaxşı da deyil və s. Bir sözlə necə ki, Albert Eynşteyn «Nisbilik nəzəriyyəsini» yaratmaqla fizika elmində inqilab etdi, klas-sik mexanika ilə kvant mexanikasının sərhəddini ayırdı, belə də L.Zadə klassik riyaziyyata alternativ qeyri səlis riya-ziyyat yaratdı və onların əhatə dairələrini göstərdi.

§ 24. Qeyri səlis şəraitdə qərar qəbul etmə

Qeyri səlis təyin edilmiş şərait adı altında, qeyri səlis çoxluqlar dilində real vəziyyətlərin təqribi təsvirini başa düşəcəyik.

Qeyri səlis şəraitdə qərar qəbul edilməsi məsələsi ilk dəfə V.Bellman və L.Zadə tərəfindən qoyulmuş və inkişaf etdirilmişdir.

Bu məsələdə yol verilən seçimlər çoxluğu olaraq seçimlərin hər hansı tam sinfində qeyri səlis A çoxluğunun verildiyini nəzərdə tutacağıq.

Tutaq ki, X və Y verilmiş çoxluqlar, $f: X \to Y$ isə X çoxluğunun Y çoxluğunda inikasıdır. X çoxluğunun konkret **seçilmiş** x elementinin bu **seçimin** yol verilən, yəni son nəticənin alınmasındakı rolundan asılı olmayaraq obrazını $y = f(x)$-lə işarə edək. Qərar qəbul edilməsində **məqsəd**, çıxışların Y tam sinfində C qeyri səlis çoxluğu ilə təsvir olunur.

Məqsədin belə izahı göstərir ki, onu seçimlərin X tam sinfinin f inikası zamanı C qeyri səlis **məqsəd** çoxlu-ğunun proobrazlarının C_x qeyri səlis çoxluğu kimi xarakte-rizə etmək olar.

Qeyd edək ki, qeyri səlis C çoxluğunun $f: X \to Y$ inikasında C_x proobrazı mənsubluq funksiyası

$$\chi_{C_x}(x) = \chi_C(f(x)), \ \forall x \in X, \qquad (24.1)$$

olan qeyri səlis çoxluqdur. Eyni zamanda C_x çoxluğunun C obrazı mənsubluq funksiyası

$$\chi_C(y) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in [f^{-1}(y)]} \chi_{C_x}(z), [f^{-1}(y)] \neq \varnothing, \\ 0, [f^{-1}(y)] \neq \varnothing \ \text{âÿ} [f^{-1}(y)] = \{z / f(z) = y\} \end{cases} \qquad (24.2)$$

olan qeyri səlis çoxluqdur.

Qeyri səlis **məqsədin** yerinə yetirilməsi məsələsinin həlli **seçimlər** və **məqsədlər** qeyri səlis çoxluqlarının kəsişməsi kimi təyin olunur.

Başqa sözlə, məsələnin həlli X-ə daxil olan elə maksimal (daxil olma cəhətdən) D qeyri səlis çoxluqdur ki o, aşağıdakı şərtlərlə verilir.

$$\left.\begin{array}{l} 1. D \subset A \ (\text{ùÿëëì éî ëâåðèÿí ëëéè}) \\ 2. f(D) \subset C \ (\text{ãåéðèñÿëëñì ÿãñÿäëí éåðëí ÿ éåàëðëëì ÿñè}) \end{array}\right\} \quad (24.3)$$

Burada $f(D)$ f inikasında D çoxluğunun obrazı-dır. Bu həllə qeyri səlis təyin olunan **məqsədin** həyata keçirilməsini təmin edən qeyri səlis **təlimat** kimi baxmaq olar.

Alınan həllin qeyri səlistliyi ilkin məsələnin qeyri səlis olmasının nəticəsidir.

