E.Ə. DADAŞOV

RELYATİVİSTİK KVANT MEXANİKASI

(Məsələlərdə)

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

Lənkəran Dövlət Unversitetinin Elmi Şurasının 27 aprel 2022 ci il tarixli 04 saylı iclas protokolu ilə dərs vəsaitinə nəşr hüququ verilmişdir.

Lənkəran- 2022

Elmi redaktor: **f.ü.e.d. A.İ. Əhmədov**
(BDU, “Nəzəri fizika” kafedrasının professoru)

Rəy verənlər:

M.R. Rəcəbov f.r.e.n. BDU – “Nəzəri fizika” kafedrasının dosenti

V.H. Bədəlov f.r.e.n., dos., BDU - Fizika problemləri İnstitutunun aparıcı elmi işçisi.

Elnur Dadaşov
Relyativistik kvant mexanikası (Məsələlərdə).
Dərs vəsaiti. ***Lənkəran, 2022. 125 səh.***

Dərs vəsaiti kvant mexanikasının relyativistik mexanika bölməsini əhatə edir. Dərs vəsaitində relyativistik kvant mexanikasının aktual məsələlərini özündə əks etdirən nəzəri materiallarla yanaşı maraq kəsb edən məsələlərin həlləri verilmişdir.

Universitetlərin “Fizika” və “Fizika müəllimliyi” ixtisası üzrə təhsil alan bakalavr və magistrləri üçün nəzərdə tutulmuş bu vəsaitdən doktorantlar, elmi işçilər və relyativistik kvant mexanikası ilə maraqlanan mütəxəssislər istifadə edə bilərlər.

M Ü N D Ə R İ C A T

Ön söz

Relyativistik kvant mexanikası nəzəri fizikanın bir bölməsi olub, işıq sürətinə yaxın sürətlə hərəkət edən mikrozərrəciklərin (elektron və s.) hərəkətinin relyativist (nisbilik nəzəriyyəsinin tələblərini ödəyən) kvant qanunlarını öyrənir.

Relyativistik kvant mexanikası kvant mexanikasının ixtiyari kovariant Puankare xülasəsidir. Bu nəzəriyyə yüksək enerjilər fizikasına, zərrəciklər fizikasına, sürət-ləndiriclər fizikasına, həmçinin atom fizikasına tətbiq oluna bilər.

Relyativistik kvant mexanikasının əsas xüsusiyyətlərinə aşağıdakı öncəgörmələr daxildir: antimaddənin mövcudluğu, spini ½ olan fermionların spin maqnit momentinə malik olması, elektromaqnit sahəsində yüklü zərrəciklərin kvant dinamikası və incə quruluşu. Açar rolunu isə bu öncəgörmələrin birbaşa alındığı Dirak tənliyi oynayır.

Qeyri - relyativistik kvant mexanikasında isə tam tərsinə olaraq təcrübi nəticələrlə uzlaşmaq üçün müəyyən hədləri hamilton operatoruna süni olaraq daxil etmək lazım gəlir.

Ən uğurlu və ən geniş tətbiq olunan relyativistik kvant mexanikası sahənin relyativistik kvant nəzəriyyəsidir. Sahənin kvant nəzəriyyəsində elementar zərrəciklər sahənin kvantı kimi təsvir olunur.

Sahənin kvant nəzəriyyəsinin relyativistik kvant mexanikasında test olunan unikal tədqiqatı materiyanın yaranması və annihilyasiyası zamanı zərrəciklər sayının saxlanması qanununun pozulmasıdır.

Təqdim olunan dərs vəsaitində relyativistik kvant mexanikasının əsasını təşkil edən Kleyn - Fok – Gordon və Dirak tənliklərinin əsasları, tam hərəkət miqdarı momenti, onların məxsusi funksiyaları təhlil olunmuşdur. Həmçinin Kleyn - Fok – Gordon və Dirak tənliklərinin qeyri-relyativistik limiti, sərbəst zərrəciyin hərəkəti, neytrino üçün Dirak tənliyinin həlli verilmiş, elektromaqnit sahəsində hərəkət edən zərrəcik üçün Kleyn - Fok – Gordon və Dirak tənlikləri həll olunmuş-dur.

Eyni zamanda maraq kəsb edən bəzi məsələlərin həlləri verilmişdir. Ümid edirik ki, bu vəsait oxucular tərəfindən maraqla qarşılanacaqdır.

Müəllif

§ 1. Dörd ölçülü vektor – operatorlar və onlar üzərində əməllər

Əvvəlcə istifadə edəcəyimiz vektor-operatorların ifadələrini daxil edək:

$$x = (ct, x, y, z) \qquad \text{(4-ölçülü radius vektoru)}$$

$$p = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \qquad \text{(4-ölçülü impuls)}$$

$$A = (A_0, A_x, A_y, A_z) \qquad \text{(4-ölçülü potensial)}$$

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \qquad \text{(4-ölçülü qradient)} \qquad (1)$$

(1)-də x, p, A və ∇ - 4-ölçülü vektorlardır. 4-ölçülü vektorlarla hesab əməllərini yerinə yetirərkən metrik tenzordan da istifadə olunur. 4 - ölçülü $g_{\mu\nu}$ metrik tenzoru aşağıdakı matrislə təsvir etmək olar:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Beləliklə, $dx = \{dx^\mu\}$ vektorunun uzunluğunu aşağıdakı şəkildə:

$$ds^2 = dx \cdot dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

yaza bilərik. Bu yazılış xüsusilə metrik tenzorun təyinində də istifadə olunur. Kontravariant formada olan $g^{\mu\nu}$ tenzorundan aşağıdakı xassəni ala bilərik:

$$g^{\mu\delta}\cdot g_{\delta\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$g^{\mu\delta}=\left(g^{-1}\right)_{\mu\delta}=\frac{\Delta_{\mu\delta}}{g}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad 4)$$

Burada, $\Delta_{\mu\sigma}$ köməkçi faktordur, yəni sətir və sütunların üstündən xətt çəkərək və $(-1)^{\mu+\sigma}$ tərəfindən əldə edilən ədədə vurmaqla təyin olunan alt determinantdır. g isə $g_{\mu\nu}$ metrik tenzorunun determinantından $g\equiv\det(g_{\mu\nu})=-1$ tapılır. Xüsusi Lorens metrikasında kontravariant və kovariant metrik tenzorlar ekvivalentdirlər:

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu} \tag{5}$$

4- ölçülü kontrvariant vektor aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$x^{\mu}=\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)=\left(ct,x,y,z\right) \tag{6}$$

Kontravariant vektordan kovariant vektora keçid $g_{\mu\nu}$ - metrik tenzorun köməyi ilə mümkündür, yəni:

$$x_{\mu}=g_{\mu\nu}x^{\nu}=\left(x_0,x_1,x_2,x_3\right)=\left(ct,-x,-y,-z\right) \tag{7}$$

İki 4-ölçülü vektorların hasilinə baxaq:

$$x \cdot x = x^{\mu} \cdot x_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu} \cdot x_{\mu} = x^{0} \cdot x_{0} + x^{1} \cdot x_{1} + x^{2} x_{2} + x^{3} \cdot x_{3} = \\ = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^{\,2} \tag{8}$$

Analoji olaraq 4-ölçülü impuls vektoru üçün də yaza bilərik:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \tag{9}$$

İki 4-ölçülü impuls vektorunun skalyar hasilini hesablasaq:

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^{\mu} \cdot p_{2\mu} = \frac{E_1}{c} \cdot \frac{E_2}{c} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \tag{10}$$

həmçinin

$$x \cdot p = x^{\mu} \cdot p_{\mu} = x_{\mu} \cdot p^{\mu} = E \cdot t - \vec{r} \cdot \vec{p} \tag{11}$$

Beləliklə, ixtiyari 4-ölçülü vektoru aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \tag{12}$$

3-ölçülü vektor isə

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{13}$$

şəklində yazılır. 4-ölçülü impuls operatoru aşağıdakı formada təyin olunur:

$$\hat{p}^{\mu} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} = i\hbar \vec{\nabla}^{\mu} = \\ = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right\} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial (ct)} - \vec{\nabla} \right\}. \tag{14}$$

$$\hat{p}^{\mu}\cdot\hat{p}_{\mu}=-\hbar^{2}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=-\hbar^{2}\left(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)\right)=-\hbar^{2}\left(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\Delta\right) \qquad (15)$$

4-ölçülü impuls və koordinat arasında kommutasiya münasibəti belə təyin olunur:

$$\left[p^{\mu},x^{\nu}\right]=i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_{\mu}},g^{\nu\tau}x_{\tau}\right]=i\hbar g^{\nu\tau}\frac{\partial x_{\tau}}{\partial x_{\mu}}=$$

$$=i\hbar g^{\nu\tau}\delta_{\tau}^{\mu}=i\hbar g^{\nu\mu}=i\hbar g^{\mu\nu}$$

Beləliklə,

$$\left[p^{\mu},x^{\nu}\right]=i\hbar g^{\mu\nu} \qquad (16)$$

alırıq.

§ 2. Kleyn-Fok-Qordon tənliyi

Spini sıfır olan zərrəciyi relyativistik kvant mexanikasında təsvir edən tənlik Kleyn-Fok-Qordon tənliyidir. Şredinger tənliyininin üzləşdiyi çətinliklər bu tənlikdə aradan qaldırılır. Şredinger tənliyinin alınması üsullarından biri də zərrəciyin Hamilton funksiyasından istifadə etməkdir. Hamilton funksiyasında impulsa qarşı impuls operatoru, enerjiyə qarşı enerji operatoru qoyulur, yəni:

$$E=\frac{\vec{p}^{2}}{2m}+V(r) \qquad (1)$$

$$\vec{p}\rightarrow\hat{\vec{p}}=-i\hbar\vec{\nabla}$$

$$E\rightarrow\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad (2)$$

nisbilik nəzəriyyəsinin tələblərini ödəyən, yəni Lorens çevrilmələrinə görə invariant olan tənlik almaq üçün enerji, impuls və kütlə arasında nisbilik nəzəriyyəsindən alınan münasibətdən istifadə edək:

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \tag{3}$$

(2) əvəzləməsini (3)-də nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4}\,\psi \tag{4}$$

Lakin operatorun kvadrat kökünün nə demək olduğunu bilavasitə bilmədiyimiz üçün, bu ifadənin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək. Bu əməliyyat riyazi nöqteyi nəzərdən tam təyin olunmuş tənliyə gətirir:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t} = -c^2 \hbar^2 \nabla^2 \psi + m_0^2 c^4 \psi \tag{5}$$

$$\left(c^2 \hbar^2 \nabla^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2 c^4 \right) \psi = 0 \tag{6}$$

(6) tənliyi, sərbəst zərrəcik üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyidir. Bu tənlik spini sıfır olan zərrəciklərin relyativistik dalğa tənliyidir. Bu tənliyi relyativistik invariant şəkildə yazmaq üçün 4 ölçülü vektor-operator daxil edək:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{r})$$

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial (ct)} - \vec{\nabla} \right) = \left(\hat{p}_0, \hat{\vec{p}} \right) \tag{7}$$

Onda (6) tənliyini aşagıdaki formada yaza bilərik :

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{8}$$

$$\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}-m_0^2c^2\right)\psi=0$$

və ya:

$$\left(\Box+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0 \tag{9}$$

Burada $\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - Dalamber operatorudur. Bilavasitə (8) tənliyinin Lorens invariant olduğunu göstərə bilərik, $\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}$- Lorens invariantdır. (9) tənliyinə kütlə həddinin - $\frac{m_0^2c^2}{\hbar}$ daxil olmasını nəzərə almaqla klassik dalga tənliyi kimi baxa bilərik. Bu tənliyin sərbəst həlli asağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$\psi=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(p_0x^0-\vec{p}\vec{r}\right)\right]=$$
$$=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\vec{r}-Et\right)\right] \tag{10}$$

(10) ifadəsini (8)-də nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}\psi=m^2c^2\psi\rightarrow\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)=$$
$$=p^{\mu}p_{\mu}\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)$$

$$p^{\mu}p_{\mu}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)=m_0^2c^2\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p^{\mu}p_{\mu}=m_0^2c^2$$

və ya

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\vec{p} = m_0^2 c^2$$

$$E = \pm\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}} \qquad (11)$$

Beləliklə KFQ (8) tənliyinin iki həlli - $E = +c\left(m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}\right)^{1/2}$ müsbət enerjiyə uyğun həll və $E = -c\left(m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}\right)^{1/2}$ mənfi enerjiyə uyğun həlləri mövcuddur. Mənfi enerjiyə uyğun həll antizərrəciyi təsvir edir.

4 - ölçülü cərəyan sıxlığının - j^{μ} aşkar ifadəsini tapmaq üçün (8) ifadəsindən istifadə edək:

$$\left(\hat{p}_{\mu}\hat{p}^{\mu} - m_0^2 c^2\right)\psi = 0 \qquad (12)$$

Bu ifadədən kompleks qoşma alaq :

$$\left(\hat{p}_{\mu}\hat{p}^{\mu} - m_0^2 c^2\right)\psi^* = 0 \qquad (13)$$

(12) ifadəsini soldan ψ^*-a, (13) ifadəsini isə sağdan ψ-ə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq, onda:

$$\psi^*\left(\hat{p}_{\mu}\hat{p}^{\mu} - m_0^2 c^2\right)\psi - \psi\left(\hat{p}_{\mu}\hat{p}^{\mu} - m_0^2 c^2\right)\psi^* = 0 \qquad (14)$$

və ya

$$-\psi^*\left(\hbar^2\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} + m_0^2 c^2\right)\psi + \psi\left(\hbar^2\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} + m_0^2 c^2\right)\psi^* = 0 .$$

Buradan da,

$$\nabla_{\mu}\left(\psi^*\nabla^{\mu}\psi - \psi\nabla^{\mu}\psi^*\right) = \nabla_{\mu} j^{\mu} = 0 \qquad (15)$$

4- ölçülü cərəyan sıxlığı - j^{μ} aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$j^{\mu}=\frac{i\hbar}{2m_0}\left(\psi^{*}\nabla_{\mu}\psi-\psi\nabla_{\mu}\psi^{*}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\right)\right]+$$

$$+div\left(-\frac{i\hbar}{2m_0}\right)\left[\psi^{*}\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^{*}\right]=0 \tag{17}$$

(17) tənliyi bilavasitə kəsilməzlik tənliyidir.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\vec{j}=0. \tag{18}$$

Burada ρ - yüklərin həcmi sıxlığıdır. (18) tənliyini bütün konfiqurasiya fəzası üzrə inteqrallasaq:

$$\int\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x=-\int\limits_V div\vec{j}d^3x=-\int\limits_F\vec{j}d\vec{F}=0. \tag{19}$$

Bərabərliyin sağ tərəfi

$$\int\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho d^3x.$$

Sol tərəf isə

$$\int\limits_V div\vec{j}d^3x=\int\limits_F\vec{j}dF=0.$$

olar. Onda

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho d^3x=0$$

alarıq. Buradan uyğun olaraq

$$\int\limits_V\rho d^3x=const.$$

Bu zamana görə sabitdir. Yük sıxlığını təbii olaraq belə yaza bilərik:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right). \tag{20}$$

Amma buna baxmayaraq (20) ifadəsinin interpretasiyasında problem yaranır. Verilmiş t zamanı üçün ψ və $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ixtiyari qiymətlər ala bilir: Yəni (20)-də $\rho(x,t)$ həm müsbət, həm mənfi ola bilir. (20) ifadəsinin qeyri-relyativistik yaxınlaşmasında

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\frac{E\psi^*\psi}{i\hbar} + \frac{E\psi^*\psi}{i\hbar}\right) =$$

$$= \frac{2E\psi\psi^*}{2m_0c^2} = \frac{E\psi\psi^*}{m_0c^2},$$

$$\rho = \frac{E\psi\psi^*}{m_0c^2}.$$

Göründüyü kimi $\rho \sim E$ və E - həm müsbət, həm də mənfi qiymətlər alır. ρ ehtimal sıxlığı isə mənfi ola bilməz. Deməli, KFQ nəzəriyyəsində dalğa funksiyası ehtimal sıxlığını təyin edə bilməz. KFQ tənliyinin əsas çətinliyi də budur.

§ 3. Kleyn-Fok-Qordon sahəsinin enerji - impuls tenzoru

Klassik mexanikada enerji Laqranj funksiyası ilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$H = \sum_i \pi_i \dot{q}_i - L \tag{1}$$

Klassik mexanikada sistemin Laqranj funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$L = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{2}$$

Burada q – ümumiləşmiş koordinatdır. Sistemin tam enerjisi isə:

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \tag{3}$$

kimidir. (2) - ifadəsindən $\frac{kx^2}{2}$ - ni tapıb, (3) – də yerinə yazaq:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - L$$

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\dot{q}^2}{2} - L = m\dot{q}^2 - L$$

$\pi = m\dot{q}$ əvəzləməsini aparıb, cəm götürsək, (1) ifadəsini alarıq.

Klassik hərəkət tənliyi təsir inteqralının variasiyasından aşağıdakı formada tapılır:

$$\delta \int L dt = 0 \tag{4}$$

Bu isə öz növbəsində aşağıdakı şəkildə Laqranj tənliyinə gətirir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{5}$$

Sahə nəzəriyyəsində də analoji konsepsiyaya əsaslanaraq Laqranj sıxlığından istifadə edirlər. Sahə nəzəriyyəsində Laqranj sıxlığı aşağıdkı şəkildə işarə olunur:

$$\mathcal{L}\left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right) \tag{6}$$

Yəni (6) Laqranj sıxlığını həcm üzrə inteqrallasaq Laqranj funksiyasını alarıq:

$$L = \int_V \mathcal{L}\left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right) d^3x \qquad (7)$$

Ümumiyyətlə Laqranj sıxlığı $\mathcal{L}$ - dalğa sahəsinin ψ_σ - variasiyasından və həmçinin $\partial \psi_\sigma / \partial x_\mu$ törəməsindən asılıdır. Amma burada yüksək tərtibli törəmələrə baxılmır. Çünki belə olan halda bu törəmələr qeyri-lokal nəzəriyyəyə gətirir. Ona görə (4) variasiya prinsipini belə yaza bilərik:

$$\delta \int L dt = \delta \int \mathcal{L}\left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right) d^3x dt =$$

$$= \delta \int \mathcal{L}\left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right) d^4x = 0 \qquad (8)$$

$$\delta \int \mathcal{L}\left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right) d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} \delta \psi_\sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} \delta\left(\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu}\right)\right] d^4x = 0 \qquad (9)$$

Burada variasiya ilə törəmənin yerini dəyişmə mexanizmindən istifadə edək:

$$\delta \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi_\sigma + \delta \psi_\sigma) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta \psi_\sigma) \qquad (10)$$

(9) ifadəsində ikinci həddə hissə-hissə inteqrallama formulunu tətbiq etsək alarıq:

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} \delta \psi_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta \psi_\sigma) \right] d^4x =$$

$$= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} \delta \psi_\sigma d^4x - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)}\right) \delta \psi_\sigma d^4x +$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)}\cdot\delta\psi_\sigma\,/_{a_1}^{a_2} \tag{11}$$

Burada ψ_σ -nın variasiyası inteqralın sərhədlərində sıfıra bərabər olduğundan, yəni

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)}\cdot\delta\psi_\sigma\,/_{a_1}^{a_2}=0$$

onda alarıq:

$$\int\delta\psi_\sigma\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)}\right]d^4x=0$$

Bu tənlik $\delta\psi_\sigma$-nın ixtiyari variyasiyası üçün doğru olduğundan sahə üçün Eyler-Laqranj tənliyini alırıq:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)}=0 \tag{12}$$

İndi isə Laqranj formalizmini Kleyn-Fok - Qordon sahəsi üçün tətbiq edəcəyik. Bu hal üçün biz iki sahəyə, ψ və ψ^* sahələrinə baxacağıq. Həmçinin ψ sahəsinin həqiqi və xəyali hissələrini asılı olmayan sahələr kimi daxil edəcəyik. Onda Laqranj funksiyasının sıxlığını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\mathcal{L}\left(\psi,\psi^*,\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu},\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\right)=$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi\right) \tag{13}$$

burada $\hbar^2/2m_0$ - əmsalının seçilməsi $\int\mathcal{L}d^3x$ kəmiyyətinin ölçü vahidinin enerji vahidi olması ilə əlaqədardır. (13) ifadəsindən bir başa alınır ki, əgər, ψ və ψ^* skalyar sahəni təsvir edirlərsə, $\mathcal{L}$ -

Lorens skalyardır. Onda (13) ifadəsi Lorens invariantlığını ödəyir. (13) ifadəsini (12)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x^{\nu})}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=0;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar^{2}}{m_{0}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{\mu}}+\frac{m_{0}^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\psi^{*}\right)=0 \tag{14}$$

və ya

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\psi^{*}+\frac{m_{0}^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\psi^{*}=0 \tag{15}$$

Analoji olaraq ψ^{*} sahəsi üçün alarıq

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x^{\nu})}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=0;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar^{2}}{m_{0}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{\mu}}+\frac{m_{0}^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\psi^{*}\right)=0 \tag{16}$$

və ya

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\psi^{*}+\frac{m_{0}^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\psi^{*}=0 \tag{17}$$

Uyğun olaraq (13) Laqranj sıxlığı ψ və ψ^{*} üçün dəqiq Kleyn-Fok-Qordon tənliyinə gətirir. Sahənin enerjisi və impulsu, enerji - impuls tenzoru ilə aşağıdakı kimi təsvir olunur:

$$T_{\mu}^{\nu}=\sum_{\sigma}\frac{\partial\psi_{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_{\sigma}/\partial x^{\nu})}-\mathcal{L}g_{\mu}^{\nu} \tag{18}$$

Enerji sıxlığı $\mathcal{H}(x)$ (18) Enerji - impuls tenzorunun T_{0}^{0} komponentinə ekvivalentdir, yəni:

$$\mathcal{H}(x) \equiv T_0^0(x) \tag{19}$$

(13) ifadəsindən istifadə etməklə

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x^\nu)} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^*/\partial x^\nu)} - \mathcal{L}g_\mu^\nu =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[g^{\sigma\nu}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + g^{\sigma\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu} - \right.$$

$$\left. -\left(g^{\sigma\rho}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^\rho} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi\right)g_\mu^\nu\right] \tag{20}$$

alarıq. Uyğun olaraq T_0^0 -tenzoru üçün

$$\mathcal{H}(x) = T_0^0 = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[g^{\sigma 0}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^0} + g^{\sigma 0}\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial x^0} - \right.$$

$$\left. -\left(g^{\sigma\rho}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^\rho} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi\right)\right]g_0^0 = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^0} + \right.$$

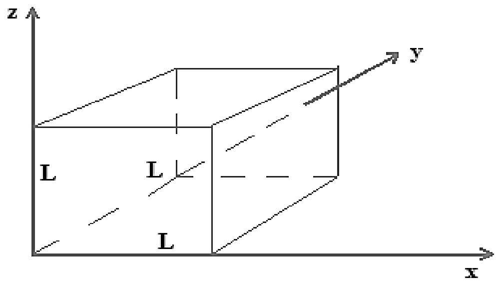
$$\left. + \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial x^0} - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^0} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi\right)\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi\right]. \tag{21}$$

H enerjisi isə $\psi_{n(\pm)}$ müstəvi dalğanın enerjisidir. $\psi_{n(\pm)}$ - müstəvi dalğası isə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\psi_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_n x \mp E_{p_n} t)\right] \tag{22}$$

Burada L – $\psi_{n(\pm)}$ müstəvi dalğasının yayıldığı kub formalı qutunun tilinin uzunluğudur (Şəkil 1). H enerjisini və L^3 həcmindəki enerji sıxlığını həmin həcm üzrə inteqrallamaqla tapmaq olar:



Şəkil 1

$$H_{n(\pm)} = \int_{L^3} T_0^0(n,\pm) d^3x = \int_{L^3} \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}} \cdot \frac{(\mp E_{p_n})^2}{\hbar^2 c^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}} \cdot \frac{\vec{p}_n \cdot \vec{p}_n}{\hbar^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \cdot \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}\right] d^3x =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n} \hbar^2}\left[\frac{E_{p_n}^2}{c^2} + \vec{p}_n^{\,2} + m_0^2 c^2\right] L^3 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n} \hbar^2} \cdot \frac{2E_{p_n}^2}{c^2} L^3 = E_{p_n} \tag{23}$$

Bir daha qeyd edək ki, (13) Laqranj sıxlığının ifadəsində $\hbar^2 / 2m_0$ sabitinin daxil edilməsinin səbəbi $\psi_{n(+)}$ dalğasının $+E_{p_n}$ enerjisi daşımasıdır. (23) ifadəsi göstərir ki, $\psi_{n(-)}$ dalğası da $+E_{p_n}$

enerjisini daşıyır. Beləliklə, buradan çox maraqlı nəticə almış oluruq. Müstəvi $\psi_{n(+)}$ dalğası mənfi və müsbət yüklərin yaratdığı dalğaları təsvir edir və hər iki dalğanın enerjisi $+E_{p_n} = +c(p_n^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$ formulu ilə təyin olunur. Uyğun olaraq, burada enerji iki xüsusiyyətə malikdir, bir tərəfdən $+E_{p_n}$ müsbət yükləri xarakterizə edir, onun yaratdığı dalğa $\psi_{(+)} \sim \exp\left[i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)/\hbar\right]$ ilə təsvir olunur, $-E_{p_n}$ isə mənfi yükləri xarakterizə edir və onun yaratdığı dalğa $\psi_{(-)} \sim \exp\left[i(\vec{p}\cdot\vec{r} + E_p t)/\hbar\right]$ ilə təsvir olunur. Digər tərəfdən $\left|E_p\right|$ həmişə zərrəciyin enerjisidir.