Həllin belə qeyri müəyyən təqdim olması icra edilən qeyri səlis **təlimatın** yerinə yetirilməsi qaydası ilə əlaqədar-dır. Belə qeyri **müəyyənlik**, məsələn, təlimatın icrası zamanı x-in konkret qiymətinin seçilməsi ilə əlaqədar qarşıya çıxa bilər. Bu şəkildə qeyri müəyyənliyin mümkün olan müxtəlif həll variantları L.Zadə tərəfindən verilmişdir. Qeyri səlis həll anlayışından qeyri səlis təyin olunmuş şəraitdə dinamik məsələlərin analizində istifadə olunur. Qərar qəbul etmə, daha ümümi məsələ kimi obrazı $f(x)$ funksiyasının qiyməti olan elə konkret $x \in X$ elementinin seçilməsidir ki, bu zaman Y çoxluğundan olan B_x qeyri səlis çoxluq özünün $\chi_{B_x} : X \times Y \to [0,1]$ mənsubluq funksiyası ilə verilir. Qeyri səlis qərar qəbul etmənin ümumi məqsədi isə əvvəldə olduğu kimi $C \subset Y$ qeyri səlis çoxluqla təsvir edilir.

(24.3) məsələsinə analoji olaraq bu məsələnin həlli də elə qeyri səlis $D \subset X$ maksimal (daxil olma mənada) çoxluğun seçilməsindən ibarətdir ki,

$$\left.\begin{array}{l} 1. D \subset A \ (\text{ùÿëëëí éî ëâåðëëÿí ëëéè}) \\ 2. D \odot B \subset C \ (\text{ì ÿãñÿäëí éåðëí ÿ éåàëðëëì ÿñè}) \end{array}\right\} \quad (24.4)$$

münasibətləri ödənsin.

Burada $D \odot B - \chi_B$ mənsubluq funksiyası ilə təsvir olunan $B: X \to Y$ qeyri səlis inikas zamanı D çoxluğunun Y-də obrazıdır.

Tərif. $B: X \to Y$ qeyri səlis inikasda C qeyri səlis çoxluğun obrazı elə maksimal (daxil olma nöqteyi-nəzər-dən) C_x qeyri səlis çoxluğa deyilir ki,

$$C_x \odot B \subset C \quad (24.5)$$

münasibətini ödəsin. Buradan da həllin tərifinə görə

$$D = A \wedge C_x \quad (24.6)$$

olduğunu alırıq. Beləliklə də, verilmiş məsələnin həllinin tapılması qeyri səlis C_x çoxluğunun tapılmasına gətirilir. Bunun üçün isə aşağıdakı kimi təyin edilmiş çoxluqlara baxaq.

$$M = \{(x,y) \in X \times Y,\ \chi_B(x,y) > \chi_C(y)\}, \quad (24.7)$$

$$M_x = \{y \,/\, y \in Y, (x,y) \in M\}, \quad (24.8)$$

$$X^0 = \{x \in X,\ M_x \neq \varnothing\}. \quad (24.9)$$

Göstərmək olar ki, (24.7) - (24.9) şəklində daxil edilmiş çoxluqların köməyilə C_x qeyri səlis çoxluğu

$$\chi_{C_x}(y) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in M_x} \chi_C(y),\ x \in X^0 \ \text{î ëäóãäà}, \\ 1,\ x \in X \setminus X_0 \ \text{î ëäóãäà}, \end{cases} \quad (24.10)$$

mənsubluq dərəcəsilə təyin olunur. Buradan və həllin tərifindən alınır ki, qərar qəbul etmənin ümumi məsələsinin həlli aşağıdakı şəkildə verilmiş mənsubluq funksiyası ilə təsvir olunan qeyri səlis D çoxluğundan ibarətdir:

$$\chi_{C_x}(y)=\begin{cases}\min\{\chi_A(x),\inf\limits_{y\in M_x}\chi_C(y)\},\ x\in X^0\ \text{î ëäóãäà,}\\ \chi_A(x),\qquad\qquad\qquad x\in X\setminus X_0\ \text{î ëäóãäà.}\end{cases}\qquad(24.11)$$

Qərar qəbul etmə prosesində yuxarıda təsvir etdiyimiz yanaşmanı qeyri səlis təyin edilmiş şəraitdə oyunların analizi məsələsinə tətbiq edək.

§ 25. Qeyri səlis məntiqin oyunlar nəzəriyyəsinə tətbiqi

Qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsinin vacib tətbiq sahələrindən biri də qeyri səlis şəraitdə təşkil edilmiş oyunların analizi və qərar qəbul edilməsi məsələsidir. Bu məsələ ümumi şəkildə aşağıdakı kimi qoyulur.