§ 4. Spini sıfır olan zərrəciklərin elektromaqnit sahəsi ilə qarşılıqlı təsiri

Elektromaqnit sahəsi 4 ölçülü vektorla təsvir olunur və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$A^{\mu} = \left(A_0, \vec{A}\right) = \left(A_0, A_x, A_y, A_z\right) = g^{\mu\nu} A_{\nu},$$

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} = \left(A_0, -\vec{A}\right). \tag{1}$$

Qeyri-relyativistik kvant mexanikasında elektromaqnit sahəsinin potensialları sahə tənliyinə aşağıdakı kimi daxil edilir:

$$\hat{E} \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \quad \vec{p} \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{2}$$

(2) ifadəsini 4- ölçülü kovariant halda belə yaza bilərik:

$$\hat{p}^{\mu} \Rightarrow \hat{p}^{\mu} - \frac{e}{c}A^{\mu} \text{ və ya } \hat{p}_{\mu} \Rightarrow \hat{p}_{\mu} - \frac{e}{c}A_{\mu} \tag{3}$$

(3) ifadəsini $p^{\mu}\hat{p}_{\mu} = m_0^2 c^2 \psi$ - Kleyn -Fok-Qordon tənli-yində nəzərə alsaq, onda elektromaqnit sahəsi üçün yazılmış Kleyn – Fok - Qordon tənliyini alarıq:

$$\left(\hat{p}^{\mu}-\frac{e}{c}A^{\mu}\right)\left(\hat{p}_{\mu}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)\psi=m_0^2c^2\psi \tag{4}$$

və ya

$$\left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\frac{e}{c}A_{\nu}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)\right]\psi=m_0^2c^2\psi \tag{5}$$

(5) ifadəsini aşkar şəkildə yazmaq üçün aşağıdakı çevirmələri edək:

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$x^0=x_0=ct,\ x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z$$

$$x_1=-x^1=-x,\ -x^2=-y,\ x_3=-x^3=-z$$

$$\hat{P}_{\mu}=i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}=$$

$$=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},\vec{\nabla}\right\}.$$

$$\hat{P}^{\mu}=i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}=$$

$$=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial z}\right\}=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)},-\vec{\nabla}\right\}.$$

$$\left[g^{00}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{e}{c}A_0\right)^2+g^{11}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{e}{c}A_1\right)^2+\right.$$

$$+g^{22}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{e}{c}A_2\right)^2+g^{33}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{e}{c}A_3\right)^2\Bigg]\psi=m_0^2c^2\psi$$

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}-\frac{e}{c}A_0\right)^2-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{e}{c}A_1\right)^2-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{e}{c}A_2\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^3}+\frac{e}{c}A_3\right)^2\right]\psi=m_0^2c^2\psi$$

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)^2\psi=\left[\sum_{i=1}^{3}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{e}{c}A_i\right)^2+m_0^2c^2\right]\psi;$$

$$\frac{1}{c^2}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0)^2\psi=\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2\right]\psi \qquad (6)$$

Yük və cərəyan sıxlığını hesablamaq üçün (5) ifadəsini soldan Ψ^* - funksiyasına, onun kompleks qoşmasını isə Ψ - yə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq onda alarıq:

$$0=\psi^*\left[-g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\psi$$

$$-\psi\left[-g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\psi^*$$

$$=g^{\mu\nu}(\psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^*-\psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi-\psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\psi-$$

$$-\psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\psi^*-\psi^*\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi-\psi\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^*)=$$

$$=g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi^*-\psi^*\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi)-2\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\psi^*)\right) \qquad (7)$$

(7) ifadəsindən bilavasitə

$$j_\nu = \frac{i\hbar e}{2m_0}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi^*\right) -$$

$$-\frac{e^2}{m_0 c}A_\nu \psi\psi^* = (c\rho, -\vec{j}) \tag{8}$$

alarıq. (8) ifadəsi A_ν elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü cərəyan sıxlığıdır. Onda aşağıdakı, yəni 4-ölçülü cərəyanın ödədiyi kəsilməzlik tənliyini belə yaza bilərik:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0 \tag{9}$$

(8) ifadəsindən yük sıxlığı və 3- ölçülü cərəyanın sıxlığı üçün alarıq:

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right) - \frac{e^2}{m_0 c}A_0\psi\psi^* \tag{10}$$

və

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar e}{2m_0}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) - \frac{e^2}{m_0 c^2}\vec{A}\psi\psi^* \tag{11}$$

Fərz edək ki, mənfi yüklü zərrəcik Kulon potensialı sahəsindədir, yəni:

$$eA_0(r) = Ze^2 V(r),\ \vec{A} = 0 \tag{12}$$

$$V(r) \sim \frac{1}{r}$$

Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin stasionar halda həlli aşağıdakı kimidir:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\exp\left(\frac{-i\varepsilon t}{\hbar}\right) \tag{13}$$

ε -zərrəciyin enerjisidir. Onda yük sıxlığı üçün

$$\rho(r) = e\frac{(\varepsilon - eA_0(r))}{m_0c^2}\psi\psi^* = e\frac{[\varepsilon + Ze^2V(r)]}{m_0c^2}\psi\psi^* \qquad (14)$$

alarıq. Beləliklə, yük sıxlığı üçün aşağıdakı münasibətləri alarıq:

$$\rho > 0,\ \ \varepsilon > eA_0(x)$$
$$\rho < 0,\ \ \varepsilon < eA_0(x). \qquad (15)$$

Məsələn π^- mezon üçün $\varepsilon < 0$, π^+ mezon üçün isə $\varepsilon > 0$. π^- mezon üçün

$$\rho(x) = e\frac{[\varepsilon + Ze^2V(x)]}{m_0c^2}\Psi^*(x)\Psi(x) \qquad (16)$$

§ 5. Kleyn–Fok–Qordon tənliyinin qeyri-relyativistik limiti

Əvvəlcə sistemin dalğa funksiyasını yazaq:

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right) \qquad (1)$$

Burada, dalğa funksiyasının zamandan aslılığını iki cür daxil edirik: həddin birində sükunət kütləsindən asılılıq da vardır. Qeyri relyativistik limitdə tam və sükunət enerjiləri arasındakı fərq çox kiçikdir. Ona görə

$$E' = E - m_0c^2 \qquad (2)$$

buradan alırıq ki, E' kinetik enerji qeyri relyativistikdir, yəni

$$E' << m_0c^2.$$

Uyğun olaraq,

$$\left|i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| \approx E'\varphi << m_0c^2\varphi \qquad (3)$$

Həmçinin (1)-dən alırıq ki,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(\vec{r},t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-i\frac{m_0c^2}{\hbar}\varphi\right)\times$$

$$\times\exp\left(-i\frac{m_0c^2}{\hbar}t\right)\approx i\frac{m_0c^2}{\hbar}\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-i\frac{m_0c^2}{\hbar}\varphi\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)=$$

$$=\left[-i\frac{m_0c^2}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-i\frac{m_0c^2}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)=$$

$$=\left[-i\frac{2m_0c^2}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right). \tag{4}$$

(4) ifadəsini Kleyn–Fok–Qordon tənliyində, yəni

$$\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}\psi=m_0^2c^2\psi$$

tənliyində nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}=-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)$$

$$\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu}\Psi=-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\hbar^2\Delta\psi=+\frac{\hbar^2}{c^2}\left[i\frac{2m_0c^2}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)+\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\times$$

$$\times\varphi\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)=m_0^2c^2\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right) \tag{5}$$

$$\left(2m_0i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}+m_0^2c^2\varphi\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)+\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Bigg)\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)=m_0^2c^2\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)$$

$$\left[i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\varphi\right]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)+$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)=\frac{m_0^2c^2}{2}\varphi\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi \qquad (6)$$

(6) tənliyi Kleyn–Fok–Qordon tənliyinin qeyri–relyativisik limitidir. Eyni zamanda (6) tənliyi sərbəst zərrəcik üçün Şredinger tənliyidir.

§ 6. Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Şrendinger tənliyi formasında

Kleyn-Fok-Qordon tənliyi zamana və fəzaya görə ikinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənlikdir. Bu tənliyi Şrendinger tənliyi formasında yazmaq, yəni zamana görə birinci tərtib və fəzaya görə ikinci tərtib xüsusi törəməli tənlik formasına gətirmək olduqca maraqlıdır. Bu məqsədə aşağıdakı yaxınlaşmanın köməyilə çatmaq olar:

$$\psi=\varphi+\chi,\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=m_0c^2(\varphi-\chi) \qquad (1)$$

Burada ψ və $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ iki funksiya ilə, yəni φ və χ ilə ifadə olunur. Onda:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi \qquad (2)$$

Kleyn-Fok-Qordon tənliyi çox asanlıqla iki əlaqəli diferensial tənliyə çevrilir:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\varphi+\chi)+m_0c^2\varphi \tag{3}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\varphi+\chi)-m_0c^2\chi \tag{4}$$

(3) və (4) tənlikləri yuxarıdakı (2) Kleyn-Fok-Qordon tənliyinə ekvivalentdir. (3) və (4) tənliklərini tərəf tərəfə toplasaq və çıxsaq onda alarıq:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\phi+\chi)=m_0c^2(\phi-\chi)$$

və

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\varphi-\chi)=-\frac{\hbar^2}{m_0}\Delta(\varphi+\chi)+m_0c^2(\varphi+\chi)$$

və ya (1) ifadələrini nəzərə alsaq:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\hbar^2}{m_0c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=-\frac{\hbar^2}{m_0}\Delta\psi+m_0c^2\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{m_0c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\frac{\hbar^2}{m_0}\Delta\psi+m_0c^2\psi$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\Delta\psi-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi \tag{5}$$

(5) tənliyi Kleyn-Fok-Qordon tənliyidir. (5) ifadəsindəki tənlikləri bir tənlikdə birləşdirmək olar. Buna görə iki komponentli sütun vektoru daxil edək:

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{6}$$

və aşağıdakı Pauli və vahid matrislərindən istifadə edək:

$$\hat{\tau}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \hat{\tau}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \hat{\tau}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{7}$$

(7) matrisləri aşağıdakı münasibətləri ödəyir, yəni:

$$\hat{\tau}_k^2 = 1,\ \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l = -\hat{\tau}_k\ \hat{\tau}_l = i\,\hat{\tau}_m\ ,\ \{k, l, m = 1, 2, 3\} \tag{8}$$

(6)-(8) ifadələrindən istifadə edərək (3) və (4) tənliklərini Şrendinger tənliyi formasında yaza bilərik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

və ya

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)\psi = 0 \tag{9}$$

Burada $\hat{H}$ sərbəst zərrəciyin Hamilton operatorudur.

$$\hat{H} = (\hat{\tau}_3 + i\,\hat{\tau}_2)\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_3 m_0 c^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0 c^2 \tag{10}$$

(9) tənliyindən və aşağıdakı ifadədən istifadə etsək:

$$\hat{H}^2 = c^2 \hat{\vec{p}}^2 + m_0^2 c^4 \tag{11}$$

Çox asanlıqla göstərmək olar ki, (6) vektorunun hər bir komponenti individual şəkildə Kleyn-Fok-Qordon tənliyini ödəyir. (9) tənliyinə $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$ operatu ilə təsir etsək onda alarıq, yəni:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H} \right)\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)\psi = 0 \tag{12}$$

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}^2 \right)\psi = 0$$

$$\left(-\hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \Delta - m_0^2 c^4 \right)\psi = 0$$

və ya

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0 \qquad (13)$$

Yük sıxlığı üçün alarıq:

$$\rho'=\frac{ie\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)=\frac{em_0c^2}{2m_0c^2}\Big(\psi^*(\varphi-\chi)+$$

$$+\psi(\varphi^*-\chi^*)\Big)=\frac{e}{2}\Big[(\varphi^*+\chi^*)(\varphi-\chi)+(\varphi+\chi)(\varphi^*-\chi^*)\Big]=$$

$$=\frac{e}{2}\Big[\varphi^*\varphi-\chi^*\chi-\varphi^*\chi+\varphi\chi^*+\varphi^*\varphi-\chi^*\chi-\varphi\chi^*+\varphi^*\chi\Big]=$$

$$=e(\varphi^*\varphi-\chi^*\chi)=e\psi^+\hat{\tau}_3\psi$$

$$\rho'=e\psi^+\hat{\tau}_3\psi \qquad (14)$$

Cərəyan sıxlığı Şredinger təsvirində aşağıdakı formada təyin olunur:

$$j'=\frac{e\hbar}{2m_0}\Big[\psi^+\hat{\tau}_3(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)\vec{\nabla}\psi-$$

$$-(\vec{\nabla}\psi^+)\hat{\tau}_3(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)\psi\Big] \qquad (15)$$

Yük sıxlığının normallanması aşağıdakı şəkildə olur:

$$\int\rho'(x)d^3x=\pm e,$$

və ya

$$\int\psi^+\hat{\tau}_3\psi d^3x=\pm1=\int(\varphi\varphi^*-\chi\chi^*)d^3x \qquad (16)$$

Yeni təsvirdə sərbəst zərrəciyin hərəkətini yenidən araşdıraq:

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \chi_0\end{pmatrix}\exp\left[\frac{1}{\hbar}(px-Et)\right] \qquad (17)$$

(17) ifadəsini (9) da yazıb və (10) ifadəsini nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\frac{p^2}{2m_0}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}m_0c^2\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$E\varphi=\frac{p^2}{2m_0}(\varphi+\chi)m_0c^2\varphi,$$

$$E\chi=-\frac{p^2}{2m_0}(\varphi+\chi)-m_0c^2\chi \tag{19}$$

φ_o və χ_0 uyğun olaraq (19) tənliklərinin həllindən tapılır:

$$\left(E-\frac{p^2}{2m_0}-m_0c^2\right)\varphi_0-\frac{p^2}{2m_0}\chi_0=0,$$

$$\left(\frac{p^2}{2m_0}\right)\varphi_0+\left(E+\frac{p^2}{2m_0}+m_0c^2\right)\chi_0=0 \tag{20}$$

(20) tənliklər sisteminin həllinin mövcudluğu üçün φ_o və χ_0 əmsallarından təşkil olunmuş determinant sıfıra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix}E-\frac{p^2}{2m_0}-m_0c^2 & -\frac{p^2}{2m_0}\\ \frac{p^2}{2m_0} & E+\frac{p^2}{2m_0}+m_0c^2\end{vmatrix}=0 \tag{21}$$

Buradan alırıq ki,

$$E^2-\left(\frac{p^2}{2m_0}+m_0c^2\right)^2+\left(\frac{p^2}{2m_0}\right)^2=0$$

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4, \quad E=\pm c\sqrt{p^2+m_0c^2}=\pm E_p \tag{22}$$

§ 7. Elektromaqnit sahəsi üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin qeyri relyatvistik limiti

Elektromaqnit sahəsi üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)^2\psi=\left(\left(i\hbar\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2\right)\psi \qquad (1)$$

Burada

$$\psi(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r},t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right) \qquad (2)$$

$\varphi(\vec{r},t)$ - dalğa funksiyasının qeyri-relyativistik hissəsini xarakterizə edir və onun üçün aşağıdakı münasibət ödənir:

$$\left|i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|<<m_0c^2\left|\varphi\right|,\ \left|eA_0\varphi\right|<<m_0c^2\left|\varphi\right| \qquad (3)$$

(3) - ifadələrində birinci hədd qeyri-relyativistik enerjinin sükunət enerjisindən, ikinci hədd isə skalyar potensialın sükunət enerjisindən kiçik olduğunu göstərir. Potensialların belə kiçik olması rabitə enerjisinin böyüməsinə gətirib çıxara bilər və sonda qeyri-relyativistik limit mövcud olmaya bilər. Beləliklə, alarıq:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)\psi=\left(i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}-eA_0\varphi+m_0^2c^2\varphi\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0^2c^2t\right) \qquad (4)$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)^2\psi=\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-i\hbar e\frac{\partial A_0}{\partial t}\varphi-i\hbar eA_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\right.$$

$$+i\hbar e m_0 c^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big) - i\hbar e A_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + e^2 A^2\varphi - eA_0 m_0 c^2\varphi +$$

$$+ i\hbar m_0 c^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - eA_0 m_0 c^2\varphi + m_0^2 c^4\varphi)\exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \approx$$

$$\approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right)\Big(m_0^2 c^4 - i\hbar e \frac{\partial A_0}{\partial t} - 2eA_0 m_0 c^2 +$$

$$+ 2i\hbar m_0 c^2 \frac{\partial}{\partial t}\Big)\varphi \tag{5}$$

(3) şərtini nəzərə alsaq kiçik kvadratik hədləri nəzərə almasaq və (5) ifadəsini (1)-də yazmaqla alarıq:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} m_0^2 c^2 t\right)\left(m_0^2 c^2 - 2m_0 eA_0 + 2m_0 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar e}{c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)\varphi =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0^2 c^2 t\right)\left[\left(+i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m_0^2 c^2\right]\varphi \tag{6}$$

və ya

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m_0}\left(+i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + eA_0 + \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right]\varphi =$$

$$= \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0} - \frac{e}{m_0 c}\vec{A}\hat{\vec{p}} + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2m_0 c}(\vec{\nabla}\vec{A}) + \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right]\phi \tag{7}$$

(7) tənliyi elektromaqnit sahəsi üçün Şredinger tənliyidir. Qeyd etmək lazımdır ki, şüalanma məsələlərini öyrənərkən (7) tənliyinə Kulon kalibrovkasında baxmaq lazımdır, yəni:

$$div\vec{A} = 0 \tag{8}$$

Lorens kalibrovkasında isə (7) tənliyində sonuncu iki hədd yox olur, yəni:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}+div\vec{A}=0 \qquad (9)$$

Bu Lorens kalibrovkasıdır.

§ 8. Yüklü Kleyn-Fok-Qordon sahəsi

Ümumiyyətlə Kleyn-Fok-Qordon tənliyi ilə real yüksüz və yüklü kompleks sahələrə baxmaq mümkündür. Yüklü kompleks sahə üçün göstərdik ki, cərəyan sıxlığı

$$j^{\mu}=\frac{ie\hbar}{2m_0}(\varphi^*\nabla^{\mu}\varphi-\varphi\nabla^{\mu}\varphi^*) \qquad (1)$$

kimi təyin olunur.

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0$$

şərtindən yük üçün alarıq:

$$\rho=\frac{i\hbar e}{2m_0c^2}(\varphi^*\dot{\varphi}-\varphi\dot{\varphi}^*) \qquad (2)$$

$$\rho=\frac{dQ}{d^3x}$$

$$Q=\frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\int d^3x(t)(\varphi^*\dot{\varphi}-\varphi\dot{\varphi}^*)$$

İndi isə yüklü sahəni bir qədər ətraflı öyrənək. Kompleks dalğa funksiyasını həqiqi və xəyali olmaqla iki komponentə ayıraq, yəni

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)\right] \qquad (3)$$

Burada $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ həqiqi funksiyalardır. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası Kleyn-Fok-Qordon tənliyini ödəyirsə, yəni:

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0 \tag{4}$$

Burada $\Box$- Dalamber operatorudur. Onda $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ funksiyaları da birbaşa Kleyn-Fok-Qordon tənli-yini ödəyirlər, yəni:

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi_1(x) = 0, \left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi_2(x) = 0 \tag{5}$$

Əgər iki $\varphi_1(x)$ və $\varphi_2(x)$ sahələri asılı olmadan $m = m_1 = m_2$ halı üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin həllidirlərsə, onda həmin tənlik kompleks sahənin də həllidir, yəni:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \tag{6}$$

və

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0, \left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi^* = 0 \tag{7}$$

Əgər

$$Q = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2}\int d^3x(t)(\varphi^*\dot{\varphi} - \varphi\dot{\varphi}^*)$$

ifadəsində φ və φ^*-ləri bir-biriləri ilə qarşılıqlı dəyişsək, onda əks yükün ifadəsini alarıq. Bu mexanizmi pionlara (π^+, π^-, π^0) tətbiq etmək olar. π^0 - neytral zərrəcik olduğundan həqiqi dalğa funksiyası ilə xarakterizə olunur. π^+ və π^- yüklü sahə yaratdığından kompleks sahələrlə təsvir olunurlar, yəni:

$$\varphi_{\pi^+} = \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_1)$$

$$\varphi_{\pi^-} = \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_1)$$

və

$$\varphi_{\pi^0} = \varphi_0 = \overset{*}{\varphi_0}.$$

§ 9. Dirak matrisləri və onların alınması

Dörd ölçülü (4x4) σ_i və ρ_i ($i=1,2,3$) Dirak matrisləri iki ölçülü (2x2) $\sigma_i^{'}$ Pauli və vahid $I=diag(1,1)$ matrislərindən aşağıdakı hesablama vasitəsi ilə alınır. Qeyd etdiyimiz kimi Pauli və vahid matris aşağıdakı şəkildədir:

$$\sigma'_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \ \sigma'_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma'_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

σ_i və ρ_i Dirak matrisləri $\sigma_i^{'}$ və I vahid matrislərinin tenzor hasilindən aşağıdakı formada alınır: σ_i matrisləri I vahid matrisinin σ'_i matrisinə düz hasilindən alınır:

$$\sigma_i = I \otimes \sigma'_i$$

$$\sigma_x = I \otimes \sigma'_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_y = I \otimes \sigma'_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_z = I \otimes \sigma'_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \sigma'_x \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\rho_2 = \sigma'_y \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\rho_3=\sigma_z'\otimes I=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & -1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};$$

σ_i və ρ_i Dirak matrisləri üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1;$$

$$\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=i\sigma_z;\quad \sigma_y\sigma_z=-\sigma_z\sigma_y=i\sigma_x;$$

$$\sigma_z\sigma_x=-\sigma_x\sigma_z=i\sigma_y;\quad \rho_1^2=\rho_2^2=\rho_3^2=1$$

$$\rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=i\rho_3;\quad \rho_2\rho_3=-\rho_3\rho_2=i\rho_1;$$

$$\rho_3\rho_1=-\rho_1\rho_3=i\rho_2$$

σ və ρ matrislərindən istifadə edərək α- matrislərini aşağıdakı formada təyin edə bilərik:

$$\vec{\alpha}=\rho_1\vec{\sigma};\ \alpha_0=\rho_3$$

Dörd ölçülü α matrisləri aşağıdakı eyniliyi ödəyir:

$$\alpha_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu=2\delta_{\mu\nu}$$

$$\alpha_0^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_i^2=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_i^2&0\\0&\sigma_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_i^2=\rho_3^2=1$$

$$\alpha_i \rho_3 + \rho_3 \alpha_i = 0$$

axırıncı ifadənin hərə tərəfini sağdan ρ_3 - ə vuraq:

$$\alpha_i \rho_3^2 + \rho_3 \alpha_i \rho_3 = 0$$

$$\alpha_i = -\rho_3 \alpha_i \rho_3$$

Matrislərin hasilinin izi, yəni diaqonal elementlərinin cəmi üçün aşağıdakı eyniliyin doğruluğunu nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$Tr\left[\hat{A}\hat{B}\right] = Tr\left[\hat{B}\hat{A}\right]$$

$$\alpha_i = -\rho_3 \alpha_i \rho_3$$

$$Tr\alpha_i = Tr(-\rho_3 \alpha_i \rho_3) = Tr(-\rho_3^2 \alpha_i) = Tr\rho_3 \alpha_i \rho_3 =$$
$$= -Tr\alpha_i \Rightarrow Tr\alpha_i = 0$$

Yeni γ matrislərini daxil edək:

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \vec{\gamma})$$

Burada $\gamma^0 = \gamma_0 = \alpha_0$ və $\vec{\gamma} = \alpha_0 \vec{\alpha}$ qəbul olunmuşdur.

$$\gamma_0 = \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma} = \alpha_0 \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$(\gamma^i)^+ = -\gamma^i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

§ 10. Dirak tənliyi

Spini $\frac{1}{2}$ olan zərrəciklər üçün nisbilik nəzəriy-yəsinin tələblərini ödəyən Dirak tənliyini çıxarmaq üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyində olduğu kimi enerji, kütlə və impuls arasındakı relyativistik münasibətdən istifadə edək:

$$\hat{H} = E = \sqrt{c^2 \hat{\vec{p}}^2 + m_0^2 c^4} \tag{1}$$

Operatordan kök almaq üçün ρ_i və σ_i - Dirak matris-lərindən istifadə edək. Əgər (1) ifadəsini

$$\hat{H} = c(\rho_1 \hat{\vec{p}} + \rho_3 m_0 c) \tag{2}$$

şəklində yaza biliriksə, onda, mütləq

$$(\rho_1 \vec{p} + \rho_3 m_0 c)^2 = \rho_1^2 \vec{p}_1^2 + m_0 c\vec{p}(\rho_1\rho_3 + \rho_3\rho_1) + \\ + m_0^2 c \rho_3^2 = \vec{p}^2 + m_0^2 c^2 \tag{3}$$

olması üçün ρ_i matrisləri aşağıdakı şərti ödənməlidir:

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 = 1 \tag{4}$$

$$\rho_1\rho_2 = -\rho_2\rho_1 = i_1\rho_3, \ \rho_2\rho_3 = -\rho_3\rho_2 = i_1\rho_1, \\ \rho_3\rho_1 = -\rho_1\rho_3 = i\rho_2 \tag{5}$$

Kök altında, həmçinin irrasional diferensial operator

$$\hat{\vec{p}} = \sqrt{\hat{\vec{p}}^2} = \hbar\sqrt{-\vec{\nabla}^2} = \hbar\sqrt{-\vec{\nabla}\vec{\nabla}} \tag{6}$$

olduğuna görə yuxarıdakı ifadə ilə yanaşı, əgər

$$\sqrt{\hat{\vec{p}}^2} = \sqrt{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2} = \sigma_x \hat{p}_x + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z \hat{p}_z \tag{7}$$

şəklində yazırıqsa, onda:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{p}}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = \sigma_x^2 \hat{p}_x^2 + \sigma_y^2 \hat{p}_y^2 + \sigma_z^2 \hat{p}_z^2 + \\ + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x) \hat{p}_x \hat{p}_y + (\sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \hat{p}_x \hat{p}_z + \\ + (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y) \hat{p}_y \hat{p}_z = \hat{\vec{p}}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

olması üçün $\sigma_i \, (i = 1,2,3)$ matrisləri də aşağıdakı münasibətləri ödəməlidirlər:

$$\begin{gathered} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z; \; \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x, \\ \sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y. \end{gathered} \tag{9}$$

Beləliklə, hər iki münasibəti nəzərə alaraq enerji operatorunu rasional şəkildə yaza bilərik:

$$\hat{H} = c\rho_1(\sigma_x \hat{p}_x + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z \hat{p}_z) + \rho_3 m_0 c^2 = c\sum_{\mu=0}^{3} \alpha_\mu \hat{p}_\mu \tag{10}$$

$\vec{\sigma}$ və $\vec{\rho}$ matrislərindən istifadə etsək α matrisini aşağıdakı formada təyin edə bilərik:

$$\vec{\alpha} = \rho_1 \vec{\sigma}; \; \alpha_0 = \rho_3 \tag{11}$$

α -matrisinin (11) şəklində təyin olunması yuxarıdakı münasibətlərin ödənməsini göstərir, yəni:

$$p_0 = mc, \; p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z \tag{12}$$

$$E^2 = \left(c \sum_{\mu=0}^{3} \alpha_\mu p_\mu \right) \left(c \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_\nu p_\nu \right) =$$

$$c^2 \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_\mu \alpha_\nu p_\mu p_\nu =$$

$$= \frac{c^2}{2} \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} p_\mu p_\nu (\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) \qquad (13)$$

Digər tərəfdən, aşkardır ki,

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 = c^2 \sum_{\mu=0}^{3} \delta_{\mu\nu} p_\mu p_\nu \qquad (14)$$

Bu iki bərabərlikdən α_μ - kəmiyyətlərinin ödədiyi əsas şərti alırıq:

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (15)$$

və ya

$$\alpha_\mu \alpha_\nu \neq \alpha_\nu \alpha_\mu; \; \alpha_\nu^2 = I$$

$$\alpha_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

α_μ matrisləri ermitlik şərtini ödəyirlər. Doğrudanda, α_μ matrislərini transponirə edib, kompleks qoşmalarını götürsək:

$$\alpha_i^+ = \left(\alpha_{\mathrm{i}}^+\right)^* = \alpha_i,\ \alpha_0^+ = \alpha_0$$

alarıq. Dirak tənliyini almaq üçün α_μ matrislərini E-nin ifadəsində yerinə yazaq:

$$E = c^2 m\alpha_0 + c\alpha_i p_i = c(\vec{\alpha}\vec{p}) + \alpha_0 mc^2 \tag{17}$$

E və $\vec{p}$ -ni uyğun operatorlarla əvəz etsək:

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ \vec{p} \to \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla} \tag{18}$$

Onda

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,\ \hat{H} = c\left(\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\right) + \alpha_0 mc^2 \tag{19}$$

və ya

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\left(\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\right) + \alpha_0 mc^2\right)\psi \tag{20}$$

alarıq. Bu sərbəst zərrəcik üçün Dirak tənliyidir.

§ 11. Sərbəst zərrəciyin hərəkəti üçün Dirak tənliyinin həlli

Zamandan asılı Dirak tənliyi aşağıdakı formadadır:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}} + m_0 c^2\hat{\beta}\right);\quad \beta = \alpha_0 \tag{1}$$

Stasionar halda dalğa funksiyası belə təyin olunur:

$$\psi(x,t) = \psi(x)\exp\left[-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\varepsilon t\right] \tag{2}$$

Stasionar Dirak tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\varepsilon\psi(x) = \hat{H}\psi(x) \tag{3}$$

4-komponentli ψ -spinorundan iki komponentli φ və χ spinorlarına keçək:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{4}$$

Burada

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \ \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}\hat{\vec{p}}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{6}$$

və ya

$$\varepsilon\varphi = c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\chi + m_0c^2\varphi, \ \ \varepsilon\chi = c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\varphi - m_0c^2\chi\,. \tag{7}$$

İmpulsun təyin olunmuş qiymətləri üçün:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\vec{p}\vec{x}\right] \tag{8}$$

(8) ifadəsini (7) də nəzərə alsaq onda φ və χ üçün olan tənlikləri φ_0 və χ_0 üçün də alarıq:

$$\begin{gathered} \left(\varepsilon^2 - m_0c^2\right)\varphi_0 - c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\chi_0 - 0, \\ -c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\varphi_0 + \left(\varepsilon^2 + m_0c^2\right)\chi_0 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

(9)-bircins xətti tənliklər sistemidir. (9) tənliyinin trivial olmayan həlli o zaman mövcuddur ki, dəyişənlərin əmsalından düzəldilmiş determinant sıfıra bərabər olsun.

$$\begin{vmatrix} \left(\varepsilon^2 - m_0 c^2\right) & -c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}} \\ -c\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}} & \left(\varepsilon^2 + m_0 c^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

$$\left(\varepsilon^2 - m_0^2 c^4\right) - c^2\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\right) = 0 \qquad (11)$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{A}}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{B}}\right) = \left(\hat{\vec{A}}\hat{\vec{B}}\right) + i\hat{\vec{\sigma}}\left[\hat{\vec{A}}\hat{\vec{B}}\right]$$

eyniliyindən istifadə etsək:

$$\varepsilon^2 - m_0^2 c^4 = c^2 \hat{\vec{p}}^2$$

$$\varepsilon^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \hat{\vec{p}}^2 \qquad (12)$$

$$\varepsilon = \pm E_p, \; E_p = \pm c\sqrt{\hat{\vec{p}}^2 + m_0^2 c^2} \qquad (13)$$

Zamanın evolyusiya faktorunda $\varepsilon = \pm E_p$ iki işarənin olması, Dirak tənliyinin iki tip həllinin olması ilə əlaqədardır. Biz bunları müsbət həll (müsbət enerjiyə uyğun) və mənfi həll (mənfi enerjiyə uyğun) adlandırırıq. (9) tənliyindən fiksə olunmuş ε üçün alırıq:

$$\chi_0 = \frac{c\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}\right)}{m_0 c^2 + \varepsilon}\varphi_0 \qquad (14)$$

İki spinorlu φ_0 -ı aşağıdakı kimi işarə edək:

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

U - funksiyası üçün normallanma şərti belədir:

$$U^{+}U = U_1^{*}U_1 + U_2^{*}U_2 = 1. \tag{16}$$

Ümumi halda U_1 və U_2 funksiyaları kompleksdir. (2) və (8) ifadələrindən istifadə edərək müsbət və mənfi enerjiyə uyğun Dirak tənliyinin sərbəst zərrəcik üçün həllərini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\psi_p\lambda(x,t) = N\begin{pmatrix} U \\ \dfrac{c\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}\right)}{m_0c^2+\lambda E_p}U \end{pmatrix}\frac{\exp\left[\dfrac{\overset{\varepsilon}{\left(\vec{p}\vec{x}-\lambda E_p t\right)}}{\hbar}\right]}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{17}$$

Burada $\lambda = \pm 1$, $\varepsilon = \lambda E_p$, N -normallaşma sabiti, normallaşma şərtindən tapılır:

$$\int \psi_{p\lambda}^{+}(\vec{x},t)\psi_{p'\lambda'}(\vec{x},t)d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \tag{18}$$

Uyğun olaraq

$$N^2\left(U^{+}U + U^{+}\frac{c^2\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{p}\right)}{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2}U\right) = 1 \tag{19}$$

$$N^2\left(1+\frac{c^2\vec{p}^{\,2}}{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2}\right) = 1 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2}{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2+c^2\vec{p}^{\,2}}} =$$

$$=\sqrt{\frac{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2}{\left(m_0^2c^4+c^2p^2\right)+2m_0c^2\lambda E_p+E_p^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)^2}{2\left(m_0c^2+\lambda E_p\right)\lambda E_p}}=\sqrt{\frac{m_0c^2+\lambda E_p}{2\lambda E_p}}$$

(17) dalğa funksiyası implusun məxsusi funksiyasıdır, yəni:

$$\hat{\vec{p}}\psi_{p\lambda}=\vec{p}\psi_{p\lambda}(\vec{x},t) \tag{20}$$

İmplusun hər bir qiymətinə iki müxtəlif həll uyğundur: $\lambda=-1(\varepsilon=E_p)$ və $\lambda=-1(\varepsilon=E_p)$. Beləliklə, yekun olaraq sərbəst Dirak dalğalarının z oxu istiqamətində yayılmasını nəzərə alsaq, onda məxsusi dalğa funksiyasını aşağıdakı formada yaza bilərik:

$$\psi_{p,\lambda,+1/2}=N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \dfrac{c\hat{\sigma}_z p}{m_0c^2+\lambda E_p}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\exp\left[\frac{i(pz-\lambda E_pt)}{\hbar}\right] \tag{21}$$

$$\psi_{p,\lambda,-1/2}=N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \dfrac{c\hat{\sigma}_z p}{m_0c^2+\lambda E_p}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\exp\left[\frac{i(pz-\lambda E_pt)}{\hbar}\right] \tag{22}$$

Məxsusi funksiyaların ortonormallıq şərti:

$$\int\psi^+_{p_z\lambda s_z}\psi_{p'_z\lambda s_z}{}_z d^3x=\delta_{\lambda\lambda's_zs'_z}\delta(p_z-p'_z) \tag{23}$$

§ 12. Neytrino üçün Dirak tənliyi

Dirak tənliyini neytrino üçün həll edərək, spirallıq və γ_5 operatorlarının məxsusi qiymətlərini hər iki enerji halı üçün tapaq. Bunun üçün Dirak matrislərinin standart təsvirindən istifadə edək:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dirak tənliyindən

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \alpha \vec{\nabla} \psi + \alpha_0 m_0 c^2 \tag{2}$$

$m_0 = 0$ qəbul etsək, onda:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \alpha \vec{\nabla} \psi = \hat{H} \psi \tag{3}$$

alarıq. (3) tənliyinin həlini stasionar halda olduğu kimi aşağıdakı formada yaza bilərik,

$$\psi = \psi e^{-iEt/\hbar} \tag{4}$$

Onda

$$E\psi = -i\hbar c \alpha \vec{\nabla} \psi \tag{5}$$

alarıq. (5) tənliyinin həllini müstəvi dalğa ilə ifadə edə bilərik.

$$\psi = e^{ip\alpha/\hbar} u(p) \tag{6}$$

(6) ifadəsini (5)-də nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$Eu(p) = c\hat{\vec{\alpha}} \vec{p} u(p) \tag{7}$$

Burada

$$E = \pm E_p = \pm |\vec{p}| c$$

alınır. Dirak matrislərinin standart təsvirindən istifadə etsək onda

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

matrisi üçün alarıq:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

və həmçinin

$$\gamma_5\hat{\vec{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\vec{\alpha}}$$

alırıq. Onda (3) tənliyindəki Hamiltonianı $\hat{H} = c\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}} = c\gamma_5\hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}}$ şəklində yaza bilərik. Buradan alınır ki, Hamilton $\hat{H}$ operatorunun məxsusi funksiyası eyni zamanda $\hat{\vec{\Sigma}}\frac{\hat{\vec{p}}}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}$ spirallıq və γ_5 operatorlarının məxsusi funksiyasıdır. $m_0 = 0$ qəbul etsək Dirak tənliyində U spinoru üçün 4 xətti asılı olmayan həll alarıq. Z oxunu $\vec{p}$ impulsu istiqamətində götürsək, onda U spinoru üçün aşağıdakı hallar mümkündür.

Spirallıq:

$$\begin{array}{cccc} +1 & -1 & +1 & -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Müsbət enerji — Mənfi enerji

γ_5 operatorunun məxsusi qiymətləri aşağıdakı kimidir:

E -Spirallıq	j_5 -in məxsusi qiymətləri
$+E_p$	$+1......+1$
$+E_p$	$-1......-1$
$-E_p$	$+1......-1$
$-E_p$	$-1......+1$

Göründüyü kimi j_5 və spirallıq operatorları enerjinin müsbət qiymətlərində eyni məxsusi qiymətə malikdirlər. Enerjinin mənfi qiymətində isə işarəcə fərqlənən müxtəlif qiymətlərə malikdirlər.

§ 13. İki komponentli Dirak tənliyi

Burada əsas məqsəd sərbəst zərrəcik üçün yazılmış ümumi Dirak tənliyini iki komponentli şəkildə yazmaqdır. Sərbəst zərrəcik üçün stasionar Dirak tənliyi aşağıdakı şəkildədir:

$$\left[E - c(\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}) - \alpha_0 mc^2\right]\psi = 0 \tag{1}$$

(1) tənliyində

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

əvəzləmələri qəbul etsək, onda Dirak tənliyini belə yazmaq mümkündür:

$$E\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - c\hat{\vec{p}}\begin{pmatrix} 0 & \hat{\vec{\sigma}} \\ \hat{\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$E\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - c\hat{\vec{p}}\begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & \varphi_2 \\ \hat{\vec{\sigma}} & \varphi_1 \end{pmatrix} - mc^2\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} E\varphi_1 - c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_2 - mc^2\varphi_1 \\ E\varphi_2 - c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_1 + mc^2\varphi_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Buradan

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\varphi_1 - c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_2 = 0 \\ (E + mc^2)\varphi_2 - c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_1 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

və ya

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\varphi_1 = c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_2 \\ (E + mc^2)\varphi_2 = c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}\varphi_1 \end{aligned} \tag{7}$$

İkinci tənlikdən

$$\varphi_2 = \frac{c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}}{E + mc^2}\varphi_1$$

alırıq. Əgər qeyri relyativistik hala baxırıqsa, onda $E \approx mc^2$

$$\varphi_2 = \frac{c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}}{E + mc^2}\varphi_1 = \frac{c\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}}{mc^2 + mc^2}\varphi_1 = \frac{\hat{\vec{p}}\hat{\vec{\sigma}}}{2mc}\varphi_1. \tag{8}$$

Normallanma şərti

$$\int \psi^+ \psi dV = 1, \quad \int (\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^* \varphi_2) dV = 1 \tag{9}$$

ödənməlidir. Beləliklə:

$$\int \left(\varphi_1^* \varphi_1 + \frac{\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}}{2mc}\varphi_1^* \frac{\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}}{2mc}\varphi_1 \right) dV = 1$$

$$\int \left[\varphi_1 \varphi_1^* + \frac{1}{4m^2c^2}\varphi_1^* (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})\varphi_1 \right] dV = 1$$

Burada

$$(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}) = \hat{\vec{p}}\hat{\vec{p}} + i\vec{\sigma}\left[\hat{\vec{p}}\hat{\vec{p}}\right] = \hat{\vec{p}}^2 \tag{10}$$

olduğundan,

$$\int\left(\varphi_1\varphi_1^* + \frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}\varphi_1\varphi_1^*\right)dV = \int\left(1+\frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}\right)\varphi_1\varphi_1^* dV = 1 \qquad (11)$$

$$|\varphi_1|^2 = \frac{1}{1+\dfrac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}}$$

alırıq. Buradan

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\vec{p}^2}{4m^2c^2}}}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \approx \left(1-\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \qquad (12)$$

Burada $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ ifadəsini $x=0$ nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırdıqda $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \approx 1-\dfrac{1}{2}x$ şərti nəzərə alınmışdır. Beləliklə 4-komponentli dalğa funksiyası ilə 2-komponentli funksiyalar $\left(1-\dfrac{\hat{\vec{p}}^2}{8m^2c^2}\right)$ normallaşdırıcı vuruqla fərqlənirlər.

§ 14. Laqranj sıxlığının və enerji - implus tenzorunun Şredinger tənliyindən alınması

Laqranj funksiyasını aşağıdakı formada yaza bilərik

$$L = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right) -$$

$$-\frac{\hbar}{2i}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - \psi^* V\psi \qquad (1)$$

Eyler-Laqranj tənliyindən istifadə edərək göstərə bilərik ki, Laqranj funksiyasının (1) ifadəsi Şredinger tənliyinə gətirib çıxarır. Burada ψ və ψ^* funksiyaları bir-birindən asılı olmayaraq variasiyalanır. Eyler və Laqranj tənliyində fəza və zaman dəyişənlərini ayırsaq onda alarıq:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\left(\partial x^i\right)} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\sigma} = 0 . \tag{2}$$

Burada i - cəmləmə indeksi belə dəyişir (i=1, 2 ,3).