Fərz edək ki, qeyri səlis şəraitdə iki şəxs arasında tennis yarışı keçirilir. Oyunçulardan birini şərti olaraq A, digərini B adlandıraq.

Tutaq ki, X və Y uyğun olaraq A və B oyunçu-ların seçimlərinin (strategiyaların) tam sistemidir (çoxluğu-dur). Əlavə olaraq onu da fərz edək ki, X və Y uyğun olaraq

$$\chi_1 : X\to[0,1]\ \text{və}\ \chi_2 : Y\to[0,1]\qquad(25.1)$$

mənsubluq funksiyaları ilə təsvir olunan qeyri səlis çoxluqlardır.

Tutaq ki, $f_1, f_2 : X\times Y\to\mathrm{Re}$ (Re-həqiqi ədədlər çoxluğudur) funksiyaları verilmişdir. Belə ki, $f_1(x,y)$ və $f_2(x,y)$ funksiyalarının qiymətləri x və y seçimlərinin yol verilən olub olmamasından asılı olmayaraq A və B oyun-çuların malik olduqları şəraitlərdir. A və B oyunçularının məqsədələri Re həqiqi ədədlər çoxluğunda uyğun olaraq $\chi^1_{C_1}$ və $\chi^2_{C_2}$ mənsubluq funksiyaları ilə təsvir olunan C_1 və C_2 qeyri səlis çoxluqların seçilməsidir; hansı ki, $\chi^1_{C_1} : \mathrm{Re}\to[0,1]$, $\chi^2_{C_2} : \mathrm{Re}\to[0,1]$.

Onu da qeyd edək ki, oyunçuların qarşıya qoyduqları məqsəd ola bilər ki, pis təyin olunsun və ya da ümumiyyətlə, onun imkanları ilə uyuşmasın; başqa sözlə strategiyası imkanları çoxluğuna uyğun olmasın.

Bu sonuncu məsələni bir qədər müfəssəl nəzərdən keçirək. Bundan ötəri A və B oyunçuların məqsədə çat-maq üçün qərar qəbul etmələrini istənilən $(x, y) \in X \times Y$ cü-tünü uyuğun olaraq

$$\chi^1(x, y) = \chi_C^1(f_1(x, y)) \text{ və } \chi^2(x, y) = \chi_C^2(f_2(x, y)) \qquad (25.2)$$

mənsubluq funksiyaları ilə təsvir edək.

$X \times Y$ Dekart hasilində D_1 və D_2 qeyri səlis çoxluqları aşağıdakı kimi təyin edilmiş mənsubluq funksiyaları ilə verək:

$$\begin{aligned} \chi_{D_1}^1(x, y) &= \min\{\chi_1(x), \chi^1(x, y)\}, \\ \chi_{D_2}^2(x, y) &= \min\{\chi_2(x), \chi^2(x, y)\}, \end{aligned} \quad (x, y) \in X \times Y. \qquad (25.3)$$

Əgər qeyri səlis təlimatın (göstərişlərin) yerinə yetirilməsi qaydası olaraq x-in elə qiymətinin seçilməsini qəbul etsək ki, ona uyğun mənsubluq funksiyası maksimal qiymət alır, onda baxılan oyunda oyunçuların məqsədini daha dəqiq ifadə etmək olar. Aydındır ki, $\chi_{D_i}^i \ (i = 1, 2)$ funksiyalarının qiyməti nə qədər böyük olsa, A və ya B oyunçuları da məqsədlərinə bir o qədər yaxın olar. Deyilənləri nəzərə al-saq baxılan oyunun nəticəsini adi qaydada belə ifadə etmək olar:

$\chi_{D_1}^1$ və $\chi_{D_2}^2$ uduş funksiyalarının qiymətləri oyunçuların X və Y strategiyaları çoxluğundan asılıdır.