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\vec{\nabla} \psi_\sigma\right)} \tag{3}$$

Əvvəlcə variyasiyanı ψ^* funksiyasına görə edək, onda alarıq:

$$-V\psi + \frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2\psi - \frac{\hbar}{i}\dot{\psi} = 0 . \tag{4}$$

Analoji olaraq variasiyanı ψ funksiyasına görə həyata keçirək, onda alarıq:

$$-V\psi^* + \frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2\psi^* + \frac{\hbar}{i}\dot{\psi}^* = 0 \tag{5}$$

(4) və (5) ifadələrini ψ və ψ^* dalğa funksiyaları üçün Şredinger tənliyi formasında aşağıdakı formada yaza bilərik:

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2\psi + V\psi \equiv \hat{H}\psi \tag{6}$$

$$-i\hbar\dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2\psi^* + V\psi^* \equiv \hat{H}^+\psi^* \tag{7}$$

Burada

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2 + V(x)$$

sistemin Hamilton operatorudur. ψ - yə qoşma impulslar aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i\hbar}{2}\psi^* \tag{8}$$

və

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\psi \qquad (9)$$

Uyğun olaraq Hamilton sıxlığı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\mathcal{H} = \sum_{\sigma} \pi_\sigma \dot{\psi}_\sigma - \mathcal{L} = -\frac{i\hbar}{m_0}\vec{\nabla}\pi\vec{\nabla}\psi - \frac{2i}{\hbar}V\pi\psi\ . \qquad (10)$$

Həmçinin (1) Laqranj sıxlığından istifadə edərək gərginlik tenzorunu aşağıdakı formada yaza bilərik:

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x^\nu)} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^*/\partial x^\nu)} - \mathcal{L}\delta_\mu^\nu \qquad (11)$$

(11) ifadəsindən T_0^0- komponentini aşağıdakı formada yaza bilərik, yəni

$$T_0^0 = \dot{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \dot{\psi}^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} - \mathcal{L} = -\frac{\hbar}{2i}\dot{\psi}\psi^* + \dot{\psi}^*\frac{\hbar}{2i}\psi +$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi + \frac{\hbar}{2i}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) + \psi^*V\psi =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi^*V\psi \equiv \mathcal{H} \qquad (12)$$

T_0^0 - verilmiş sistemin enerji sıxlığının ifadəsidir. Şredinger sahəsinin tam enerjisi aşağıdakı kimi hesablanır:

$$H = \int T_0^0 d^3x = \int (\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi^*V\psi)d^3x =$$

$$= \int \psi^*(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}^2 + V)\psi d^3x = \int \psi^*\hat{\hat{H}}\psi d^3x \qquad (13)$$

S-Səthindən keçən enerji selinin hesablanması elektrodinamikada Poyintinq vektoruna $\vec{S} = \left[\vec{E}\ \vec{B}\right]$ analoji olaraq kanonik formada aşağıdakı kimidir :

$$\vec{S} = \vec{e}_1 T_0^1 + \vec{e}_2 T_0^2 + \vec{e}_3 T_0^3 . \tag{14}$$

Burada $\vec{e}$ vahid Kartezian vektorlarıdır. Şredinger sahəsi üçün Poyintinq vektorunu aşağıdakı formada yaza bilərik:

$$S = \dot{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} + \dot{\psi}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi^*)} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\dot{\psi}^*\vec{\nabla}\psi + \dot{\psi}\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{15}$$

İmpuls sıxlığı üçün isə

$$\vec{p} = \vec{e}_1 T_0^1 + \vec{e}_2 T_0^2 + \vec{e}_3 T_0^3 = (\vec{\nabla}\psi)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + (\vec{\nabla}\psi^*)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} =$$

$$= -\frac{\hbar}{2i}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \tag{16}$$

§ 15. Dirak tənliyinin kovariant formada yazılması

Dirak tənliyini aşağıdaki formada yaza bilərik:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\left(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}}\right) + m_0 c^2 \alpha_0\right)\psi \tag{1}$$

(1) tənliyinin hər iki tərəfini α_0- matrisinə vurub və $\alpha_0^2 = 1$ olduğunu nəzərə alsaq onda alarıq:

$$\alpha_0 \frac{i\hbar}{c}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} - \alpha_0\vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}}\psi - m_0 c\psi = 0 \tag{2}$$

Yeni γ - matrislərini daxil edək:

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \vec{\gamma}) \tag{3}$$

Burada:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \alpha_0 \quad \text{və} \quad \vec{\gamma} = \alpha_0\vec{\alpha} \tag{4}$$

qəbul olunmuşdur. İmpuls operatorunun 4 - ölçülü şəklindən istifadə edək:

$$\hat{p}_\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}, \, i\hbar\vec{\nabla} \right) \tag{5}$$

Onda Dirak tənliyini aşkar Lorens kovariantı şəklində aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\alpha_0 \frac{i\hbar}{c} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \alpha_0 \vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}}\psi = (\gamma_0 \hat{\vec{p}}_0 - \vec{\gamma}\,\hat{\vec{p}})\psi = \gamma^\mu \vec{p}_\mu \psi$$

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m_0 c)\psi = 0 \tag{6}$$

γ_0 və $\vec{\gamma}$ matrislərinin aşkar şəklini müəyyənləşdirək:

$$\gamma_0 = \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \alpha_0 \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bu matrislərin bəzi xassələrini araşdıraq. Aydındır ki:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{8}$$

$$(\gamma_0)^+ = \gamma_0$$

Onda: $(\gamma^i)^+ = -\gamma^i$ alırıq.

§ 16. Dirak tənliyinin qeyri-relyativistik limiti

Dirak tənliyinin qeyri - relyativistik limitini tapmaq üçün fərz edək ki, elektron sükünətdədir, onda:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}}) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right)\psi \tag{1}$$

(1) tənliyində $\hat{\vec{p}}\psi = 0$ qəbul etməliyik, yəni:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\beta} m_0 c^2 \psi \tag{2}$$

alarıq. Burada $\hat{\beta}$ - matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(3)-matrisini (2)-də yazsaq ψ-funskiyası üçün aşağıdakı dörd həlli alarıq:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[-i\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)t\right], \; \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[-i\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)t\right],$$

$$\psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[+i\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)t\right], \qquad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[+i\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)t\right] \tag{4}$$

(4) ifadələrindən $\psi^{(1)}$ və $\psi^{(2)}$ enerjinin müsbət, $\psi^{(3)}$ və $\psi^{(4)}$ isə enerjinin mənfi qiymətlərinə uyğun gələn həlləridir. Göstərmək olar ki, qeyri-relyativistik limitdə Dirak tənliyi 2 komponentli Pauli tənliyinə çevrilir. Elektromaqnit sahəsinin 4 - ölçülü vektor potensialını daxil edək:

$$A^{\mu} = \{A_0(x), \vec{A}(x)\} \tag{5}$$

$$\hat{p}^{\mu} \to \hat{p}^{\mu} - \frac{e}{c}A^{\mu} \equiv \hat{\Pi}^{\mu} \tag{6}$$

Burada $\hat{\Pi}^{\mu}$- kinetik impuls operatoru, $\hat{p}^{\mu}$-isə kanonik impulsdur. (6) ifadəsini (1) tənliyində nəzərə alsaq onda alarıq:

$$c\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c}A_0\right)\psi = \left(c\hat{\vec{\alpha}}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \hat{\beta}m_0c^2\right)\psi \tag{7}$$

və ya

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\left(c\hat{\vec{\alpha}}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2\right)\psi \tag{8}$$

(8) ifadəsindən elektromaqnit sahəsi ilə qarşılıqlı təsir hamiltonianını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\hat{H} = -\frac{e}{c} c\hat{\vec{\alpha}}\vec{A} + eA_0 = -\frac{e}{c}\hat{\vec{\upsilon}}\vec{A} + eA_0 \tag{9}$$

burada

$$\hat{\vec{\upsilon}} = \frac{d\hat{\vec{x}}}{dt} = c\hat{\vec{\alpha}} \tag{10}$$

relyativistik sürət operatotudur. (9) ifadəsi elektromaqnit sahəsində hərəkət edən nöqtəvi yüklü zərrəciyin klassik qarşılıqlı təsirinə uyğundur.

§17. Elektromaqnit sahəsində hərəkət edən elektron üçün Dirak tənliyi

Elektromaqnit sahəsində yerləşən Dirak zərrəciyinin Hamiltonianını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\hat{\mathrm{H}} = c\hat{\vec{\alpha}}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \hat{\beta} m_0 c^2 + e\varphi \tag{1}$$

burada $A_0(x) = \varphi(x)$ götürülmüşdür. İxtiyari $\hat{F}$ operatoru üçün hərəkət tənliyi belədir:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{F}\right] \tag{2}$$

Onda koordinat operatoru üçün alarıq:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\, \hat{x}\right], \tag{3}$$

burada $\partial\hat{x}/\partial t = 0$.

$$\left[\hat{H}, \hat{x}\right] = c\left[\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}, \hat{x}\right] - e\left[\hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{A}, \hat{x}\right] +$$

$$+ m_0 c^2\left[\hat{\beta}, \hat{x}\right] + e\left[\varphi, \hat{x}\right] \tag{4}$$

φ - Kulon potensialıdır.

$$[\varphi, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{\beta}, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{\alpha}, \hat{x}] = 0 .$$

$\left[\hat{A} \cdot \hat{B}, \hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{C}\right] \cdot \widehat{B} + \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right]$ eyniliyindən istifadə etsək onda alarıq:

$$\left[\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{x}\right] = [\alpha, x] \cdot \hat{\vec{p}} + \alpha\left[\hat{\vec{p}}, x\right] = \sum_{j,k}\left\{\left[\hat{\alpha}_j, \hat{x}_k\right]\hat{p}_j, \vec{e}_k + \right.$$

$$\left. + \hat{\alpha}_j\left[\hat{p}_j \hat{x}_k\right]\vec{e}_k\right\} = \sum_j \frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}_j e_j = \frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}$$

burada $\left[\hat{p}_j, \hat{x}_k\right] = \frac{\hbar}{i}\delta_{jk}$, $\left[\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathrm{A}}, \hat{x}\right] = 0.$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{i} c\hat{\alpha} = c\hat{\alpha} = \hat{\vec{\upsilon}}$$

$\hat{\vec{\upsilon}}$ − Dirak zərrəciyinin sürət operatorudur. Kinetik impuls üçün hərəkət tənliyini alaq: kinetik impuls operatoru

$$\hat{\vec{\Pi}} = \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$\frac{d\hat{\Pi}}{dt} = \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\Pi}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\Pi}\right] - \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\Pi}\right] = \left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\vec{p}}\right] - \frac{e}{c}\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{A}\right].$$

$$\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{p}\right]_- = c\left[\hat{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{p}}\right] - e\left[\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathrm{A}}, \hat{\vec{p}}\right] + m_0 c^2\left[\hat{\beta}, \hat{\vec{p}}\right] + e[\phi, \hat{p}],$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}, \quad \left[\hat{\beta}, \hat{\vec{p}}\right] = 0$$

$$e\left[\varphi, \hat{\vec{p}}\right] = ie\hbar\left[\overrightarrow{\nabla}, \varphi\right] = ie\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}\varphi - \varphi\overrightarrow{\nabla}\right)$$

$$e\left[\varphi, \vec{p}\right]\psi = ie\hbar\left(\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\right)\psi = ie\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}\varphi\psi - \varphi\overrightarrow{\nabla}\psi\right) =$$

$$= ie\hbar\left\{\psi\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\psi - \varphi\vec{\nabla}\psi\right\} = ie\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}\varphi\right)\psi$$

$$c\left[\hat{\alpha} \cdot \vec{\hat{p}}, \hat{\vec{p}}\right] = c\sum\left\{\left[\alpha_j, \hat{p}_j\right]\hat{p}_i e_j + \alpha_i\left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right]e_j\right\} = 0$$

$$-e\left[\hat{\alpha}\cdot\vec{A},\vec{p}\right]=-e\sum\left\{\left[\alpha_{i,}\hat{p}_j\right]A_i+\alpha_i\left[A_i,\hat{p}_j\right]e_j\right\}=-e\sum\alpha_i\left[A_i,\hat{p}_j\right]e_j$$

$$-\frac{e}{c}\left[\hat{\mathrm{H}},\vec{A}\right]=-\frac{e}{c}\left\{c\left[\hat{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}},\vec{A}\right]-e\left[\hat{\vec{\alpha}}\cdot\vec{A},\vec{A}\right]+\right.$$

$$\left.+m_0c^2\left[\hat{\beta},\vec{A}\right]+e\left[\varphi,\vec{A}\right]\right\}$$

burada $\left[\hat{\beta},\vec{A}\right]=\left[\varphi,\vec{A}\right]_i=0$ və $\left[\hat{\vec{\alpha}}\cdot\vec{A},\vec{A}\right]=0.$

$$-e\left[\hat{\vec{\alpha}}\cdot\hat{\vec{p}},\vec{A}\right]=-e\left[\sum_{i,j}\left\{\left[\hat{\alpha}_i,A_j\right]\hat{p}_ie_j+\hat{\alpha}_i\left[\hat{p}_i,A_j\right]e_j\right\}\right]=$$

$$=-e\sum_{i,j}\hat{\alpha}_i\left[\hat{p}_i,A_j\right]e_j$$

Beləliklə, yekun olaraq aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\frac{d\hat{\vec{\Pi}}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[ie\hbar\left(\vec{\nabla}\varphi\right)-e\sum_{i,j}\alpha_i\left\{\left[A_i,\hat{p}_j\right]+\left[\hat{p}_i,\hat{A}_j\right]\right\}e_j\right]-\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=$$

$$=+e\underbrace{\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi\right)}_{\vec{E}}+\frac{ie}{\hbar}\sum_{ij}\hat{\alpha}_i\left\{-\left[A_i,\hat{p}_j\right]-\left[\hat{p}_i,A_j\right]\right\}e_j$$

$$=e\vec{E}+\frac{e}{c}\sum c\hat{\alpha}_i\left(\vec{\nabla}_jA_i-\vec{\nabla}_iA_i\right)e_j=$$

$$=e\left(\vec{E}+\frac{1}{c}c\left[\hat{\alpha}\cdot rot\vec{A}\right]\right)$$

$$\frac{d\hat{\vec{\Pi}}}{dt}=e\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{\hat{\upsilon}}\cdot\vec{B}\right]\right).$$

Bu Lorens qüvvəsidir. Burada aşağıdakı kommutasiyalardan istifadə olunmuşdur:

$$\left[\hat{p}_i,A_j\right]\psi=-i\hbar\left(\vec{\nabla}_iA_j-A_j\vec{\nabla}_i\right)\psi=-i\hbar\left(\vec{\nabla}_i\left(A_j\psi\right)-A_j\vec{\nabla}_i\psi\right)=$$

$$-i\hbar\left(\psi\vec{\nabla}_iA_j+A_j\vec{\nabla}_i\psi-A_j\vec{\nabla}_i\psi\right)=-\left(\vec{\nabla}_iA_j\right)\psi$$

MƏSƏLƏLƏR

Məsələ 1. $\hat{\vec{M}}$ - İmpuls momenti operatorunun $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatoru ilə kommutasiyasını hesablayın.

Həlli:

$$\left[\hat{\vec{M}},\hat{H}_D\right]=\hat{\vec{M}}\cdot\hat{H}_D-\hat{H}_D\cdot\hat{\vec{M}}$$

Burada $\hat{\vec{M}}$ və $\hat{H}_D$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\hat{\vec{M}}=\varepsilon_{ikl}x_k\hat{p}_l$$

$$\hat{H}_D=c\vec{\alpha}\vec{p}+\alpha_0 mc^2=c\alpha_j p_j+\alpha_0 mc^2$$

$$\left[\hat{\vec{M}},\hat{H}_D\right]=\left[\hat{M}_i,\,\hat{H}_j\right]=\left[\varepsilon_{ikl}x_k p_l,\,c\alpha_j p_j+\alpha_0 mc^2\right]=$$

$$=\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\,c\alpha_j\hat{p}_j\right]+\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\,\alpha_0 mc^2\right]=$$

$$=\varepsilon_{ikl}c\alpha_j p_l\left[x_k\hat{p}_j\right]+0=i\hbar c\varepsilon_{ikl}\alpha_j p_l\delta_{kj}=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j p_l$$

burada $\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\,\alpha_0 mc^2\right]=0$ -dır.

Beləliklə,

$$\left[\hat{\vec{M}},\hat{H}_D\right]=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j p_l$$

Məsələ 2. $\hat{A}^{-1}$ operatorunun mövcudluğu daxilində aşağıdakı eyniliyi isbat edin.

$\hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A}=f(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})$.

Həlli:

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{A}\hat{A}^{-1}=1$$

$f(\hat{B})$ - funksiyasını Teylor sırasına ayıraq:

$$f(\hat{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\hat{B}^n$$

$$\hat{A}^{-1} f(\hat{B})\hat{A} = \hat{A}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\hat{B}^n \hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\hat{A}^{-1}\hat{B}^n \hat{A} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\ \underbrace{\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}}\underbrace{\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}}\hat{A}^{-1}.........\hat{B}\hat{A} = f(\hat{B}) =`$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^n = f\left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)$$

$$\hat{A}^{-1} f(\hat{B})\hat{A} = f\left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right).$$

Burada biz

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^n \hat{A} = \underbrace{\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}}\underbrace{\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}}\hat{A}^{-1}\ldots\ldots\ldots\hat{B}\hat{A} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^n$$

eyniliyndən istifadə etdik.

Məsələ 3. $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ - Spin operatorunun ixtiyari istiqamət üzrə proyeksiyasının kvadratını hesablayın.

Həlli:

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \ \vec{\sigma} = \vec{i}\sigma_x + \vec{j}\sigma_y + \vec{k}\sigma_z .$$

Burada $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ -uyğun olaraq Pauli matrisləridir.

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1. \ \sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x,$$

$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y, \ \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z$$

şərtlərindən istifadə edək. Vektorun ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üzrə proyeksiyasını tapmaq üçün həmin vektoru $\vec{a}$ vektoruna skalyar vurub, onu $\vec{a}$ vektorunun moduluna bölmək lazımdır.

$$\frac{(\vec{s}\vec{a})^2}{a^2}=\frac{\hbar^2}{4a^2}(\sigma_x a_x+\sigma_y a_y+\sigma_z a_z)(\sigma_x a_x+\sigma_y a_y+\sigma_z a_z)=$$

$$=\frac{\hbar^2}{4a^2}[\sigma_x^2 a_x^2+\sigma_y^2 a_y^2+\sigma_z^2 a_z^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)a_x a_y+$$

$$+(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_y)a_y a_z+(\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_z)a_x a_z=\frac{\hbar^2}{4a^2}\cdot a^2=\frac{\hbar^2}{4}$$

Beləliklə,

$$\frac{(\vec{s}\vec{a})^2}{a^2}=\frac{\hbar^2}{4}$$

Məsələ 4. İmpuls momenti operatorunun kvadratı $\hat{\vec{M}}^2$ ilə $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatorunun kommutasiyasını hesablayın.

$$\left[\hat{\vec{M}}^2,\hat{H}_D\right]=?$$

Həlli:

$$\left[\hat{\vec{M}}^2,\hat{H}_D\right]=\left[\hat{M}_i\cdot\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]=\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]\hat{M}_i+\hat{M}_i\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]$$

$$\hat{M}_i=\varepsilon_{ikl}x_k\hat{p}_l$$

$$\hat{H}_j=c\alpha_j\hat{p}_j+\alpha_0 mc^2$$

$$\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]=\left[\varepsilon_{ikl}x_k\hat{p}_l,\ c\alpha_j p_j+\alpha_0 mc^2\right]=$$

$$=\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\ c\alpha_j\hat{p}_j\right]+\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\ \alpha_0 mc^2\right]=$$

$$=\varepsilon_{ikl}c\alpha_j p_l\left[x_k\hat{p}_j\right]+0=$$

$$=i\hbar c\varepsilon_{ikl}\alpha_j p_l\delta_{kj}=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j\hat{p}_l$$

burada $\varepsilon_{ikl}\left[x_k p_l,\ \alpha_0 mc^2\right]=0$ -dır.

$$\left[\hat{M}_i,\hat{H}_j\right]=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j\hat{p}_l$$

$$\left[\hat{\vec{M}}^2,\hat{H}_D\right]=\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]\hat{M}_i+\hat{M}_i\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j\hat{p}_l\cdot\hat{M}_i+$$

$$+\hat{M}_i\cdot i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j\hat{p}_l=i\hbar c(\varepsilon_{ijl}\alpha_j\hat{p}_l\hat{M}_i+\varepsilon_{ijl}\hat{M}_i\alpha_j\hat{p}_l)\neq 0$$

Məsələ 5. $\hat{A}$ və $\hat{B}$ operatorları ermit operatorlardırsa, $\dfrac{\hat{A}+i\hat{B}}{\hat{A}-i\hat{B}}$ operatorunun unitar operator olduğunu göstərin. Bu operatoru $e^{i\hat{F}}$ şəklində göstərin.

Həlli:

Unitarlıq şərti aşağıdakı kimi təyin olunur: $UU^+=I$, burada I - vahid matrisdir.

$$U=\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\hat{A}-i\hat{B}},\quad U^+=\frac{\hat{A}-i\hat{B}}{\hat{A}+i\hat{B}}\ .$$

$$UU^+=\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\hat{A}-i\hat{B}}\cdot\frac{\hat{A}-i\hat{B}}{\hat{A}+i\hat{B}}=1\,.$$

$\hat{A}$ və $\hat{B}$ operatorları komutasiya etməlidir.

$$e^{i\hat{F}}=e^{i\frac{\hat{F}}{2}}\cdot e^{i\frac{\hat{F}}{2}}=\frac{e^{i\frac{\hat{F}}{2}}}{e^{-i\frac{\hat{F}}{2}}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\hat{F}}{2}+i\sin\frac{\hat{F}}{2}}{\cos\frac{\hat{F}}{2}-i\sin\frac{\hat{F}}{2}}=\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\hat{A}-i\hat{B}}=e^{i\hat{F}}$$

$$U=\frac{\hat{A}+i\hat{B}}{\hat{A}-i\hat{B}},\ \hat{A}=cos\frac{\hat{F}}{2};\ \hat{B}=\sin\frac{\hat{F}}{2}.$$

Məsələ 6. Eyniliyi isbat edin:

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{A}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)+i\left(\hat{\vec{\sigma}}\left[\vec{A}\cdot\vec{B}\right]\right)$$

$\vec{A}$ və $\vec{B}$ - ixtiyari iki vektorudur.

Həlli:

Bu eyniliyi isbat etmək üçün iki vektorun skalyar hasilinin üç ölçülü fəzadakı koordinatlarda ifadəsindən istifadə edəcəyik:

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{A}}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{B}}\right)=(\hat{\sigma}_xA_x+\hat{\sigma}_yA_y+\hat{\sigma}_zA_z)(\hat{\sigma}_xB_x+\hat{\sigma}_yB_y+\hat{\sigma}_zB_z)=$$
$$=\hat{\sigma}_x^2A_xB_x+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_xA_yB_x+\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_xA_zB_x+\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_yA_xB_y+$$
$$+\hat{\sigma}_y^2A_yB_y+\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_yA_zB_y+\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_zA_xB_z+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_zA_yB_z+$$
$$\hat{\sigma}_z^2A_zB_z=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z-i\hat{\sigma}_zA_yB_x+i\hat{\sigma}_yA_zB_x+$$
$$+i\sigma_zA_xB_y-i\sigma_xA_zB_y-i\sigma_yA_xB_z+i\sigma_xA_yB_z=$$
$$=(\vec{A}\vec{B})+i\sigma_y(\hat{A}_z\hat{B}_x-\hat{A}_x\hat{B}_z)+i\sigma_z(\hat{A}_x\hat{B}_y-\hat{A}_y\hat{B}_x)+$$
$$+i\sigma_x(\hat{A}_y\hat{B}_z-\hat{A}_z\hat{B}_y)=(\vec{A}\vec{B})+i\sigma_y[\vec{A}\vec{B}]_y+i\sigma_z[\vec{A}\vec{B}]_z+$$
$$+i\sigma_x[\vec{A}\vec{B}]_x=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)+i\left(\vec{\sigma}\left[\vec{A}\cdot\vec{B}\right]\right)$$

Beləliklə isbat etdik ki, $\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{A}}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{B}}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)+i\left(\vec{\sigma}\left[\vec{A}\cdot\vec{B}\right]\right)$

Məsələ 7. Pauli matrisi üçün aşağıdakı bərabərliyi isbat edin:

$\cos(\hat{\sigma}_z \cdot \varphi) = \cos\varphi$.

Həlli:

Bunu isbat etmək üçün $\cos x$-funksiyasını Teylor sırasına ayıraq:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

Onda,

$$\cos(\hat{\sigma}_z\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (\hat{\sigma}_z\varphi)^{2n} = \hat{\sigma}_z^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (\varphi)^{2n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (\varphi)^{2n} = \cos\varphi .$$

Burada $\hat{\sigma}_z^{2n} = 1$ olduğunu nəzərə almışıq.

Onda, $\cos(\hat{\sigma}_z \cdot \varphi) = \cos\varphi$

Məsələ 8. Pauli matrisi üçün aşağıdakı bərabərliyi isbat edin: $\sin(\hat{\sigma}_x\varphi) = \hat{\sigma}_x \sin\varphi$

Həlli:

Bunu isbat etmək üçün $\sin x$-funksiyasını Teylor sırasına ayıraq:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Onda,

$$\sin(\hat{\sigma}_x\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (\hat{\sigma}_x\varphi)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \hat{\sigma}_x^{2k} \times$$

$$\times \hat{\sigma}_x (\varphi)^{2k+1} = \hat{\sigma}_x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (\varphi)^{2k+1} = \hat{\sigma}_x \cdot \sin\varphi .$$

burada $\hat{\sigma}_x^{2k} = 1$ olduğunu nəzərə almışıq. Onda,

$$\sin(\hat{\sigma}_x\varphi)=\hat{\sigma}_x \sin\varphi$$

Məsələ 9. Əgər A və B operatorları arasında kommutasiya münasibəti varsa, ond $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$ olduğunu isbat edin.

Həlli:

$$e^A e^B = e^{-A} e^A = e^A e^B e^{-A} e^A$$

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\ \hat{B}] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\ [\hat{A},\ \hat{B}]\right] + ...$$

Birinci iki hədlə kifayətlənsək, yəni:

$$e^A B e^{-A} = B + [A,\ B]$$

$$e^A e^B = e^{B+[A,B]} e^A = e^{[A,B]} e^B e^A$$

$$[B,\ [A,\ B]] = [A,[A,\ B]] = 0$$

$$(e^A e^B)^n = (e^A e^B)^{n-1} e^A e^B = (e^A e^B)^{n-1} e^{[A,B]} e^B e^A =$$

$$= e^{[A,B]} (e^A e^B)^{n-1} e^B e^A$$

$$e^A e^{kB} = e^{k[A,B]} e^{kB} e^A,$$

k- ədəddir. Onda,

$$(e^A e^B)^n = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} k[A,B]} e^{nB} e^{nA} = e^{\frac{1}{2}n(n-1)[A,B]} \cdot e^{nB} e^{nA}$$

Məsələ 10. Əgər A və B operatorları arasında kommutasiya münasibəti varsa, onda aşağıdakı eyniliyi isbat edin. $e^{A+B} = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^B e^A$

Həlli:

e^{A+B}-ni limit formasında hesablayaq.

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}(A+B))^n = \lim_{n\to\infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n,$$

$$(e^{A/n} e^{B/n})^n = e^{\frac{1}{2}n(n-1)\frac{1}{n^2}[A,B]} \cdot e^B e^A$$

Onda,

$$e^{A+B}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}n(n-1)\frac{1}{n^2}[A,B]}\cdot e^{B}e^{A}=e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{B}e^{A}$$

Məsələ 11. $\hat{\vec{J}}^2$- tam moment operatorunun kvadratı ilə onun $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ və $\hat{J}_z$ komponentləri arasında kommutasiya münasibətlərini hesablayın.

a) $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_x]=?$

Həlli:

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_x]=[\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2, \hat{J}_x]=[\hat{J}_x^2, \hat{J}_x]+[\hat{J}_y^2, \hat{J}_x]+$$

$$+[\hat{J}_z^2, \hat{J}_x]=\hat{J}_x^2\hat{J}_x-\hat{J}_x\hat{J}_x^2+[\hat{J}_y\cdot\hat{J}_y, \hat{J}_x]+[\hat{J}_z\cdot\hat{J}_z, \hat{J}_x]=$$

$$=0+\hat{J}_y[\hat{J}_y, \hat{J}_x]+[\hat{J}_y, \hat{J}_x]\hat{J}_y+\hat{J}_z[\hat{J}_z, \hat{J}_x]+[\hat{J}_z, \hat{J}_x]\hat{J}_z=$$

$$=\hat{J}_y(-i\hbar\hat{J}_z)+(-i\hbar\hat{J}_z)\hat{J}_y+\hat{J}_z(i\hbar\hat{J}_y)+i\hbar\hat{J}_y\hat{J}_z=$$

$$=-i\hbar\hat{J}_y\hat{J}_z-i\hbar\hat{J}_z\hat{J}_y+i\hbar\hat{J}_z\hat{J}_y+i\hbar\hat{J}_y\hat{J}_z=0$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_x]=0$$

b) $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_y]=?$

Həlli:

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_y]=[\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2, \hat{J}_y]=[\hat{J}_x^2, \hat{J}_y]+[\hat{J}_y^2, \hat{J}_y]+[\hat{J}_z^2, \hat{J}_y]=$$

$$=\hat{J}_x[\hat{J}_x, \hat{J}_y]+[\hat{J}_x, \hat{J}_y]\hat{J}_x+\hat{J}_y^2\hat{J}_y-\hat{J}_y\hat{J}_y^2+\hat{J}_z[\hat{J}_z, \hat{J}_y]+$$

$$+[\hat{J}_z, \hat{J}_y]\hat{J}_z=i\hbar\hat{J}_x\hat{J}_z+i\hbar\hat{J}_z\hat{J}_x-i\hbar\hat{J}_z\hat{J}_x+i\hbar\hat{J}_x\hat{J}_z=0$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_y]=0$$

c) $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z]=?$

Həlli:

$$[\hat{\vec{J}}^2,\hat{J}_z]=[\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2,\hat{J}_z]=[\hat{J}_x^2,\ \hat{J}_z]+[\hat{J}_y^2,\ \hat{J}_z]+[\hat{J}_z^2,\ \hat{J}_z]=$$

$$=\hat{J}_x[\hat{J}_x,\ \hat{J}_z\ ]+[\hat{J}_x,\ \hat{J}_z]\hat{J}_x+\hat{J}_y[\hat{J}_y,\ \hat{J}_z]+[\hat{J}_y,\ \hat{J}_z]\hat{J}_y+$$

$$+\hat{J}_z^2\hat{J}_z-\hat{J}_z\hat{J}_z^2=-i\hbar\hat{J}_x\hat{J}_y-i\hbar\hat{J}_y\hat{J}_x+i\hbar\hat{J}_y\hat{J}_x+i\hbar\hat{J}_x\hat{J}_y=0$$

$$[\hat{\vec{J}}^2,\hat{J}_z]=0$$

Məsələ 12. $F(\hat{B})$ funksiyası üçün aşağıdakı operator eyniliyi isbat edin: $e^{\hat{A}}F(\hat{B})e^{-\hat{A}}=F(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})$.

Həlli:

Əvvəlcə $F(\hat{B})$ operator funksiyasını Teylor sırasına ayıraq:

$$F(\hat{B})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\hat{B}^n$$

$$e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}}=e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}}........e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}}=$$

$$=(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})^n$$

Burada $e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}}=1$ olduğu nəzərə alınmışdır.

$$e^{\hat{A}}F(\hat{B})e^{-\hat{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})^n=F(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})$$

Məsələ 13. Əgər $\hat{F}$ operatoru ermit operatorsa, $U=e^{i\hat{F}}$ operatorunun unitar operator olduğunu göstətin.

Həlli:

$$U=e^{i\hat{F}},\ \hat{F}=\hat{F}^+,\ U^+=e^{-i\hat{F}}$$

$$U\cdot U^+=e^{i\hat{F}}\cdot e^{-i\hat{F}}=1,\ U\cdot U^+=1$$

və ya

$$U = e^{i\hat{F}} = 1 + i\hat{F} + ...$$

$$U^{+} = e^{-i\hat{F}} = 1 - i\hat{F} + ...$$

$$U \cdot U^{+} = (1 + i\hat{F} + ...)(1 - i\hat{F} + ...) = 1 + i(\hat{F} - \hat{F}) = 1$$

$$U \cdot U^{+} = 1 = U^{+} \cdot U$$

Məsələ 14. İsbat edin ki, $\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}\right)^{2} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_{z});$ burada

$$\hat{\sigma}_{+} = \left(\hat{\sigma}_{x} + i\sigma_{y}\right)/2, \ \ \hat{\sigma}_{-} = \left(\hat{\sigma}_{x} - i\sigma_{y}\right)/2.$$

Həlli:

$$\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}\right)^{2} = \left(\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_{x} + i\sigma_{y}\right)\left(\hat{\sigma}_{x} - i\sigma_{y}\right)\right)^{2} = \frac{1}{16}\left(\hat{\sigma}_{x}^{2} + \hat{\sigma}_{y}^{2} + \right.$$

$$\left. + i\hat{\sigma}_{y}\hat{\sigma}_{x} - i\hat{\sigma}_{x}\hat{\sigma}_{y}\right)^{2} = \frac{1}{16}\left(1 + 1 + i(-\hat{\sigma}_{z}) - i(\hat{\sigma}_{z})\right)^{2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(2 + \hat{\sigma}_{z} + \hat{\sigma}_{z}\right)^{2} = \frac{1}{16}\left(2 + 2\hat{\sigma}_{z}\right)^{2} = \frac{1}{16} \cdot 4\left(1 + \hat{\sigma}_{z}\right)^{2} =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \hat{\sigma}_{z}\right)^{2} = \frac{1}{4}\left(1 + 2\hat{\sigma}_{z} + \hat{\sigma}_{z}^{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + 2\hat{\sigma}_{z}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_{z}\right)$$

Beləliklə alırıq ki,

$$\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}\right)^{2} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_{z}).$$

Məsələ 15. İsbat edin ki, $\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}\right)^{3} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_{z}).$

Burada $\hat{\sigma}_{+} = \dfrac{\left(\hat{\sigma}_{x} + i\hat{\sigma}_{y}\right)}{2}, \ \ \hat{\sigma}_{-} = \dfrac{\left(\hat{\sigma}_{x} - i\hat{\sigma}_{y}\right)}{2}$

Həlli:

$$\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}\right)^{3} = \left(\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_{x} + i\hat{\sigma}_{y}\right)\left(\hat{\sigma}_{x} - i\hat{\sigma}_{y}\right)\right)^{3} =$$

$$\frac{1}{64}\left(\hat{\sigma}_x^2+\hat{\sigma}_y^2+i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\right)^3=\frac{1}{64}\left(1+1+i(-\hat{\sigma}_z)-\right.$$

$$\left.-i(\hat{\sigma}_z)\right)^3=\frac{1}{64}\left(2+\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z\right)^3=\frac{1}{64}\left(2+2\hat{\sigma}_z\right)^3=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\sigma}_z\right)^3=\frac{1}{8}\left(1+\hat{\sigma}_z\right)^2\left(1+\hat{\sigma}_z\right)=\frac{1}{8}\left(1+2\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z^2\right)\times$$

$$\times\left(1+\hat{\sigma}_z\right)=\frac{1}{8}\left(2+2\hat{\sigma}_z\right)\left(1+\hat{\sigma}_z\right)=\frac{1}{4}\left(1+\hat{\sigma}_z\right)\left(1+\hat{\sigma}_z\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z^2\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2+2\hat{\sigma}_z\right)=\frac{1}{2}\left(1+\hat{\sigma}_z\right);$$

Burada $\hat{\sigma}_z^2=1$ olduğu nəzərə alınmışdır.

Beləliklə alırıq ki,

$$\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right)^3=\frac{1}{2}(1+\hat{\sigma}_Z)$$

Məsələ 16. $\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\mathrm{p}}}\right)$ operatorunun $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatoru ilə kommutasiyasını hesablayın: $\left[\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}},\hat{H}_D\right]=?$

Həlli:

$$\left[\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}},\hat{H}_D\right]=\left[\hat{\sigma}_i\hat{p}_i,\,c\alpha_j\hat{p}_j+\alpha_0mc^2\right]=\left[\hat{\sigma}_i\hat{p}_i,\,c\alpha_j\hat{p}_j\right]+$$

$$+\left[\hat{\sigma}_i\hat{p}_i,\ \alpha_0mc^2\right]=c\hat{p}_i\hat{p}_j\left[\hat{\sigma}_i,\,\alpha_j\right]+0$$

$$c\hat{p}_i\hat{p}_j\left(\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}\right)=$$

$$=c\hat{p}_i\hat{p}_j\left(\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\sigma_j\\ \sigma_i\sigma_j & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\sigma_i\\ \sigma_j\sigma_i & 0\end{pmatrix}\right)=$$

$$= c\hat{p}_i \hat{p}_j \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= c\hat{p}_i \hat{p}_j \begin{pmatrix} 0 & 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2ci\varepsilon_{ijk}\hat{p}_i\hat{p}_j \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2ic\varepsilon_{ijk}\hat{p}_i\hat{p}_j\alpha_k .$$

$$c\hat{p}_i\hat{p}_j\left[\hat{\sigma}_i, \alpha_j\right] = c\hat{p}_i\hat{p}_j\left[\hat{\sigma}_i, \rho_1\hat{\sigma}_j\right] = c\hat{p}_i\hat{p}_j\rho_1 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k =$$

$$= 2ic\varepsilon_{ijk}\hat{p}_i\hat{p}_j\alpha_k , \ \rho_1\sigma_k = \alpha_k$$

Deməli,

$$\left[\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{p}}, \hat{H}_D\right] = 2ic\varepsilon_{ijk}\hat{p}_i\hat{p}_j\alpha_k$$

Məsələ 17. $\hat{\vec{s}}^{\,2}$ - spin vektorunun kvadratı operatorunun $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatoru ilə kommutasiyasını hesablayın.

$$\left[\hat{\vec{s}}^{\,2}, \ \hat{H}_D\right] = ?$$

Həlli:

$$\hat{\vec{s}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \quad \hat{\vec{s}}^{\,2} = \frac{\hbar^2}{4}\vec{\Sigma}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\vec{s}}^{\,2} = \frac{\hbar^2}{4}\vec{\Sigma}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) = \frac{3\hbar^2}{4} \cdot I$$

Beləliklə,

$$\left[\hat{\vec{s}}^{\,2}, \ \hat{H}_D\right] = \frac{3\hbar^2}{4}[I, \ \hat{H}_D] = 0$$

Məsələ 18. İsbat edin ki, $\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right)^n = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$.

Burada $\hat{\sigma}_{+} = \left(\hat{\sigma}_x + i\sigma_y\right)/2, \quad \hat{\sigma}_{-} = \left(\hat{\sigma}_x - i\sigma_y\right)/2$.

Həlli:

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}) = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x + i\sigma_y\right)\left(\hat{\sigma}_x - i\sigma_y\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 1 + i(-\hat{\sigma}_Z) - i(\hat{\sigma}_Z)\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \hat{\sigma}_Z + \hat{\sigma}_Z\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_Z\right).$$

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-})^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\hat{\sigma}_z\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right)$$

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-})^3 = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right)\right)^2 = \frac{1}{8}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right)^2\left(1 + \hat{\sigma}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z^2\right)\left(1 + \hat{\sigma}_z\right) = \frac{1}{8}\left(2 + 2\hat{\sigma}_z\right)\left(1 + \hat{\sigma}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right)\left(1 + \hat{\sigma}_z\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\hat{\sigma}_z\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_z\right).$$

Və beləliklə biz alırıq ki:

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}) = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_Z\right)$$

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-})^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_Z\right)$$

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-})^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_Z\right)$$

…………………………..………..

……………………………………

$$(\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-})^n = \frac{1}{2}\left(1 + \hat{\sigma}_Z\right) = \hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}$$

$$(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^n = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \text{ - qəbul edək.}$$

$$(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^{n+1} = (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^n(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) = (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) =$$

$$= (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^2 = \frac{1}{2}(1+\hat{\sigma}_z) = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$$

Məsələ 19. $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operatorunun məxsusi funksiyasını və məxsusi qiymətini tapın.

Həlli:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det\left|\hat{\sigma}_x - \lambda I\right| = 0$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda I = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1, \ \lambda_1 = +1, \lambda_2 = -1$$

$$\hat{\sigma}_x\psi = \lambda\psi \ , \ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \psi_2 = \psi_1 \\ \psi_1 = \psi_2 \end{cases}$$

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \psi_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dalğa funksiyasının normallanma şərtini yazaq:

$$\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 = 1$$

$$\int \psi_+^+ \psi_+ dx = 1$$

$$\int \psi_1^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dV = 1$$

$$\psi_1^*\psi_1 \int \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dV = 1$$

$$|\psi_1|^2 (1+1) = 1$$

$$2|\psi_1|^2 = 1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \ \psi_2 = -\psi_1, \ \psi_1 = -\psi_2$$

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = \psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$$

$$|\psi_1|^2 (1+1) = 1$$

$$2|\psi_1|^2 = 1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Məsələ 20. Pauli matrisi üçün aşağıdakı bərabərliyi isbat edin: $e^{i\hat{\sigma}_y \cdot \varphi} = \cos\varphi + i\hat{\sigma}_y \sin\varphi$.

Həlli:

Bu eyniliyi isbat etmək üçün riyaziyyatdan bizə məlum olan Muavr düsturundan istifadə edəcəyik, yəni:

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$e^{i\hat{\sigma}_y\cdot\varphi} = \cos\hat{\sigma}_y\cdot\varphi + i\hat{\sigma}_y\cdot\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\hat{\sigma}_y\cdot\varphi)^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\hat{\sigma}_y\cdot\varphi)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{\sigma}_y^{2n}(-1)^n\frac{(\varphi)^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_y^{2n}\hat{\sigma}_y\cdot(\varphi)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_y\cdot(\varphi)^{2n+1} = \cos\varphi + i\hat{\sigma}_y\sin\varphi\,.$$

Beləliklə isbat etdik ki,

$$e^{i\hat{\sigma}_y\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\hat{\sigma}_y\sin\varphi$$

Məsələ 21. Pauli matrisi üçün aşağıdakı bərabərliyi isbat edin.

$$e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi} = e^{2i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\hat{\sigma}_y\,.$$

Həlli:

Bu eyniliyi isbat etmək üçün riyaziyyatdan bizə məlum olan Muavr (Eyler) düsturundan istifadə edəcəyik, yəni

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Bu düsturu $e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi}$ vuruğuna tətbiq etsək, onda alarıq:

$$e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi} = e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y(\cos\hat{\sigma}_z\cdot\varphi - i\sin\hat{\sigma}_z\cdot\varphi) =$$

$$e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y(\cos\hat{\sigma}_z\cdot\varphi - i\hat{\sigma}_z\sin\varphi) = e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\big(\cos\hat{\sigma}_z\cdot\varphi +$$

$$+ i\hat{\sigma}_z\sin\varphi)\cdot\hat{\sigma}_y = e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}(\cos\hat{\sigma}_z\cdot\varphi + i\sin\hat{\sigma}_z\cdot\varphi)\cdot\hat{\sigma}_y =$$

$$= e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y = e^{2i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\hat{\sigma}_y$$

Beləliklə isbat olundu ki,

$$e^{i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\cdot\hat{\sigma}_y e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi} = e^{2i\hat{\sigma}_z\cdot\varphi}\hat{\sigma}_y$$

Məsələ 22. $\hat{J}_i$-tam moment operatoru ilə $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatorunun kommutasiyasını hesablayın: $[\hat{J}_i, \hat{H}_D] = ?$.

Həlli:

Burada $\hat{J}_i$ və $\hat{H}_D$ operatorları aşağıdakı kimi verilir:

$$\hat{J}_i = \hat{M}_i + \hat{S}_i, \ \hat{H}_D = c\alpha_j \hat{p}_j + \alpha_0 mc^2;$$

$$\left[\hat{\vec{J}}_i, \hat{H}_D\right] = \left[\hat{M}_i + \hat{S}_i, \ \hat{H}_D\right] = \left[\hat{M}_i, \ \hat{H}_j\right] + \left[\hat{S}_i, \ \hat{H}_j\right] =$$

$$= \left[\varepsilon_{ikl} x_k p_l, \ c\alpha_j \hat{p}_j + \alpha_0 mc^2\right] + \left[\frac{\hbar}{2}\Sigma_i, \ c\alpha_j \hat{p}_j + \alpha_0 mc^2\right] =$$

$$= c\alpha_j \varepsilon_{ikl} \hat{p}_l \left[x_k \hat{p}_j\right] + \frac{\hbar}{2} c\hat{p}_j \left[\Sigma_i, \alpha_j\right] =$$

$$= i\hbar c\varepsilon_{ikl} \alpha_j \hat{p}_l \delta_{kj} + \frac{\hbar}{2} cp_j 2i\varepsilon_{ijl}\alpha_l = i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j \hat{p}_l +$$

$$+ i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j \hat{p}_l = i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j p_l + i\hbar c\varepsilon_{ilj}\alpha_j \hat{p}_l =$$

$$= i\hbar c\left(\varepsilon_{ijl} + \varepsilon_{ilj}\right)\alpha_j \hat{p}_l = 0, \text{ burada } \varepsilon_{ijl} = -\varepsilon_{ilj}.$$

Beləliklə,

$$\left[\hat{\vec{J}}_i, \hat{H}_D\right] = 0$$

olduğunu alırıq.

Məsələ 23. $\hat{\vec{J}}^2$ - tam moment operatorunun kvadratı ilə $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatorunun kommutasiyasını hesablayın.