Əgər oyunçu ancaq öz imkanlarına tam etibar edər-sə, onda təbii ki, onun ariyentasiyası ən çox uduş əldə et-məklə şərtlənəcəkdir. Bununla belə hər bir oyunçunun uduş əldə etməsi üçün onun digər oyunçunun maraq və imkanları haqqında daha çox informasiyaya malik olması mühüm rol oynayır.

Əgər, məsələn, A oyunçu özünün strategiyasını bi-rinci seçmək və bu seçimi B oyunçuya ötürmək imkanına malikdirsə, onda A oyunçunun uduş üçün ən böyük təmi-nat əldə etməsi belə bir düsturla hesablanacaq:

$$M_1 = \max_{x \in X, y \in Y(x)} \min \chi^1_{D_1}(x, y) =$$

$$= \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} \min\{\chi_1(x), \chi^1(x, y)\}. \qquad (25.4)$$

(25.4) ifadəsində iştirak edən x-dən asılı $Y(x)$ çox-luğu A oyunçunun digər B oyunçunun malik olduğu ma-raq və imkanları haqqında nə dərəcədə məlumatlı olmasını əks etdirir.

Əgər M_1 kəmiyyəti kifayət qədər kiçik olarsa, onda bu o deməkdir ki, A oyunçunun məqsədinə çatmasına (onun imkanlarını nəzərə almaqla) yaxınlığı da bir o qədər yüksək olar.

Bu isə o deməkdir ki, verilmiş şəraitdə (seçimlər, maraqlar, informasiyalar, imkanlar və s.) A oyunçunun uduş şansı B oyunçuya nisbətən daha yüksəkdir.

Belə olan halda təbii olaraq aşağıdakı kimi məsələ qarşıya çıxa bilər.

Fərz edək ki, A oyunçunun mənsubluq funksiyası χ_C olan qeyri səlis məqsədlər çoxluğu verilmişdir. Onun startegiyasnın qeyri səlis çoxluğu necə olmalıdır ki, B oyunçu haqqında bütün informasiyalar məlum olduqda A oyunçunun məqsədə çatması qarantiyasının (təminatının) dərəcəsi hər hansı verilmiş $a \in [0,1]$ ədədindən kiçik ol-masın? Başqa sözlə A oyunçunun strategiyasının qeyri səlis çoxluğunu təsvir edən χ_1 funksiyası necə olmalıdır ki,

$$\max \min\{\chi_1(x), \min \chi^1(x, y)\} \geq a \qquad (25.5)$$

olsun. Bu məsələnin tərsinin də mənası vardır. Tərs məsələni belə formulirovka etmək olar: A oyunçunun strategiyasının qeyri səlis çoxluğu verilir. Bu oyunçu təminatının dərəcəsi a-

dan ($a \in [0,1]$) kiçik olmayan hansı məqsədləri yerinə yetirə bilər? Bütün bu məsələlər C.A.Orlovskinin «Qeyri səlis şəraitdə oyunlar» adlı tədqiqat işlərində öz həllini tapmışdır.

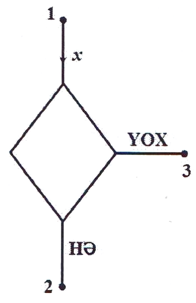
§ 26. Qeyri səlis məntiqin blok-sxemlərə tətbiqi

Qeyri səlis məntiqin geniş tətbiq sahələrindən biri də onun qeyri səlis alqoritmlərin təsviri və realizasiyasından ibarətdir. Məlumdur ki, bir qayda olaraq dəyişənlər ara-sındakı münasibətləri təyin etmək və blok-sxemlərin kömə-yilə bu dəyişənlərin konkret qiymətlərini mənimsətmək alqoritmlər nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biridir.

Ona görə də bu paraqrafda biz mürəkkəb olmayan qeyri səlis alqoritmlərin təsviri və müxtəlif məsələlərin həlli-
nin alqoritmik reallaşdırılması ilə məşğul olacağıq.

Məqsədimiz ancaq qeyri səlis predikatları baza dəyişənləri üzərinə qoyulmuş məhdudluq təyinatları ilə əla-qələndirmək və onların blok həllərini tapmaqdan ibarətdir.