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{H}_D\right] = ?$$

Həlli:

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{H}_D\right] = \left[\hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{J}}, \hat{H}_D\right] = \left[\hat{\vec{J}}, \hat{H}_D\right]\hat{\vec{J}} + \hat{\vec{J}}\left[\hat{\vec{J}}, \hat{H}_D\right]$$

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{M}} + \hat{\vec{S}}, \quad \hat{J}_i = \hat{M}_i + \hat{S}_i$$

$$\hat{H}_D = c\alpha_j \hat{p}_j + \alpha_0 mc^2$$

$$\left[\hat{\vec{J}},\hat{H}_D\right]=\left[\hat{M}_i+\hat{S}_i,\ \hat{H}_D\right]=\left[\hat{M}_i,\ \hat{H}_j\right]+\left[\hat{S}_i,\ \hat{H}_j\right]=$$

$$=\left[\varepsilon_{ikl}x_k p_l,\ c\alpha_j\hat{p}_j+\alpha_0 mc^2\right]+\left[\frac{\hbar}{2}\sum{}_i,\ c\alpha_j\hat{p}_j+\alpha_0 mc^2\right]=$$

$$=c\alpha_j\varepsilon_{ikl}p_l\left[x_k\hat{p}_j\right]+\frac{\hbar}{2}c\hat{p}_j\left[\sum{}_i,\alpha_j\right]=$$

$$=i\hbar c\varepsilon_{ikl}\alpha_j p_l\delta_{kj}+\frac{\hbar}{2}cp_j 2i\varepsilon_{ijl}\alpha_l=i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_j p_l+$$

$$+i\hbar c\varepsilon_{ijl}\alpha_l p_j=0$$

Beləliklə,

$$\left[\hat{\vec{J}}^2,\hat{H}_D\right]=\left[\hat{\vec{J}},\hat{H}_D\right]\hat{\vec{J}}+\hat{\vec{J}}\left[\hat{\vec{J}},\hat{H}_D\right]=0\cdot\hat{\vec{J}}+\hat{\vec{J}}\cdot 0=0$$

$$\left[\hat{\vec{J}}^2,\hat{H}_D\right]=0$$

Məsələ 24. $\hat{\vec{s}}$ -spin operatorunun $\hat{H}_D$ - Dirak Hamilton operatoru ilə kommutasiyasını hesablayın. $[\hat{\vec{s}},\ \hat{H}_D]=?$

Həlli:

Spin operatoru və Dirak Hamilton operatoru aşağıdakı kimi verilir:

$$\hat{\vec{s}}=\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix};$$

$$\hat{H}_D=c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}+\alpha_0 mc^2=c\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\hat{\vec{p}}+mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$[\hat{\vec{s}},\ \hat{H}_D]=\left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\hat{\vec{p}}+mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\hat{\vec{p}}\right]+\left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix},\ mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{\hbar c}{2}\left\{\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_j\\ \hat{\sigma}_j & 0\end{pmatrix}p_j-\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_j\\ \hat{\sigma}_j & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_i\end{pmatrix}p_j\right\}+$$

$$+\frac{\hbar mc^2}{2}\left\{\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_i\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{\hbar c}{2}\left\{\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\\ \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j & 0\end{pmatrix}p_j-\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i\\ \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i & 0\end{pmatrix}p_j\right\}+$$

$$+\frac{\hbar mc^2}{2}\left\{\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & -\hat{\sigma}_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & -\hat{\sigma}_i\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{\hbar c}{2}\begin{pmatrix}0 & (\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j-\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i)p_j\\ (\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j-\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i)p_j & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\hbar c}{2}\begin{pmatrix}0 & 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k p_j\\ 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k p_j & 0\end{pmatrix}=$$

$$=i\hbar c\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_k\\ \hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}p_j=i\hbar c\varepsilon_{ijk}\alpha_k p_j\,.$$

Məsələ 25. $\hat{\vec{a}}$ və $\hat{\vec{b}}$ operatorlarının bir-biri ilə və $\hat{\vec{L}}$ operatoru ilə kommutasiya etdiyin bilərək, aşağıdakı eyniliyi isbat edin. Burada $\hat{\vec{L}}$ - hərəkət miqdarı momentidir.

$$[\left(\hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{L}}\right),\left(\hat{\vec{b}}\cdot\hat{\vec{L}}\right)]=i\hbar[\hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{b}}]\cdot\hat{\vec{L}}$$

Həlli:

Aşağıdakı kommutasiya şərtini daxil edək:

$$[\hat{\vec{a}},\hat{\vec{b}}]=[\hat{\vec{a}},\hat{\vec{L}}]=[\hat{\vec{b}},\ \hat{\vec{L}}]=0\,.$$

Eynşteynin cəmləmə qaydasından istifadə etsək, alarıq:

$$[\left(\hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{L}}\right),\left(\hat{\vec{b}}\cdot\hat{\vec{L}}\right)]=(\hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{L}})(\hat{\vec{b}}\cdot\hat{\vec{L}})-(\hat{\vec{b}}\cdot\hat{\vec{L}})(\hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{L}})=$$

$$=(\hat{a}_i\cdot\hat{L}_i)(\hat{b}_j\cdot\hat{L}_j)-(\hat{b}_j\cdot\hat{L}_j)(\hat{a}_i\cdot\hat{L}_i)=\hat{a}_i\hat{b}_j[\hat{L}_i,\ \hat{L}_j]=$$

$$= \hat{a}_i \hat{b}_j i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k = i\hbar [\hat{\vec{a}} \cdot \hat{\vec{b}}]_k \hat{L}_k = i\hbar [\hat{\vec{a}} \cdot \hat{\vec{b}}] \cdot \hat{\vec{L}}$$

Məsələ. 26 $\hat{A}$ və $\hat{B}$ operatorları üçün Baker-Hausdorf eyniliyini isbat edin.

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots\cdots\cdots$$

Həlli:

Burada $\hat{A}$ və $\hat{B}$ ixtiyari operatorlardır. Ümumiyyətlə operatorlardan asılı funksiya belə başa düşülür: Əgər ixtiyari funksiya $F(Z) = \sum C_n Z^n$ şəklində yazıla bilərsə, onda

$$\hat{F} = F(\hat{f}) = \sum C_n \hat{f}^n$$

Parametrdən asılı operatora baxaq:

$$\hat{f}(\lambda) = e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}}$$

Aydındır ki,

$$\hat{f}(\lambda = 1) = e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}}$$

$\hat{f}(\lambda)$ -funksiyasını $\lambda = 0$ ətrafında sıraya ayıraq:

$$f(\lambda) = f(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} + \cdots\cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{d^n f}{d\lambda^n}\right)_{\lambda=0}$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \hat{A} e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} - e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} \hat{A} e^{-\lambda \hat{A}} = e^{\lambda \hat{A}} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) e^{-\lambda \hat{A}} =$$

$$= e^{\lambda \hat{A}} [\hat{A}, \hat{B}] e^{-\lambda \hat{A}}$$

$$\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

$$\left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} = \hat{A}e^{\lambda\hat{A}}[\hat{A},\ \hat{B}]e^{-\lambda\hat{A}} - e^{\lambda\hat{A}}[\hat{A},\ \hat{B}]\hat{A}e^{-\lambda\hat{A}} =$$

$$= e^{\lambda\hat{A}}[\hat{A},[\hat{A},\ \hat{B}]]e^{-\lambda\hat{A}}$$

$$\left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} = [\hat{A},[\hat{A},\ \hat{B}]]$$

Beləliklə,

$$F(\lambda = 1) = e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\ \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\ \hat{B}]] + \cdots\cdots\cdots$$

Məsələ. 27 Spin operatorlarının məxsusi qiymətini və məxsusi funksiyasını tapın.

Həlli:

$$\hat{Q}\psi = \lambda\psi\ ,\ \hat{Q} = (\hat{S}_x,\ \hat{S}_y,\ \hat{S}_z),\ \hat{\vec{s}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\ ,\ \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x\psi_x = \lambda\psi_x\ ,\ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\psi_2\\ \frac{\hbar}{2}\psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\psi_1\\ \lambda\psi_2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\psi_2 - \lambda\psi_1\\ \frac{\hbar}{2}\psi_1 - \lambda\psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\hbar}{2}\psi_2 = \lambda\psi_1\\ \frac{\hbar}{2}\psi_1 = \lambda\psi_2\end{aligned}\right\},$$

Bu bərabərliyin II ifadəsindən ψ_2-ni tapıb, I də yerinə yazaq:

$$\psi_2 = \frac{\hbar}{2\lambda}\psi_1;\ \frac{\hbar}{2}\psi_2 = \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{\hbar}{2\lambda}\psi_1 = \lambda\psi_1$$

$$\frac{4\lambda^2}{\hbar^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

1) $\lambda = +\frac{\hbar}{2}$

Onda $\psi_1 = \psi_2$

2) $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$

$\psi_1 = -\psi_2$

$$|\psi_x|^2 = 1,\ \psi_x = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix};\ \psi_x^+ = (\psi_1^*\psi_2^*)$$

$$|\psi_x|^2 = \psi_1^*\psi_1^* + \psi_2^*\psi_2^* = 1,\ |\psi_1|^2 = 1,\ \lambda = +\frac{\hbar}{2},\ \psi_x = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{\hbar}{2},\ \psi_x = \begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

Məsələ 28. Fərz edək ki, *A* hər hansı $n \times n$ matrisdir. İsbat edin ki,

$$\det(\exp(A)) = \exp(Tr((A))$$

Burada *Tr* –trace, yəni matrisin diaqonal elementlərinin cəmidir.

Həlli:

İxtiyari $n \times n$ ölçülü matrisi məlum çevirmələrin köməyi ilə diaqonal matris formasına gətirmək olar. Yəni burada $n \times n$ ölçülü tərs *R* matrisi və onun üçün $R^{-1}AR = T$ şərti ödənilir. Burada *T* üçbucaq və ya diaqonal matrisdir. *T* matrisinin diaqonal elementləri *A* matrisinin məxsusi qiymətləridir: $A(\lambda_i)$. $R^{-1}AR = T$ şərtindən $A = RTR^{-1}$ alırıq.

$$\exp(A) = \exp(RTR^{-1}) = \sum_n \frac{(RTR^{-1})^n}{n!} = R\sum_n \frac{(T)^n}{n!}R^{-1} = R\exp(T)R^{-1}$$

T - üçbucaq, yəni diaqonal matris olduğundan, diaqonal elementlərinin k tərtibi λ_i^k olar, burada k müsbət ədəddir. Onda $\exp(T)$-nin diaqonal elementlərini belə yaza bilərik: $\exp(\lambda_i)$.

Onda alarıq:

$$\det(\exp(T)) = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots\cdots + \lambda_n) = \exp(Tr(T))$$

Nəzərə alsaq ki,

$$Tr(T) = R^{-1}AR = Tr(ARR^{-1}) = Tr(A)$$

və

$$\det(\exp(T)) = \det(\mathrm{Re}\,xp(T)R^{-1}) = \det(\exp(RTR^{-1})) = \det(\exp(A))$$

Beləliklə, alırıq ki: $\det(\exp(A)) = \exp(Tr((A))$

Alternativ həll üsulu:

$$e^{(Tr(A))} = e^{(\sum\limits_n a_n)} = \prod_n e^{a_n}$$

Burada, a_n-A matrisinin məxsusi qiymətidir. Əgər

$$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \text{ onda } e^A|a_n\rangle = e^{a_n}|a_n\rangle$$

$$\det e^A = \prod_n a_n' = \prod_n e^{a_n} = e^{TrA}.$$

Məsələ 29. Fərz edək ki, A 4×4 tərtibli simmetrik matrisdir. Bu matrisin məxsusi qiymətlərinin *0,1,2,3* olduğu və onun məxsusi (normallanmış) vektorlarının

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ və } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

olduğunu bilərək, A matrisinin aşkar ifadəsini tapın.

Həlli:

A simmetrik matris olduğundan elə U ortoqonal matrisi var ki,

$$D = UAU^T$$

şərti ödənilir. Burada D-diaqonal matrisdir, yəni

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

U^T -matrisi isə A-matrisinin məxsusi vektorlarından təşkil olunur və aşağıdakı formadadır:

$$U^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buradan

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$U^T = U^{-1}$ olduğundan

$$A = U^{-1} D (U^T)^{-1} = U^T DU .$$

Beləliklə A-matrisi üçün

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 5 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

alarıq.

Məsələ 30. Aşağıdakı iki ket vektorları verilmişdir:

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}5i\\ 2\\ -i\end{pmatrix},\ |\varphi\rangle=\begin{pmatrix}3\\ 8i\\ -9i\end{pmatrix}$$

Tapmalı:

a) $|\psi\rangle^*$ və $\langle\psi|$.

b) $|\psi\rangle$-normallaşmışdırmı? Əgər yox, onu normallaşdırın.

c) $|\psi\rangle$ və $|\varphi\rangle$-ortoqonaldırmı?

Həlli:

$$|\psi\rangle^*=\begin{pmatrix}5i\\ 2\\ -i\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}-5i\\ 2\\ i\end{pmatrix};\ \langle\psi|=(-5i\ \ 2\ \ i)\,;\ |\psi\rangle^*\neq\langle\psi|$$

$$\langle\psi|\psi\rangle=(-5i\ 2\ i)\begin{pmatrix}5i\\ 2\\ i\end{pmatrix}=(-5i)(5i)+(2)\cdot(2)+(i)(-i)=25+4+1=30$$

Buradan görünür ki, $|\psi\rangle$ funksiyası normallanmayıb. Onu $\frac{1}{\sqrt{30}}$-a vursaq normallanmış funksiya alarıq:

$$|\chi\rangle=\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{pmatrix}5i\\ 2\\ -i\end{pmatrix}\Rightarrow\langle\chi|\chi\rangle=1\,.$$

c) $|\psi\rangle$ və $|\varphi\rangle$-vektorları ortoqonal deyillər.

$$\langle\psi|\varphi\rangle = (-5i \ \ 2 \ \ i)\begin{pmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{pmatrix} = (-5i)(3) + (2)\cdot(8i) + (i)(-9i) = 9 + i \,.$$

Beləliklə,

$$\langle\psi|\varphi\rangle = 9 + i$$

Məsələ 31. Dörd ölçülü polyarizasiya operatorunun kvadratının mənfi birə bərabər olduğunu göstərin:

$$s_\mu s^\mu = -1 \,.$$

Həlli:

4 - ölçülü polyarizasiya s^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ vektorunun komponentləri

$$s^0 = \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})}{m}, \ \ \vec{s} = \vec{\xi} + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})\vec{p}}{m(m+E)} \,,$$

burada $\vec{\xi}$ - sükunətdə olan zərrəciyin polyarizasiya vektorudur və

$$\vec{\xi}^{\,2} = 1. \ \ s_0 = s^0, \ \ s_1 = -s^1, \ s_2 = -s^2, \ s_3 = -s^3$$

olduğundan

$$s_\mu s^\mu = s_0 s^0 + s_1 s^1 + s_2 s^2 + s_3 s^3 = (s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2 -$$

$$-(s^3)^2 = (s^0)^2 - \vec{s}^{\,2} = \left(\frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})}{m}\right)^2 - \left(\vec{\xi} + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})\vec{p}}{m(m+E)}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m^2} - \vec{\xi}^{\,2} - \frac{2(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m(m+E)} - \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2\,\vec{p}^{\,2}}{m^2(m+E)^2} =$$

$$= \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m^2}\left(1 - \frac{2m}{(m+E)} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{(m+E)^2}\right) - \vec{\xi}^{\,2} =$$

$$=\frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m^2}\left(1-\frac{2m}{(m+E)}-\frac{E^2-m^2}{(m+E)^2}\right)-\vec{\xi}^2=$$

$$=\frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m^2}\left(1-\frac{2m}{(m+E)}-\frac{E-m}{m+E}\right)-\vec{\xi}^2=$$

$$=\frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2}{m^2}\cdot\frac{m+E-2m-E+m}{m+E}-\vec{\xi}^2=-\vec{\xi}^2=-1$$

olar. Burada $E^2=c^2\vec{p}^2+m^2c^4$ münasibətinə əsasən $c=1$ olduqda $\vec{p}^2=E^2-m^2$ ifadəsindən istifadə olunmuşdur.

Məsələ 32. Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin $\frac{1}{r}$ Skalyar potensialı üçün analitik həllini tapın.

Həlli:

Dörd ölçülü fəzada Kleyn-Fok-Qordon tənliyi aşağıdakı kimi yazılır.

$$\left(\hat{p}^{\mu}-\frac{e}{c}A^{\mu}\right)\left(\hat{p}_{\mu}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)\psi=m^2c^2\psi \qquad (1)$$

və ya

$$\left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\frac{e}{c}A_{\nu}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)\right]\psi=m^2c^2\psi \qquad (2)$$

(1) tənliyini açıq şəkildə isə aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)^2\psi=\left(\sum_{i=1}^{3}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)^2+m^2c^2\right)\psi=$$

$$=\left(\left(i\hbar\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m^2c^2\right)\psi \qquad (3)$$

Stasionar Kleyn-Fok-Qordon tənliyində sferik simmetrik Kulon potensialı üçün radial və bucaq dəyişənlərinə ayırmaq üçün $eA_0 = V(r)$ və $\vec{A} = 0$ qəbul etməliyik. Onda alarıq:

$$\left[\left(\varepsilon - V(r)\right)^2 - m^2c^4 + \hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2\right]\psi(r) = 0 \tag{4}$$

(4) tənliyini sferik koordinat sistemində aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$-\hbar^2 c^2 \left[\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r) =$$

$$= [\left(\varepsilon - V(r)\right)^2 - m^2c^4 + \hbar^2 c^2\vec{\nabla}^2]\psi(r) \tag{5}$$

$\psi(r)$-dalğa funksiyasını dəyişənlərinə ayıraq:

$$\psi(r) = \chi(r)Y(\theta,\varphi) \tag{6}$$

Onda alarıq:

$$\hbar^2 c^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\chi}{\partial r}\right) + \left\{(\varepsilon - V(r))^2 - m^2c^2\right\}\chi(r) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0$$

Burada λ dəyişənlərə ayırma sabitidir, $\lambda = l(l+1)$, $l = 0,1,2,\cdots$ və $m = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$

Radial Kleyn-Fok-Qordon tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi(r) =$$

$$=\frac{(\varepsilon - V(r))^2 - m^2c^4}{\hbar^2 c^2}\chi(r)=0 \tag{8}$$

Radial funksiya üçün $\chi(r)=\frac{R(r)}{r}$ əvəzləməsindən istifadə etsək, (8) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right]R(r)=0 \tag{9}$$

Burada

$$k^2=\frac{(\varepsilon - V(r))^2 - m^2c^4}{\hbar^2 c^2} \tag{10}$$

Əsas məqsədimiz

$$V(r)=-\frac{Z\alpha}{r} \tag{11}$$

potensiallı və zərrəciyin kütləsinin kvadratı ilə mütənasib olan skalyar sahə üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin analitik həllini tapmaqdır. Bunun üçün kütlə kvadratında belə bir əvəzləmə edək:

$$m^2c^4 \to m^2c^4 + U^2(r) \tag{12}$$

Qeyd edək ki, kütlə kvadratına potensialın birbaşa daxil edilməsi qarışıq həddin yaranmasına səbəb olur, ona görə də biz burada onu nəzərə almayacağıq.

Beləliklə, skalyar potensial üçün radial Kleyn-Fok-Qordon tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2c^2}-\frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2}-\frac{U^2(r)}{\hbar^2c^2}\right]R(r)=0 \tag{13}$$

Skalyar qarşılıqlı təsir, spini sıfıra bərabər olan zərrəciyin yükündən asılı deyil. (13) tənliyini $\frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2}$ vuruğuna bölək və aşağıdakı əvəzləməni daxil edək.

$$r' = r\frac{mc^2}{\hbar c} \tag{14}$$

Onda:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} + \frac{\varepsilon^2}{m^2c^4} - 1 - \frac{U^2(r')}{m^2c^4}\right]R(r') = 0 \tag{15}$$

Burada r' - ölçüsüz kəmiyyətdir. Qarşılıqlı təsiri aşağıdakı formada daxil edək:

$$\frac{U^2(r')}{m^2c^4} = V(r') = -\frac{Z\alpha}{r'} \tag{16}$$

Həmçinin (15) tənliyində belə bir əvəzləmə edək:

$$b^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2c^4} \tag{17}$$

Onda alarıq:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} - b^2 + \frac{Z\alpha}{r'}\right]R(r') = 0 \tag{18}$$

Yeni dəyişən daxil edək:

$$\rho = 2br'$$

$$\frac{d}{dr'} = \frac{d\rho}{dr'} \cdot \frac{d}{d\rho} = 2b\frac{d}{d\rho}$$

$$\frac{d^2}{dr'^2} = 4b^2\frac{d^2}{d\rho^2}$$

$$\left[4b^2\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{4b^2}{\rho^2}l(l+1)-b^2+2b\frac{Z\alpha}{\rho}\right]R(\rho)=0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{Z\alpha}{2b\rho}\right]R(\rho)=0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{c}{\rho}\right]R(\rho)=0 \qquad (19)$$

Burada

$$c=\frac{Z\alpha}{2b}$$

$\rho=0$ və $\rho=\infty$ nöqtələri (19) tənliyinin məxsusi nöqtələridir. Əvvəlcə bu tənliyin asimptotik həllərini tapaq. $\rho\to\infty$ halında (19) tənliyindən alarıq:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}\right]R(\rho)=0$$

$$R(\rho)=e^{\lambda\rho}$$

$$\lambda^2-\frac{1}{4}=0,\ \ \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

$$R(\rho)=C_1e^{\frac{1}{2}\rho}+C_2e^{-\frac{1}{2}\rho} \qquad (20)$$

Dalğa funksiyasının sonluluq şərtindən istifadə edərək, $C_1=0$ alarıq, onda (20) ifadəsini belə yaza bilərik:

$$R(\rho)=C_2e^{-\frac{1}{2}\rho} \qquad (21)$$

Analoji olaraq $\rho\to 0$ halında (19) tənliyindən alarıq:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R(\rho)=0 \tag{22}$$

Beləliklə (22) tənliyinin həllini aşağıdakı sıra şəklində axtaraq:

$$R(\rho)=\sum_{\nu} a_{\nu}\rho^{\nu}$$

$$R'(\rho)=\sum_{\nu} \nu a_{\nu}\rho^{\nu-1}\ ,\ R''(\rho)=\sum_{\nu} \nu(\nu-1)a_{\nu}\rho^{\nu-2}$$

Onda alarıq:

$$\sum_{\nu}\left(\nu(\nu-1)a_{\nu}\rho^{\nu-2}-l(l+1)a_{\nu}\rho^{\nu-2}\right)=0$$

$$\nu(\nu-1)-l(l+1)=0$$

$$\nu^2-\nu-l(l+1)=0$$

$$D=1+4l(l+1)=(2l+1)$$

$$\nu_{1,2}=\frac{1\pm 2(l+1)}{2}$$

$$\nu_1=l+1,\ \nu=-l$$

$\rho\to 0$ halında tənliyin həlli belədir:

$$R(\rho)=\rho^{l+1} \tag{23}$$

Beləliklə (15) tənliyinin ümumi həllini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$R(\rho)=N\rho^{l+1}F(\rho)e^{-\rho/2} \tag{24}$$

Burada $F(\rho)$ funksiyasını tapmaq üçün (24) ifadəsini (15) tənliyində nəzərə alsaq, bu cırlaşmış Kummer tənliyinə gətirər.

$$R'(\rho)=N(l+1)\rho^{l}e^{-\rho/2}F(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{l+1}e^{-\rho/2}F(\rho)+$$

$$+N\rho^{l+1}e^{-\rho/2}F'(\rho)$$

$$R''(\rho)=N(l+1)\rho^{l}e^{-\rho/2}F''(\rho)+2(l+1)N\rho^{l}e^{-\rho/2}F'(\rho)-$$

$$-N\rho^{l+1}e^{-\rho/2}F'(\rho)-(l+1)N\rho^{l}e^{-\rho/2}F(\rho)+$$
$$+l(l+1)N\rho^{l-1}e^{-\rho/2}F(\rho)+\frac{1}{4}N\rho^{l+1}e^{-\rho/2}F(\rho) \qquad (25)$$

$$\rho e^{-\rho/2}F''(\rho)+2(l+1)e^{-\rho/2}F'(\rho)-\rho e^{-\rho/2}F'(\rho)-$$
$$-(l+1)e^{-\rho/2}F(\rho)+\frac{1}{4}\rho e^{-\rho/2}F(\rho)-$$
$$-\frac{1}{4}\rho e^{-\rho/2}F(\rho)+ce^{-\rho/2}F(\rho)=0$$

$$\rho F''(\rho)+(2l+2-\rho)F'(\rho)+(c-(l+1))F(\rho)=0 \qquad (26)$$

və ya

$$\rho\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2}+\left[2l+2-\rho\right]\frac{dF(\rho)}{d\rho}+\left[c-(l+1)\right]F(\rho)=0 \qquad (27)$$

(27) tənliyinin həllini sıra şəklində axtaraq:

$$F(\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\rho^{r+k} \qquad (28)$$

(28) sırasını (27) tənliyində nəzərə alsaq, yekun həlli aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$F(\rho)={}_1F_1(l+1-c,\ 2l+2,\ \rho) \qquad (29)$$

Enerjinin məxsusi qiymətləri aşağıdakı münasibətdən tapılır:

$$l+1-c=-n_r \qquad (30)$$

Burada,

$$n_r=0,1,2,\cdots \qquad (31)$$

Baş kvant ədədi belə təyin olunur:

$$n=l+1+n_r \qquad (32)$$

(32) ifadəsindən enerjinin məxsusi qiyməti aşağıdakı kimi tapılır.

$$n_r = c - l - 1$$
$$n = l + 1 + n_r = l + 1 + c - l - 1 = c$$
$$n = c$$
$$c = \frac{Z\alpha}{2b}$$
$$n = \frac{Z\alpha}{2b}$$
$$b = \frac{Z\alpha}{2n}, \; b^2 = \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}$$
$$b^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2c^4}, \; 1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2c^4} = \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}$$
$$\varepsilon^2 = \left\{1 - \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}\right\} m^2c^4$$
$$\varepsilon = \pm\left\{1 - \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}\right\}^{1/2} mc^2 \qquad (33)$$

Kulon potensialı üçün Şredunger tənliyinin həllinə analoji olaraq, burada da ε enerjinin məxsusi qiyməti l orbital kvant ədədindən asılı deyil. Həmçinin (33) ifadəsindən göründüyü kimi ε enerjinin məxsusui qiyməti zərrəcik və anti zərrəcik üçün simmetrikdir. Əlaqə sabitinin kritik qiyməti aşağıdakı ifadədədn tapılır:

$$Z_{kr} = \frac{2n}{\alpha} \qquad (34)$$

Zommerfeldin incə quruluş sabiti $\alpha_E = \frac{1}{137}$–ni (34) düsturunda nəzərə alsaq, onda

$$Z_{kr}(1s) \cong \frac{21}{\frac{1}{137}} = 274,07$$

$$Z_{kr}(2s) = Z_{kr}(2p) \cong 548{,}14$$

alarıq. Enerjinin *z-ə* görə törəməsini Z_{kr} nöqtəsində hesablasaq, onda alarıq:

$$\varepsilon = \pm \left\{ 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2} \right\}^{1/2} mc^2$$

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dZ}\right|_{Z=Z_{kr}} = -\frac{\pm(mc^2)}{2\sqrt{1-\frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}}} \cdot \left(\frac{2Z\alpha}{4n^2}\right) = -\frac{\pm(mc^2)}{\sqrt{1-\frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}}} \cdot \frac{Z\alpha}{4n^2} = -$$

$$-\frac{\pm(mc^2)}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4n^2}\cdot\frac{4n^2}{\alpha^2}}} \cdot \frac{Z\alpha}{4n^2} \to \pm\infty \tag{35}$$

Yekun radial funksiya belə təyin olunur:

$$R(\rho) = N\rho^{l+1} {}_1F_1(-n+l-1,\ 2l+2,\ \rho)e^{-\rho/2} \tag{36}$$

Həmçinin $R(\rho)$-radial funksiyası Laqer çoxhədlisi ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$R(\rho) = N\rho^{l+1} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \cdot (2l+1)! L_{n-l-1}^{(2l+1)}(\rho)e^{-\rho/2} \tag{37}$$

(37) ifadəsində N normallanma vuruğunu elə seçməliyik ki, $R(\rho)$ funksiyası vahidə normallansın:

$$\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = \pm 1 \tag{38}$$

Radial sıxlıq belə təyin olunur:

$$\rho(r) r^2 = \varepsilon R^2(r)$$

(38) inteqralını hesablamaqla normallanma sabitini taparıq:

$$N=\sqrt{\frac{(n+l)!}{2|\varepsilon|(n-l-1)!}}\cdot\frac{1}{(2l+1)!}(2p)^{3/2} \qquad (39)$$

Məsələ 33. Bircins maqnit sahəsində $(\vec{H}=const)$ hərəkət edən zərrəcik üçün stasionar Kleyn-Fok-Qordon tənliyini həll edin.

$$\left\{c^2\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m^2c^4\right\}\psi=\varepsilon^2\psi\,, \qquad (1)$$

$H=rot\vec{A}$

a) $A_x=0,\;\; A_y=Hx,\;\; A_z=0$

b) $A_x=-Hy,\;\; A_y=0;\;\; A_z=0$ (2)

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi=\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{c^2}\psi \qquad (3)$$

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2=\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}A_y\right)^2+\left(\hat{p}_z-\frac{e}{c}A_x\right)^2.$$

b) $A_x=0,\;\; A_y=Hx,\;\; A_z=0$ olduqda

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2=\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+\hat{p}_z^2 \qquad (4)$$

$\hat{p}_y$ və $\hat{p}_z$ operatorları bir-biri ilə və həm də $\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ operatoru ilə kommutasiya etdiyindən, eyni zamanda $\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ operatorun və $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ -in məxsusi funksiyasını

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y\cdot y+p_z\cdot z)}\psi(x) \tag{5}$$

şəklində seçmək olar. (5)-i (4)-də nəzərə alaq:

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}\left[\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+\hat{p}_z^2\right]\times$$

$$\times e^{\frac{i}{\hbar}(p_y\cdot y+p_z\cdot z)}\psi(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y\cdot y+p_z.z)}\left[(-i\hbar)^2\frac{d^2}{dx^2}+\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+p_z^2\right]\psi(x)$$

$$\hat{p}_z^2e^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y+p_z\cdot z}\psi(x)=e^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}\psi(x)(-i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{\frac{i}{\hbar}p_z\cdot z}=$$

$$=e^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}\psi(x)(-i\hbar)^2\left(\frac{i}{\hbar}p_z\right)^2$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}p_z\cdot z}=p_z^2e^{\frac{i}{\hbar}(p_y\cdot y+p_z\cdot z)}\psi(x)$$

$$\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2\psi(x,y,z)=\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2e^{\frac{i}{\hbar}(p_yy+p_zz)}\psi(x)=$$

$$=e^{\frac{i}{\hbar}p_zz}\psi(x)\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2e^{\frac{i}{\hbar}p_yy}=e^{\frac{i}{\hbar}p_zz}\psi(x)\times$$

$$\times\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2e^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}=e^{\frac{i}{\hbar}p_zz}\psi(x)\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)\left(\hat{p}_ye^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}-\frac{e}{c}Hxe^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}\right)=$$

$$=e^{\frac{i}{\hbar}p_zz}\psi(x)\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dy}e^{\frac{i}{\hbar}p_yy}-\frac{e}{c}Hxe^{\frac{i}{\hbar}p_yy}\right)=$$

$$=e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}\psi(x)\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)\left(-i\hbar\frac{i}{\hbar}\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)e^{\frac{i}{\hbar}p_y\cdot y}=$$

$$=\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}\psi(x)\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)e^{\frac{i}{\hbar}p_y y}=\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\psi(x)$$

$$\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)e^{\frac{i}{\hbar}p_y y}=\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)e^{\frac{i}{\hbar}p_y y}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi\hbar}\left[\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+\hat{p}_z^2\right]e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\psi(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\left\{-\hbar^2\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+p_z^2\right]\psi(x)\right\} \qquad (6)$$

(6) ifadəsini (3) tənliyində yerinə yazsaq:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\left\{-\hbar^2\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+p_z^2\right]\psi(x)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{c^2}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\psi(x)$$

buradan

$$-\hbar^2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2+p_z^2\right]\psi(x)=\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{c^2}\psi(x)$$

və ya

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2m}\left(p_y-\frac{e}{c}Hx\right)^2\psi(x)=\left(\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m}\right)\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{e^2H^2}{2mc^2}\left(x-\frac{cP_y}{eH}\right)^2\psi(x)=\left(\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m}\right)\psi(x)$$

sonda alırıq:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}+\frac{e^2H^2}{2mc^2}\tau^2\psi(\tau)=E\psi(\tau) \tag{7}$$

burada

$$\tau = x-\frac{cp_y}{eH},\quad E=\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m} \tag{8}$$

Kvant harmonik ossilyator tənliyi aşağıdakı şəklə malikdir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x)=E\psi(x)$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\ \psi_n(x)=\left(2^n n!x_0\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{-x^2}{2x_0^2}}H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\ .$$

(7) tənliyi harmonik ossilyator tipli tənlikdir və ona görə də

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m}=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

$$E_{np_z}^2=m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n=0,1,...$$

$$E_{np_z}=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

burada $\omega=\dfrac{eH}{mc}$ -dir.

$$\psi_n=\psi_n\left(x-\frac{cp_y}{eH}\right)=\left(2^n n!x_0\sqrt{\pi}\right)^{-1/2}e^{-\frac{(x-cp_y/eH)^2}{2x_0^2}}\times$$

$$\times H_n\left(\frac{x-cp_y/eH}{x_0}\right) \tag{9}$$

beləliklə,

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y+p_z z)}\psi(x)\left(x-\frac{cp_y}{eH}\right) \tag{10}$$

burada

$$\psi_n\left(x-\frac{cp_y}{eH}\right)=\left(2^n n! x_0\sqrt{\pi}\right)^{-1/2}e^{-\frac{(x-cp_y/eH)^2}{2x_0^2}}H_n\left(\frac{x-cp_y/eH}{x_0}\right)$$

$$E_{np_z}=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)},\quad \omega=\frac{eH}{mc}.$$

b) $A_x=-Hy,\ A_y=0,\ A_z=0$ (11)

olduqda

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2=\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}A_y\right)^2+$$
$$+\left(\hat{p}_z-\frac{e}{c}A_z\right)^2=\left(\hat{p}_x+\frac{eH}{c}y\right)^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2. \tag{12}$$

$\hat{p}_x$ və $\hat{p}_z$ operatorları bir-biri ilə və həm də $\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ operatoru ilə kommunikasiya etdiyindən sistemin məxsusi funksiyasını

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\psi(y) \tag{13}$$

şəklində seçmək olar. (13)-ifadəsini (12) –də nəzərə alsaq:

$$\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi(x,y,z)=\left[\left(\hat{p}_x+\frac{eH}{c}y+\right)^2\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2\right]\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\psi(y)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\times$$

$$\times\left[\left(p_x+\frac{e}{c}Hy\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+\hat{p}_z^2\right]\psi(y) \tag{14}$$

$$\left\{c^2\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m^2c^4\right\}\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\psi(y)=$$

$$=\varepsilon^2\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\psi(y)$$

$$\left\{c^2\left[\left(p_x+\frac{e}{c}Hy\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+\hat{p}_z^2\right]+m^2c^4\right\}\psi(y)=\varepsilon^2\psi(y)$$

$$\left[-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+\left(p_x+\frac{eH}{c}y\right)^2\right]\psi(y)=\left(\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{c^2}-p_z^2\right)\psi(y)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{1}{2m}\left(p_x+\frac{eH}{c}y\right)^2\psi(y)=$$

$$=\left(\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{c^2}-\frac{p_z^2}{2m}\right)\psi(y) \tag{15}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{e^2H^2}{2mc^2}\left(y+\frac{cp_x}{eH}y\right)^2\psi(y)=E\psi(y)\,.$$

Beləliklə, alarıq:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}+\frac{e^2H^2}{2mc^2}\tau^2\psi(\tau)=E\psi(\tau) \qquad (16)$$

burada

$$\tau=y+\frac{cp_x}{eH}, \quad E=\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m} \qquad (17)$$

(17) tənliyi harmonik ossilyator tipli tənlikdir və ona görə də

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{2mc^2}-\frac{p_z^2}{2m}=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$E_{np_z}^2=m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \; n=0,1,2,...$$

$$E_{np_z}=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad (18)$$

burada $\omega=\dfrac{eH}{mc}$.

$$\psi_n(\tau)=\psi_n\left(y+\frac{cp_x}{eH}\right)=\left(2^n n! x_0\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{-\frac{(y+cp_x/eH)2}{2y_0^2}}\times$$

$$\times H_n\left(\frac{y-cp_x/eH}{y_0}\right) \qquad (19)$$

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x+p_z z)}\psi_n\left(y+\frac{cp_x}{eH}\right) \qquad (20)$$

Məsələ 34. Kulon potensialı sahəsində yerləşən π-mezon üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyini həll edin.

Həlli:

Əvvəlcə dörd ölçülü kovariant və kontravariant vektorları daxil edək:

$$A^{\mu} = \{A_0, \vec{A}\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$$

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} = \{A_0, -\vec{A}\}$$

$$\widehat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0, \;\; \widehat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

Dörd ölçülü impuls operatorunu elektromaqnit sahəsini nəzərə almaqla yazaq:

$$\widehat{p}^{\mu} \to \widehat{p}^{\mu} - \frac{e}{c} A^{\mu} \text{ və ya } \widehat{p}_{\mu} \to \widehat{p}_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu}$$

Onda dördölçülü halda elektromaqnit sahəsini nəzərə almaqla Kleyn-Fok-Qordon tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$(\widehat{p}^{\mu} \to \widehat{p}^{\mu} - \frac{e}{c} A^{\mu})(\widehat{p}_{\mu} \to \widehat{p}_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu})\psi = m_0^2 c^2 \psi$$

Yaxud

$$\left[g^{\mu\nu} (i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - \frac{e}{c} A_{\nu})(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c} A_{\mu}) \right] \psi = m_0^2 c^2 \psi$$

$$\frac{1}{c^2} (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0)^2 \psi = \left(\sum_{i=1}^{3} (i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i)^2 + m_0^2 c^2 \right) \psi =$$

$$= \left((i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m_0^2 c^2 \right) \psi$$

Kulon potensialını daxil edək.

$$A_0(r) = -Z\frac{e}{r}, \;\; eA_0(r) = V(r)$$

$$(\varepsilon - V(r))^2 = \left(c^2 (i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

Əgər, $\vec{A}=0$ olarsa, onda stasionar Kleyn-Fok-Qordon tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$[(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar c^2 \vec{\nabla}^2]\psi(r) = 0$$

$$-\hbar^2 c^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r) =$$

$$= [(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar c^2 \vec{\nabla}^2]\psi(r,\theta,\varphi) \qquad (1)$$

(1) tənliyini həll etmək üçün $\psi(r)$ dalğa funksiyasını dəyişənlərinə ayıraq:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = u(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\hat{\vec{M}}^2 = -\hbar^2 \vec{\nabla}^2_{\theta,\varphi}$$

$$\hat{\vec{M}}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$-\hbar^2 c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\nabla^2_{\theta,\varphi}\right] u(r)Y(\theta,\varphi) =$$

$$= [(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4] u(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u(r) = \frac{(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} u(r) \qquad (2)$$

Radial funksiyanı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$u(r) = \frac{R(r)}{r}$$

$u(r)$ funksiyasından r-ə görə birinci və ikinci tərtib törəmələri hesablayaq və bunu (2) tənliyində nəzərə alaq.

$$\frac{du}{dr}=\frac{r\frac{dR(r)}{dr}-R(r)}{r^2}=\frac{1}{r}\cdot\frac{dR}{dr}-\frac{1}{r^2}\cdot R(r)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r^3}\cdot R(r)-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dR}{dr}=$$

$$=-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r^3}\cdot R(r)$$

$$\frac{2}{r^2}\cdot\frac{dR}{dr}-\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{2}{r^3}\cdot R(r)-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{dR}{dr}+\frac{2}{r^3}\cdot R(r)+$$

$$+\frac{l(l+1)}{r^3}R(r)=\frac{(\varepsilon\text{-}V(r))^2-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}\cdot\frac{R(r)}{r}-$$

$$-\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^3}R(r)=\frac{(\varepsilon\text{-}V(r))^2-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}\cdot\frac{R(r)}{r}$$

$$\left[\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)+\frac{(\varepsilon\text{-}V(r))^2-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}R(r)\right]=0 \qquad (3)$$

$k^2=\dfrac{(\varepsilon\text{-}V(r))^2-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}$ -əvəzləməsini aparaq, onda

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right]R(r)=0 \qquad (4)$$

alarıq.

$$(\varepsilon\text{-}V(r))^2=\varepsilon^2-2\varepsilon V(r)+V^2(r)=\varepsilon^2+\frac{2e^2Z}{r}\varepsilon+\frac{e^4Z^2}{r^2}$$

$$\alpha=\frac{e^{*2}}{\hbar c}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137{,}03}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{\varepsilon^2+\frac{2e^2Z}{r}\varepsilon+\frac{e^4Z^2}{r^2}-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}\right]R(r)=0$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2e^2\varepsilon Z}{\hbar^2c^2r}+\frac{e^4Z^2}{\hbar^2c^2r^2}-\frac{m_0^2c^4-\varepsilon^2}{\hbar^2c^2}\right]R(r)=0$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)-(Z\alpha)^2}{r^2}+\frac{2\alpha Z\varepsilon}{\hbar cr}-\frac{m_0^2c^4-\varepsilon^2}{\hbar^2c^2}\right]R(r)=0 \qquad (5)$$

$$-mc^2\prec\varepsilon\prec mc^2$$

$$\beta=\frac{2\left[m^2c^4-\varepsilon^2\right]^{1/2}}{\hbar c}$$

$\rho=\beta\cdot r$ əvəzləməsini qəbul edək, burada $0\prec\rho\prec\infty$

$$\frac{d}{dr}=\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d}{d\rho}=\beta\frac{d}{d\rho},\quad \frac{d^2}{dr^2}=\beta^2\frac{d^2}{d\rho^2}$$

$$\left[\beta^2\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)-(Z\alpha)^2}{\rho^2}\beta^2+\frac{2\alpha Z\varepsilon}{\hbar c\rho}\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{m_0^2c^4-\varepsilon^2}{\hbar^2c^2}\right]R(\rho)=0 \qquad (6)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)-(Z\alpha)^2}{\rho^2}+\frac{2\alpha Z\varepsilon}{\hbar c\rho\beta}-\frac{m_0^2c^4-\varepsilon^2}{\beta^2\hbar^2c^2}\right]R(\rho)=0 \qquad (7)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}\right]R(\rho)=0 \tag{8}$$

$$\mu=\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2}\ , \quad \lambda=\frac{2\alpha Z\varepsilon}{\hbar c\beta} \tag{9}$$

(8) tənliyi $\rho \to 0$ və $\rho \to \infty$ olduqda dağılır. Əvvəlcə $\rho \to \infty$ olduqda məxsusi həlli tapaq:

1) $\rho \to \infty$

$$(\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4})R(\rho)=0 \tag{10}$$

$R(\rho)=e^{m\rho}$

$$m^2-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow m=\pm\frac{1}{2} \tag{11}$$

$$R_{\rho\to\infty}=ae^{-\rho/2}+be^{+\rho/2} \tag{12}$$

(12) həllində də ikinci hədd dağılır. Dalğa funksiyasının sonlu olması şərtindən biz *b=0* qəbul edirik. Ona görə də $\rho \to \infty$ olduqda məxsusi həll aşağıdakı kimi olur:

$$R_{\rho\to\infty}(\rho)=ae^{-\rho/2} \tag{13}$$

2) İndi isə $\rho \to 0$ olduqda məxsusi həllini tapaq.

Onda (8) tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}\right]R(\rho)=0 \tag{14}$$

həlli isə $R(\rho)=a\rho^{\nu}$ - şəklində axtaraq.

$$R'(\rho)=a\nu\rho^{\nu-1},\ R''(\rho)=a\nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}$$

$$a\nu(\nu-1)\rho^{\nu-2}-(\mu^2-\frac{1}{4})a\rho^{\nu-2}=0$$

$$\nu(\nu-1)-(\mu^2-\frac{1}{4})=0$$

$$\nu^2-\nu-(\mu^2-\frac{1}{4})=0$$

Alınmış kvadrat tənliyi ν -yə görə həll edək:

$$D=1+4(\mu^2-\frac{1}{4})=1+4\mu^2-1=4\mu^2$$

$$\nu_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4\mu^2}}{2}=\frac{1}{2}\pm\mu$$

$$\nu=\frac{1}{2}+\mu$$

$$R(\rho)=a\rho^{1/2+\mu}$$

Onda ümumi həlli aşağıdakı kimi axtara bilərik:

$$R(\rho)=N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho) \qquad (15)$$

(15) funksiyasından ρ -ya görə birinci və ikinci tərtib törəmələri tapıb, (8) tənliyində nəzərə alaq:

$$R'(\rho)=N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{\mu-1/2}e^{-\rho/2}f(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{\mu+1/2}\times$$

$$\times e^{-\rho/2}f(\rho)+N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f'(\rho)$$

$$R''(\rho)=N(\frac{1}{2}+\mu)(-\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-3/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)+$$

$$+N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\mu)N\times$$

$$\times\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)+\frac{1}{4}N\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-$$

$$-\frac{1}{2}N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f'(\rho)+(\frac{1}{2}+\mu)N\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-$$

$$-\frac{1}{2}N\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)+N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f''(\rho)=$$

$$=N(\mu^2-\frac{1}{4})\rho^{-3/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)-N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}\times$$

$$\times e^{-\rho/2}f(\rho)+\frac{1}{4}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)-N(\frac{1}{2}+\mu)\times$$

$$\times\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f'(\rho)+$$

$$+N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{\mu+1/2}\times$$

$$\times e^{-\rho/2}f'(\rho)+N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f''(\rho)$$

$$N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f''(\rho)+N(\frac{1}{2}+\mu)\times$$

$$\times\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)+$$

$$+N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-\frac{1}{2}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)+$$

$$+N(\mu^2-\frac{1}{4})\rho^{-3/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)-N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}e^{-\rho/2}\times$$

$$\times f(\rho)+\frac{1}{4}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)+\frac{1}{4}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)-$$

$$-N(\mu^2-\frac{1}{4})\rho^{-3/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)+\frac{\lambda}{\rho}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}\times$$

$$\times f(\rho)-\frac{1}{4}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)=0$$

Sadələşdirmə apardıqdan sonra alarıq:

$$N\rho^{\mu+1/2}e^{-\rho/2}f''(\rho)+2N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}\times$$

$$\times e^{-\rho/2}f'(\rho)-N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f'(\rho)-N(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1/2+\mu}\times$$

$$\times e^{-\rho/2}f(\rho)+\frac{\lambda}{\rho}N\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2}f(\rho)=0$$

$$f''(\rho)+2(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1}f'(\rho)-f'(\rho)-$$

$$-(\frac{1}{2}+\mu)\rho^{-1}f(\rho)+\frac{\lambda}{\rho}f(\rho)=0$$

$$\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}+(\frac{2\mu+1}{\rho}-1)\frac{df}{d\rho}-\frac{\mu+\frac{1}{2}-\lambda}{\rho}f(\rho)=0 \qquad (16)$$

$2\mu+1=c$, $\mu+\frac{1}{2}-\lambda=a$ əvəzləmələrini qəbul edək: Onda

$$\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}+(\frac{c}{\rho}-1)\frac{df}{d\rho}-\frac{a}{\rho}f(\rho)=0 \qquad (17)$$

alarıq. (17) tənliyinin həllini sıra şəklində axtaraq.

$$f(\rho)=\sum_{n'}^{\infty}a_{n'}\rho^{n'} \qquad (18)$$

$$f'(\rho)=\sum_{n'}^{\infty}n'a_{n'}\rho^{n'-1} \qquad (19)$$

$$f''(\rho)=\sum_{n'}^{\infty}n'(n'-1)a_{n'}\rho^{n'-2} \qquad (20)$$

(18), (19) və (20) ifadələrini (17) tənliyində nəzərə alsaq:

$$\sum_{n'}^{\infty}n'(n'-1)a_{n'}\rho^{n'-2}+(\frac{c}{\rho}-1)\sum_{n'}^{\infty}n'a_{n'}\rho^{n'-1}-\frac{a}{\rho}\sum_{n'}^{\infty}a_{n'}\rho^{n'}=0$$

$$\sum_{n'}^{\infty} n'(n'-1)a_{n'}\rho^{n'-2} + c\sum_{n'}^{\infty} n'a_{n'}\rho^{n'-2} - \sum_{n'}^{\infty} n'a_{n'}\rho^{n'-1} -$$

$$-a\sum_{n'}^{\infty} a_{n'}\rho^{n'-1} = 0 \qquad (21)$$

alarıq. Buradan $a_{n'}$-lər üçün aşağıdakı rekkurent düsturları alınır:

$$a_1 = \frac{aa_0}{c}$$

$$a_2 = \frac{a_1(a+1)}{2(c+1)}$$

$$2a_2 + 2a_2c - a_1 - aa_1 = 0$$

$$3\cdot 2a_3 + c\cdot 3a_3 - 2a_2 - aa_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{a_2(a+2)}{3(c+2)}$$

$$a_m = \frac{a_{m-1}}{m}\cdot\frac{a+m-1}{c+m-1} \qquad (22)$$

Onda $f(\rho)$-funksiyasını aşağıdakı sıra şəklində göstərə bilərik.