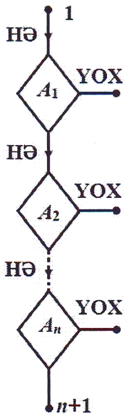
Əvvəlcə adi (qeyri səlis olmayan) bloklarda $A(x)$ biryerli predikatlara uyğun blok həlləri nəzərdən keçirək (şəkil 24). Yəni elə blok həllərə baxaq ki, onların birdən çox çıxışı olmasın.



Şəkil 24.

Bu blok-sxemdə 1 nöqtəsindən 2 nöqtəsinə keçid göstərir ki, $A(x) =$ **äî üðó**, eyni zamanda 1 nöqtəsindən 3 nöqtəsinə keçid isə onu ifadə edir ki, $A(x) =$ **éàëàí** .

İndi isə qeyri səlis blok-sxemlər üçün blok həll anlayışını daxil edək (şəkil 25).



Şəkil 25.

Fərz edək ki, A U universal çoxluğun qeyri səlis altçoxluğudur. x baza elementinin A qeyri səlis çoxluqla münasibətini müəyyən edən blok həllə uyğun belə sual qoyaq: «x A-dırmı?», məsələn, «dövrə qapalıdırmı?», «tələbə əlaçıdırmı?» və s. Burada x ilkin dəyişənin ümumi adı, $A(x)$ isə biryerli predikatdır (xassədir). Bu tip (şəkil 25-də göstərilən) blok həllərə malik blok-sxemlərə qeyri səlis blok-sxemlər deyilir.

Əgər «x A-dırmı» sualının cavabı sadəcə HƏ olar-sa, onda x üzərində qoyulmuş məhdudiyyətin təyinat qiyməti olaraq A götürülür; daha doğrusu

$$R(x) = A \qquad (26.1)$$

götürərək x-i 1 nöqtəsindən 2 nöqtəsinə köçürürük. Əksinə əgər cavab YOX isə onda

$$R(x) = \overline{A} \qquad (26.2)$$

qəbul edərək x-i 1 nöqtəsindən 3 nöqtəsinə köçürürük (bax şəkil 24).

Məsələn, əgər söhbət elektrik dövrəsindən gedirsə, onda dövrədə gedən prosesi $A(x)$-lə işarə etsək (26.1) və (26.2) tənliklərini uyğun olaraq

$R(x) =$ **Ãàï àëû** (26.3)

və

$R(x) =$ **Ãàï àëûdeyil** (26.4)

təyinat tənliklərlə əvəz edə bilərik. Əgər HƏ, YOX cavablı sualı «dövrə açıqdırmı?» kimi səsləndirsək, onda (26.3) və (26.4) tənliklərin uyğun olaraq

Ãàï àëû= Ùß (26.5)

À÷ûã = ÉÎ Õ (26.6)

şəklində yazarıq. x dəyişəninin başlanğıc nöqtədən 2 nöqtəsinə köçürülməsi hadisəsini A ilə, onun baş verməsi (x-in A xassəsinə malik olması) ehtimalını $0 \le \chi \le 1$ ilə işarə edək. Həmin bu χ ədədini eyni zamanda verilmiş suala HƏ çavabı verilməsi ehtimalının linqvistik qiyməti hesab edərək, özünü də x elementinin A qeyri səlis çoxluğa mənsubluq dərəcəsi adlandırıb, Ùß $/ \chi$ kimi göstərəcəyik. Əgər cavab YOX isə, bu halda x-in $\bar{A}$ çoxluğuna mənsubluq dərəcəsi $1-\chi$ olmaqla 1 nöqtəsi 3 nöqtəsinə köçürülür (bax şəkil 24).

Əgər χ mənsubluq dərəcəsi ədəd deyil, linqvistik qiymət alırsa, onda biz bu qiyməti doğruluğun linqvistik qiyməti kimi təqdim edirik.

Belə halda suallara verilən cavablar bir qayda olaraq HƏ/**doğru**, HƏ/**çox doğru**, HƏ/**çox çox doğru**, HƏ/**az və ya çox doğru** və s. kimi göstərilir.

Göründüyü kimi burada Ùß $/ \chi$ yazılışında χ **doğru, çox doğru, çox çox doğru** və s. kimi linqvistik qiymətlər alır. Əgər blok həllər şəkil 25-də olduğu kimi zəncir vasitəsilə verilərsə, onda HƏ cavablar ardıcıllığı x-i 1 nöqtəsindən $n+1$ nöqtəsinə köçürür və nəticədə $R(x)$ məhdudiyyət şərti $A_1, A_2, ..., A_n$ qeyri səlis çoxluqların kəsişməsindən ibarət olacaqdır:

$$R(x) = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n \, . \qquad (26.7)$$

Misal. Tutaq ki, $x = \text{Ì ÿòèí}$, $A_1 = \textbf{àüûëû}$, $A_2 = \textbf{÷î õ ãî ÷àã}$ termlərindən ibarətdir. Bu halda əgər Mətin ağıllıdır? sua-lının cavabı HƏ, eyni zamanda Mətin çox qoçaqdır? sua-lının da cavabı HƏ olarsa, onda Mətin dəyişənin şərtləndiyi linqvistik məhdudiyyət

$$R(\text{Ì ÿòèí}) = \textbf{àüûëû} \bigcap \textbf{÷î õ ãî ÷àã} \qquad (26.8)$$

şəklində olacaqdır.

Qeyd edək ki, burada Mətin binar linqvistik dəyişə-nin adı, **ağıllı** və **çox qoçaq** onun komponentləridir.

Ağıllı və **çox qoçaq** linqvistik qiymətləri Mətin ilkin termini keyfiyyətcə xarakterizə edir.

§ 27. Bir daha mənsubluq funksiyası haqqında

Biz hər dəfə verilmiş U universal çoxluğun A qeyri səlis altçoxluğunu qurarkən tamamilə müəyyən qayda ilə $\chi(u): U \to [0,1]$ inikasının və ya *mənsubluq* funksiyasının verildiyini nəzərdə tuturuq. Deməli, qeyri səlis altçoxluğun törədilməsi, əsasən, iki faktorla müəyyən olunur:

1. U ilə işarə etdiyimiz universal çoxluq;
2. Hər bir $u \in U$ elementinin qeyri səlis A altçoxluğuna mənsubluq dərəcəsi.

Qeyri səlis məntiqdə qoyulmuş hər bir məsələ üçün U universal çoxluq konkret olaraq verilir. O ki, qaldı mən-subluq funksiyasına, bu funksiya məsələnin xarakterinə uy-
ğun olaraq müxtəlif variantlarla qurula bilər:

a) məsələnin mahiyyətinə uyğun olaraq peşəkar tədqiqat-çının təxəyülünün məhsulu kimi sözlərlə;
b) analitik olaraq hər hansı düsturla;
c) hər hansı xarakterik əyri ilə ifadə olunan qrafiki yolla.

Bu vəziyyətləri ayrı-ayrılıqda şərh edək.

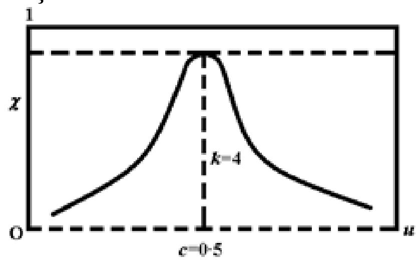
Mənsubluq funksiyasının sözlərlə verilməsi o deməkdir ki, U universal çoxluğun u elementinin A qeyri səlis altçoxluğa hansı $\chi(u)$ birgəlik qiyməti ilə daxil olması əvvəlcədən məlum olur və buna əsasən $A = \sum_{U} \chi(u)/u$ altçoxluğu qurulur. Məslən, I fəsil §4-ün sonuncu misalında mənsubluq funksiyası sözlərlə verilmişdir.

Mənsubluq funksiyası düsturla verilə bilər.

Məsələn, Qaus mənsubluq funksiyası adlanan eksponensial funksiya

$$\chi(u) = e^{-\frac{u-c}{k}} \qquad (27.1)$$

düstur şəklində verilmişdir, burada c və k parametrlərdir. c parametri qeyri səlis çoxluğun mərkəzi (dönmə nöqtəsi), k parametri isə funksiyanın təsvir etdiyi əyrinin əyriliyidir (şəkil 26). Şəkildən göründüyü kimi (27.1) düsturunda c=0·5 və k=4 götürülmüşdür.



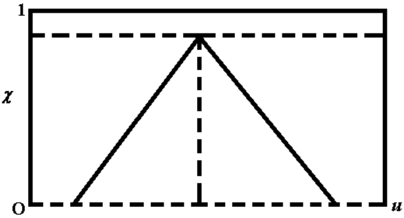
Şəkil 26.

Mənsubluq funksiyasının düsturla verilməsinə daha bir nümunə göstərək:

$$\chi(u)=\begin{cases}1-\dfrac{b-u}{b-a},\ a\le u\le b \text{ î ëäóãäà},\\ 1-\dfrac{u-b}{c-b},\ b\le u\le c \text{ î ëäóãäà},\\ 0, \qquad \text{ãàëàí ùàëëàðäà.}\end{cases} \tag{27.2}$$

Göründüyü kimi (27.2) düsturu üç dənə *a, b, c* ədədləri vasitəsilə təyin olunur. Hər bir konkret məsələyə uyğun *a, b* və *c* ədədləri verilir.

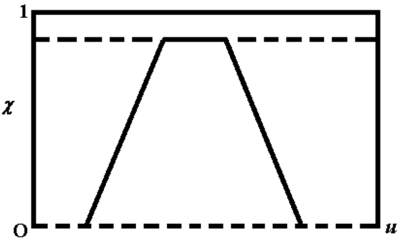
(27.2) funksiyası *b-a=c-b* olduqda simmetrik mənsubluq funksiyası adlanır və (*a, b, c*) üçlüyünün ikisinin verilməsilə birqiymətli təyin olunur.



Şəkil 27.

(27.2) ifadəsi üçbucaq mənsubluq funksiyası adlanır. (27.2) funksiyasının simmetrikliyi halı yuxarıdakı qrafiklə təsvir olunur (şəkil 27).

Mənsubluq funksiyasının qrafiki şəkildə verilişi.



Şəkil 28.

II fəsil §13-də verilmiş əyri (şəkil 12) **zənginlik** qeyri səlis altçoxluğun mənsubluq funksiyasının qrafiki təsviridir.

Mənsubluq funksiyasının trapesial adlanan daha bir qrafiki göstərilişini nəzərdən keçirək (şəkil 28).

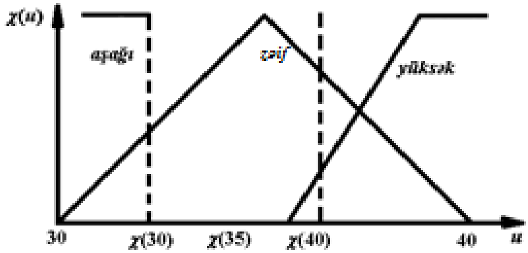
Qeyri səlis linqvistik dəyişən və onun vasitəsilə düzəldilən qeyri səlis altçoxluğu müəyyən edən mənsubluq funksiyasının qrafikinin qurulmasına aid bir misalda gös-tərək. Linqvistik dəyişən olaraq «Qızılın qiyməti» anlayışını götürək. Term çoxluq olaraq aşağıdakı üç qeyri səlis dəyi-şənləri qəbul edək

$$T=\{\textbf{aşağı, zəif, yüksək}\}.$$

Tədqiqat oblastı (uinversal çoxluq) olaraq manatla hesab-lanan

$$U=[30,40]$$

parçasındakı tam ədədləri götürək.



Şəkil 29.

Şəkil 29-da «Qızılın qiyməti» linqvistik dəyişənin $\chi(u)$ mənsubluq funksiyasının qrafiki verilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Aleksandrov P.S. – Vvedenie v obhuö teoriö mnojestv i funküiy. M., Qostexizdat, 1948.
2. Qilbert D., Akkerman B. – Osnovı teoretiçeskoy loqiki. M., «Mir», 1947.
3. Qilbert D., Bernays P. – Osnovaniə matematiki. Loqiçeskie isçisleniə i formalizaüiə arifmetiki. M., «Nauka», 1982.
4. Qilbert D., Bernays P. - Osnovaniə matematiki. Teoriə dokazatelğstva. M., «Nauka», 1982.
5. Qindikin S.Q. – Matematiçeskaə loqika v zadaçax. M., «Nauka», 1972.

6. Quliyev Ə.U. - Riyazi məntiq və alqorifmlər nəzəriyyəsi. Bakı, Maarif, 1996.
7. Quliyev Ə.U., Əhədov R.Ə. – Bul funksiyaları. Alqoritmlər nəzəriyyəsi. Bakı, «Maarif», 2000.
8. Quliyev Ə.U., Neymətov N.Ə. – Riyazi məntiq. Çoxluqlar nəzəriyyəsinin aksiomatik qurulması. Gəncə, 2011.
9. Kalujnin L.A. – Çto takoe matematiçeskaə loqika. M., «Nauka», 1964.
10. Keysler Q., Çen Ç. – Teoriə modeley. M., «Mir», 1977.
11. Klini S.K. – Vvedenie v matematiku. M., İL, 1957.
12. Lavrov İ.A., Maksimova L.L. – Zadaçi po teorii mnojestv, matematiçeskoy loqike i teorii alqoritmov. M., «Nauka», 1972.
13. Mendelğson E. – Vvedenie v matematiçeskuö loqiku. M., «Nauka», 1984.
14. Novikov P.S. – Glementı matematiçeskoy loqiki. M., «Fizmatqiz», 1959.
15. Peter R. – Rekursivnıe funküii. M., İL., 1954.
16. Stol R. – Mnojestva. Loqika. Aksiomatiçeskie teorii. M., «Prosvehenie», 1967.
17. Çerç A. – Vvedenie v matematiçeskuö loqiku. Tom 1 i 2. M., «Mir», 1960.
18. L.A.Zade – Ponətie linqvistiçeskoy peremennoy i eqo primenenie k prinətiö priblijennıx reşeniy. İzdotelstvo «Mir», Moskva, 1976.
19. L.A.Zade – Osnovı novoqo poxoda k analizu slojnıx sistem i proüessov prinətiə reşeniy. «Znanie», 1974.
20. Orlovskiy S.A. – Ob odnoy zadaçe prinətiə reşeniy v neçetko opredelennoy obstanovke. «Voprosı prik. matematiki», İrkutsk, 1976.
21. Orlovskiy S.A. – İqrı v neçetko opredelennıx obstonovke. «İzdatelğstvo», MQU, Moskva, 1972.
22. Əliyev R.Ə. Avtomatik idarəetmə. Bakı: Maarif, 1993.
23. Aliev R.A. Metodı inteqraüii v sistemax upravleniə proizvodstvom. Moskva: Energoatomizdat, 1989.

24. Aliev R.A., Aliev F.T., and Babaev M.D., Fuzzy Process Control and Knowledge Engineering. Koln: Verlag TUV Rheinland, 1991.
25. Aliev R.A., Bonfig K.W., and Aliev F.T., Soft Computing, Technik Verlag, Berlin, Germany, 2000.
26. Aliev R.A., and Aliev R.R., Soft Computing and its Application, World Scientific, New Jersey, London, Singapure, Hong Kong, 2001.

MÜNDƏRİCAT

III FƏSİL. ÇOXLUQLAR CƏBRİ

IV FƏSİL. MÜLAHİZƏLƏR HESABI

V FƏSİL. PREDİKATLAR CƏBRİ

VI FƏSİL. BİRİNCİ TƏRTİB NƏZƏRİYYƏLƏR

VII FƏSİL. NATURAL ƏDƏDLƏR SİSTEMİ FORMALLAŞDIRILMIŞ NƏZƏRİYYƏ KİMİ

VIII FƏSİL. ÇOXLUQLAR NƏZƏRİYYƏSİNİN AKSİOMATİK QURULMASI

IX FƏSİL. REKURSİV HESABLANAN FUNKSİYALAR VƏ ÇOXLUQLAR

II HİSSƏ

I FƏSİL. QEYRİ SƏLİS ÇOXLUQLAR

II FƏSİL. QEYRİ SƏLİS MƏNTİQ

III FƏSİL. QEYRİ SƏLİS MƏNTİQİN TƏTBİQLƏRİ