$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + \ldots =$$

$$= a_0(1 + \frac{a}{c}\rho + \frac{a}{c}\cdot\frac{a+1}{c+1}\cdot\rho^2 + \ldots = a_0\sum_{n'}^{\infty}\frac{(a)_{n'}}{(c)_{n'}}\cdot\frac{\rho^{n'}}{n'!} \qquad (23)$$

(23) sırası ilə təyin olunan funksiyanı hiperhəndəsi funksiya ilə əvəz etmək olar. ${}_1F_1(a,c;\rho\to\infty)$.

Göründüyü kimi ${}_1F_1(a,c;\rho\to\infty)$ hiperhəndəsi funksiyası $\rho\to\infty$-da dağılır.

$$
{}_1F_1(a,c;\rho\to\infty)\Rightarrow\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\rho^{a-c}e^{\rho} \tag{24}
$$

Kulon sahəsində hərəkət edən π-mezonun enerji spektrini hesablamaq üçün

$$
\lambda=\mu+\frac{1}{2}+n'=\frac{Z\alpha\varepsilon}{(m_0^2c^4-\varepsilon^2)^{1/2}}
$$

düsturundan istifadə edək: Onda alarıq:

$$
\varepsilon_{n'l}=-m_\pi c^2\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{(n'+\frac{1}{2}+[(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right]^{-1/2} \tag{25}
$$

$$
E_{nl}=\int T_{00}d^3x=m_\pi c^2\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{\left(n'+\frac{1}{2}+[(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2]^{1/2}\right)^2}\right]^{-1/2} \tag{26}
$$

Baş kvant ədədini aşağıdakı kimi təyin etsək:

$$
n=n'+l+1
$$

$$
E_{nl}=m_\pi c^2\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{\left(n-l-\frac{1}{2}+[(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2]^{1/2}\right)^2}\right]^{-1/2} \tag{27}
$$

$$
n=1,2,3......., \quad l=0,1,2,3.......,(n-1)
$$

$N'=Na_0$- qəbul etsək, onda məxsusi funksiyanı belə yaza bilərik.

$$R(\rho) = N'\rho^{1/2+\mu}e^{-\rho/2} \cdot {}_1F_1(\mu + \frac{1}{2} - \lambda,\ 2\mu + 1; \rho) = N'W_{\lambda,\mu}(\rho) \quad (28)$$

Burada $W_{\lambda,\mu}(\rho)$-riyazi fizikada m’lum olan Uitteker funksiyasıdır. (27) düsturunu *Z-in* üstlü sırası şəklində göstərsək, enerji spektri üçün alarıq:

$$E_{nl} = m_\pi c^2 \left\{ 1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{a}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) + ... \right\} \quad (29)$$

Məsələ 35. *A* matrisinin məxsusi qiymətlərini və normallanmış məxsusi vektorlarını tapın.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Həlli:

Matrisin məxsusi qiymətləri aşağıdakı xarakteristik tənliyin həllindən tapılır, yəni:

$$\det\left|A - \lambda I\right| = 0$$

Burada

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vahid matrisdir.

$$\det\left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) - 20(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 24) = (3-\lambda)(3+\lambda)(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 7$$

Matrisin məxsusi vektoru isə matris tənliyinin həllindən tapılır, yəni:

$$A|1\rangle = \lambda_1|1\rangle, \text{ burada } |1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$a + 2b + 4c = 3a \qquad 5a + 3c = 3c$$

$$2a + 3b = 3b \qquad a = 0,\ b = -2c$$

Məxsusi vektor *1-də* normallandığından alarıq ki,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1;\ 0 + 4c^2 + c^2 = 1;\ 5c^2 = 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{5}},\ b = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ a = 0$$

Onda $\lambda = 3$ məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi vektor

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda = -3$-ə uyğun məxsusi vektoru tapaq:

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&0\\5&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$a+2b+4c=-3a$$
$$2a+3b=-3b$$
$$5a+3c=-3c$$

$$\begin{matrix}2b+4c+6a=0\\2a+6b=0\\5a+6c=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}a=-3b\\c=-\dfrac{5}{2}b\end{matrix}$$

Normallanma şərti:

$$a^2+b^2+c^2=1;\ 9b^2+b^2+\frac{25}{4}b^2=1;\ b^2=\frac{4}{65}$$

$$\begin{cases}b=\dfrac{2}{\sqrt{65}}\\ a=-\dfrac{6}{\sqrt{65}}\\ c=\dfrac{5}{\sqrt{65}}\end{cases};\quad |2\rangle=\frac{1}{\sqrt{65}}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\5\end{pmatrix},\ |3\rangle=\frac{1}{\sqrt{45}}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

Məsələ 36. Maksvell tənliklərinin Dirak tənliyi formasında təsviri.

Həlli:

Məqsədimiz Maksvell tənliklərini

$$rot\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$$

$$rot\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (1)$$

Dirak tənliyi formasında yazmaqdır, yəni:

$$-\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{3}\hat{\alpha}^{j}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\psi=-\frac{4\pi}{c}\phi \qquad (2)$$

Əvvəlcə $\hat{\alpha}^{j}$ matrisini və onun komponentlərinin kommutasiya münasibətlərini tapaq və ψ üçün dalğa tənliyini daxil edək.

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix};\ \phi=\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} \qquad (3)$$

burada, $\phi_0=c\rho,\ \phi_1=j_1=j_x,\ \phi_2=j_2=j_y,\ \phi_3=j_3=j_z$, həmçinin

$$x^0=x_0=ct,\ x^1=-x_1=x,\ x^2=-x_2=y,\ x^3=-x_3=z\,.$$

ψ -nin komponentləri isə aşağıdakı formadadır:

$$\psi_0\equiv 0,\ \psi_1=H_1-iE_1,\ \psi_2=H_2-iE_2,$$
$$\psi_3=H_3-iE_3 \qquad (4)$$

ψ -nin bu formada təyinindən alınır ki, $\hat{\alpha}^{j}$ matrisinin bəzi elementləri həqiqi, bəzi elementləri isə xəyalidir. Onda (2) tənliyindən alarıq:

$$-\frac{1}{i}\left(\hat{\alpha}^{0}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi+\hat{\alpha}^{1}\frac{\partial}{\partial x}\psi+\hat{\alpha}^{2}\frac{\partial}{\partial y}\psi+\right.$$
$$\left.+\hat{\alpha}^{3}\frac{\partial}{\partial z}\psi\right)=-\frac{4\pi}{c}\phi \qquad (5)$$

$\hat{\alpha}^{j}$ matrisini $\hat{\alpha}^{j}_{ik}$ ilə yazsaq, onda (5) tənliyini aşkar şəkildə yaza bilərik.

$$(\hat{\alpha}^j)^2 = 1$$

$$\hat{\alpha}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \hat{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \hat{\alpha}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Bu matrislərin izi, yəni $Tr(\hat{\alpha}^j) = 0$ və $j = 1,2,3$ olduğunu nəzərə alsaq, bu matrisin komponentləri arasında aşağıdakı antikommutasiya münasibətlərini alarıq:

$$\hat{\alpha}^1\hat{\alpha}^2 + \hat{\alpha}^2\hat{\alpha}^1 = 0, \ \hat{\alpha}^1\hat{\alpha}^2 = i\hat{\alpha}^3$$
$$\hat{\alpha}^2\hat{\alpha}^3 + \hat{\alpha}^3\hat{\alpha}^3 = 0, \ \hat{\alpha}^2\hat{\alpha}^3 = i\hat{\alpha}^1$$
$$\hat{\alpha}^3\hat{\alpha}^1 + \hat{\alpha}^1\hat{\alpha}^3 = 0, \ \hat{\alpha}^3\hat{\alpha}^1 = i\hat{\alpha}^2$$
$$(\hat{\alpha}^1)^2 = (\hat{\alpha}^2)^2 = (\hat{\alpha}^3)^2 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{3}\hat{\alpha}^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(-\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{3}\hat{\alpha}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\psi = -\left\{(\hat{\alpha}^0)^2\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} -\right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{3}(\hat{\alpha}^i)^2\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}\right\}\psi = \left\{\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right\}\psi = \psi = \frac{4\pi}{i}\sum_{j=0}^{3}\hat{\alpha}^j\frac{\partial}{\partial x^j}\phi$$

Məsələ 37. $\Lambda = \vec{\hat{\Sigma}}\hat{\vec{p}}$ spirallıq operatorunun $\hat{H}_D$ Dirak Hamilton operatoru ilə kommutasiyanı hesablayın: $\left[H_D, \hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}}\right] = ?$

Həlli:

$$H_D = c\hat{\vec{\alpha}}\,\hat{\vec{p}} + \beta m_0 c^2\,,\ \hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}\hat{\vec{p}}\,,$$

Burada $\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\Sigma = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$ - spin-vektor operatorunun 4 - ölçülü ümumiləşməsidir.

$$\left[H_D, \hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}}\right] = \left[c\hat{\vec{\alpha}}\,\hat{\vec{p}} + \beta m_0 c^2, \hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}}\right] = \left[c\hat{\vec{\alpha}}\,\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{\Sigma}}\hat{\vec{p}}\right] \qquad (1)$$

β -diaqonal matrisidir və ona görədə $[\hat{\beta}, \hat{\Sigma}] = 0$

$$(\hat{\vec{\alpha}}\,\hat{\vec{p}})(\Sigma\hat{\vec{p}}) - (\hat{\vec{\alpha}}\,\hat{\vec{p}})(\Sigma\hat{\vec{p}}) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}\hat{p} \\ \hat{\sigma}\hat{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}\hat{p} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}\hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}\hat{p} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}\hat{p} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}\hat{p} \\ \hat{\sigma}\hat{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\hat{\sigma}\hat{p})^2 \\ (\hat{\sigma}\hat{p})^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & (\hat{\sigma}\hat{p})^2 \\ (\hat{\sigma}\hat{p})^2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Beləliklə,

$$\left[H_D, \Sigma\hat{\vec{p}}\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\left[\hat{\vec{p}}, \Sigma\hat{\vec{p}}\right] = 0 \qquad (4)$$

Spirallıq operatorunu daxil edək:

$$\hat{\Lambda}_s = \frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} = \hat{s}\,\frac{\hat{\vec{p}}}{|\hat{\vec{p}}|} \qquad (5)$$

Fərz edək ki, elektron z oxu istiqamətində hərəkət edir, onda elektronun implusu $\vec{p} = \{0,0,p\}$ olar. Onda (5) ifadəsinə görə:

$$\Delta\hat{p}_s = s_z = \frac{\hbar}{2}\Sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\hat{\Lambda}_s$ -operatorunun məxsusi qiyməti $\pm\frac{\hbar}{2}$ -yə, məxsusi vektorları isə uyğun olaraq

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Burada

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ və } u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Məsələ 38. Hamilton matrisi $\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ olan zərrəciyə baxaq.

a) $|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 7i \\ -2 \end{pmatrix}$ halı H-ın məxsusi halıdırmı?

Hamilton operatoru ermitdirmi?

b) Enerjinin a_1, a_2, a_3-məxsusi qiymətlərini və normal-lanmış məxsusi vektorunu tapın.

c) $|a_1\rangle$ və $\langle a_1|$ vektorlarına uyğun operatorlarının ket və bra hasillərindən alınan matrisi tapın.

$P = \langle a_1 | a_1 \rangle$ operatoru proyeksiya operatorudurmu? $[P, H]$-kommutasiyasını hesablayın.

Həlli:

a) $H|\lambda\rangle$ təsirini hesablayaq. $H|\lambda\rangle = b|\lambda\rangle$, $b = const$

$$H|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 7i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+2i \\ -1+7i \\ 7i \end{pmatrix}$$

H-operatoru ermitdir.

$$H^{+} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

$|\lambda\rangle$ halı *H*-ın məxsusi halıdır.

b) Enerjinin məxsusi qiymətləri aşağıdakı xarakteristik tənliyin (secular equation) həllindən tapılır.

$$0 = \begin{pmatrix} 2-a & i & 0 \\ -i & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} = (2-a)[(1-a)(-a)-1] - i(-i)(-a) = -$$

$$-(a-1)(a-1-\sqrt{3})(a-1+\sqrt{3})$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1-\sqrt{3},\ a_3 = 1+\sqrt{3}$$

Əvvəlcə $|a_1\rangle$-in məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi vektoru tapaq. Bunun üçün aşağıdakı matris tənliyi həll etmək lazımdır:

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+iy=0 \\ -ix+z=0 \\ y-z=0 \end{matrix}$$

$x=1,\ y=z=i$. Onda $a_1=1$-ə uyğun məxsisi vektor aşağıdakı kimi olacaq.

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Bu məxsisi vektorun normallaşmasını tapaq:

$$\langle a_1 | a_1 \rangle = 1 + i \cdot i^* + i^* \cdot i = 1 + 1 + 1 = 3 .$$

Onda normallaşmış a_1 vektorunu belə yaza bilərik:

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Eyni qayda ilə

$$|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}} \begin{pmatrix} i(2-\sqrt{3}) \\ 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \ |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6(2+\sqrt{3})}} \begin{pmatrix} i(2+\sqrt{3}) \\ 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) P operatoru bu şəkildədir.

$$P = |a_1\rangle\langle a_1| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P matrisi ermitdir və $P^2 = P$ bərabərliyi ödənilir.

$$P^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deməli, P operatoru proyeksiya operatorudur.
$H|a_1\rangle = |a_1\rangle$, $\langle a_1|H = \langle a_1|$ və $P = \langle a_1|a_1\rangle$ şərtindən istifadə etsək, $[P, H]$ - kommutasiyasını hesablaya bilərik:

$$[P,H]=PH-HP=\langle a_1|a_1\rangle H-H\langle a_1|a_1\rangle=\langle a_1|a_1\rangle-\langle a_1|a_1\rangle=0$$

və ya

$$[P,H]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -i & -i\\ i & 1 & 1\\ i & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & i & 0\\ -i & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & i & 0\\ -i & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1 & -i & -i\\ i & 1 & 1\\ i & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Məsələ 39. Cütlük operatorunun proyeksiya operatoru olduğunu göstərin.

Həlli:

$$\hat{P}_+=\frac{1}{2}(1+\sigma_3);\ \hat{P}_-=\frac{1}{2}(1-\sigma_3)$$

$$\hat{P}_+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_-=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_+\psi_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\psi_1,\ \hat{P}_+\psi_2=0,$$

$$\hat{P}_-\psi_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,\ \hat{P}_-\psi_2=0.$$

$$\hat{P}_+(\psi_1+\psi_2)=\hat{P}_+\cdot\psi_1+\hat{P}_+\cdot\psi_2=\psi_1,$$

$$\hat{P}_-(\psi_1+\psi_2)=\hat{P}_-\cdot\psi_1+\hat{P}_-\cdot\psi_2=\psi_2,$$

$$\hat{P}_+(\psi_1+\psi_2)=\psi_1\ \text{və}\ \hat{P}_-(\psi_1+\psi_2)=\psi_2$$

operatorlarının təsiri istənilən spin halında olan halların yalnız birini meydana çıxarır. Ona görə də bu operatorlara $\hat{P}_{\pm}$ - *proyeksiya operatorları* deyilir.

Məsələ 40. Feşbaç-Villars təsvirində impulsun bütün məxsusi halları üçün Hamiltonianın $\hat{H}_{\Phi} = \hat{U}\hat{H}_{f}\hat{U}^{-1} = \hat{\tau}_{3}E_{p}$ kimi verildiyini isbat edin.

Həlli:

Sərbəst zərricklər üçün $\hat{H}_{f}$-Hamiltonianı aşağıdakı kimi verilir:

$$\hat{H}_{f} = (\hat{\tau}_{3} + i\hat{\tau}_{2})\cdot\frac{\hat{p}^{2}}{2m_{0}} + \hat{\tau}_{3}m_{0}c^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{\hat{p}^{2}}{2m_{0}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}m_{0}c^{2}$$

Biz burada aşağıdakı çevrilmədən istifadə edirik:

$$\Phi = \hat{U}\Phi, \quad \Phi^{+} = \Phi^{+}\hat{U}^{+}$$

Burada Φ-nin müsbət və mənfi hərləri aşağıdakı kimi verilir:

$$\Phi^{(+)}(p) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Phi^{(-)}(p) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{U}$ -isə $\hat{U} = \dfrac{(m_{0}c^{2} + E_{p}) - \hat{\tau}_{1}(m_{0}c^{2} - E_{p})}{\sqrt{4m_{0}c^{2}E_{p}}}$ kimi təyin olunan operatordur. Həmçinin $E_{p} = c(p^{2} + m_{0}^{2}c^{2})^{1/2}$ və $\hat{U}$ - 2×2 ölçülü unitar olmayan matrisdir $(\hat{U}^{-1} \neq U^{+})$. Belə ki,

$$\hat{U}^{-1} = \hat{\tau}_{3}\hat{U}\hat{\tau}_{3} = \mathrm{I}\cdot\frac{(m_{0}c^{2} + E_{p})^{2} + \hat{\tau}_{1}(m_{0}c^{2} - E_{p})}{\sqrt{4m_{0}c^{2}E_{p}}}.$$

$$\hat{H}_{\Phi} = \hat{U}\hat{H}_{f}\hat{U}^{-1} = \left[\frac{(m_{0}c^{2} + E_{p})\mathrm{I} - \hat{\tau}_{1}(m_{0}c^{2} - E_{p})}{\sqrt{4m_{0}c^{2}E_{p}}}\right]\times$$

$$\times\left[(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)\cdot\frac{\hat{p}^2}{2m_0}+\hat{\tau}_3 m_0c^2\right]\cdot\left[\frac{(m_0c^2+E_p)\mathrm{I}+\hat{\tau}_1(m_0c^2-E_p)}{\sqrt{4m_0c^2E_p}}\right]$$

Əgər biz $a_+=m_0c^2+E_p$, $a_-=m_0c^2-E_p$, $a=m_0c^2$

əvəzləmələrini aparsaq, onda:

$$\hat{H}_\Phi=\frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[a_+-a_-\hat{\tau}_1\right]\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)+a\hat{\tau}_3\right]\left[a_+-a_-\hat{\tau}_1\right]=$$

$$=\frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[a_+-a_-\hat{\tau}_1\right]\left[a_+\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)+a_-\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1+i\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1)+\right.$$

$$\left.+aa_+\hat{\tau}_3+aa_-\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1\right]=\frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[a_+^2\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2)+\right.$$

$$+a_+a_-\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1+i\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1)+aa_+^2\hat{\tau}_3+aa_-a_+\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1-$$

$$-a_-a_+\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)-a_-^2\frac{\hat{p}^2}{2m}(\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1+i\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1)-$$

$$\left.-aa_-a_+\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3-aa_-^2\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1\right]$$

İmpulsun məxsusi halları üçün $\hat{p}$-operatoru özünün məxsusi qiymətləri ilə əvəz edilə bilər. $\hat{\tau}_i\hat{\tau}_j=i\varepsilon_{ijk}\hat{\tau}_k\ (i\neq j=1,2,3)$ şərtini nəzərə alsaq:

$$\hat{\tau}_3+i\hat{\tau}_2=+i\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1+\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1=-i\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2-\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3=-\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1-i\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

və $\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3\hat{\tau}_1=-\hat{\tau}_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, həmçinin $-\hat{\tau}_1\hat{\tau}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

$$\hat{H}_{\Phi} = \frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\left\{a_+^2\frac{\hat{p}^2}{2m} + a_+a_-\frac{\hat{p}^2}{2m} + a_-^2\frac{\hat{p}^2}{2m}\right\} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\left\{a_+^2a + a_-^2a\right\} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\left\{2aa_-a_+\right\}\right] = \frac{1}{4m_0c^2E_p}\times$$

$$\times\left[\hat{\tau}_3\left\{(a_+ + a_-)^2\frac{\vec{p}^2}{m_0} + (a_+^2 + a_-^2)a\right\} + i\hat{\tau}_2\left\{(a_+ + a_-)^2\frac{\vec{p}^2}{2m_0} + 2aa_-a_+\right\}\right]$$

Aşağıdakı əvəzləmələri daxil edək:

$$(a_+ + a_-)^2\frac{\vec{p}^2}{m_0} = 4m_0^2c^4\frac{\vec{p}^2}{2m_0} = 2m_0c^2\vec{p}^2c^2$$

$$(a_+^2 + a_-^2)a = 2m_0c^2 = (m_0^2c^4 + E_p^2) = 2m_0c^2(2m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2)$$

$$2aa_-a_+ = 2m_0c^2(m_0^2c^4 - E_p^2) = -2m_0c^2\vec{p}^2c^2$$

Onda,

$$\hat{H}_{\Phi} = \frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[\hat{\tau}_3\left\{2m_0c^2\vec{p}^2c^2\cdot\frac{\vec{p}^2}{m_0} + 2m_0c^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(2m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2)\right\} + i\hat{\tau}_2\left\{2m_0c^2\vec{p}^2c^2\frac{\vec{p}^2}{2m_0} - 2m_0c^2\vec{p}^2c^2\right\}\right].$$

$$\hat{H}_{\Phi} = \frac{1}{4m_0c^2E_p}\left[\hat{\tau}_3\cdot 4m_0c^2E_p^2 + i\hat{\tau}_2\cdot 0\right] = \hat{\tau}_3E_p$$

Beləliklə, isbat etdik ki,

$$\hat{H}_{\Phi} = \hat{U}\hat{H}_f\hat{U}^{-1} = \hat{\tau}_3E_p$$

ƏDƏBİYYAT

1. **Walter Greiner.** “Relativistic Quantum Mechanics, Wave equations”. Springer-2000
2. **A.İ. Muxtarov.** “Kvant mexanikası”. II nəşr. Bakı-2007
3. **F.S. Sadıxov.** “Kvant mexanikası kursu”-II cild. Bakı-2003
4. **F.S. Sadıxov.** “Kvant mexanikası (məsələlərdə)”. Dərs vəsaiti: Bakı-1992
5. **З. Флюгге.** “Задачи по квантовой механике”, том 1 и 2, “Мир”, Москва, 1974”
6. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц** “Квантовая механика”, том 3, Физ. мат. лит., 2002, 752 с.
7. **А.С. Давыдов** - Квантовая механика, “Наука”, Москва 1972
8. **В. В. Киселёв.** Квантовая Механика, Москва, Издательство МЦНМО, 2009, 560 с.
9. **А.С. Давыдов** Квантовая механика, Санкт-Петербург, БХВ-Петербург 2011, 704 стр.
10. **А. И. Наумов**. Физика атомного ядра и элементарных частиц. Москва, Просвещение, 1984, 384 səh.
11. **Mark Thomson**, Modern Particle Physics. Cambridge University Press. 2013, 556 səh.
12. **Otto Nachtmann**. Elementary Particle Physics, Springer-Verlag, 1989, 559 səh.
13. **David Griffiths**. Introduction to Elementary Particles, 1987, 396 səh.
14. **Ronald Gautream , William Savin**. Theory and Problems of Modern Physics. Schaumm’s Outline Series, 1999

E.Ə. Dadaşov

RELYATİVİSTİK KVANT MEXANİKASI (Məsələlərdə)

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti